

解析学 A 中間試験

2019.12.16.

- 問題紙 (A4 判)1 枚, 解答紙 (A3 判)2 枚, 計算用紙 (A4 判)3 枚.
- 解答紙 2 枚ともに学生番号と氏名を記入し, 2 枚とも提出してください.
- 問題紙, 計算用紙の提出は不要です.
- 解答順序は任意でよく, 必要なら裏面も使ってかまいませんが, 続き具合を明確にしてください.

【問題 1】 $z^4 + 1 = 0$ をみたす上半平面内の z (すなわち $\text{Im } z > 0$) をすべて求めなさい.

【問題 2】 留数計算を経由して次の積分の値を求めなさい. $a > 0$ は定数.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^4 + 1} dx$$

【問題 3】 次の条件 (i)~(iii) をすべてみたす 1 次 (分数) 変換 $w = f(z)$ を求めなさい. $\alpha \in \mathbb{C}$ は $0 < |\alpha| < 1$ をみたす定数である.

- 単位円周 $|z| = 1$ を単位円周 $|w| = 1$ にうつす.
- α を 0 にうつす.
- 0 を $-\alpha$ にうつす.

【問題 4】 任意の $\epsilon > 0$ と任意の $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$ に対し, $e^{1/z} = \alpha$ をみたす $z \in \mathbb{C}$ が $0 < |z| < \epsilon$ の範囲に存在することを示しなさい. ただし, 高級な定理 (ピカールの定理) に帰するのは不可.

【問題 5】 関数 $1/(z^2 - 1)$ の次の円環内でのローラン展開を求めなさい.

$$(1) 0 < |z - 1| < 2 \quad (2) |1 - \alpha| < |z - \alpha| < |1 + \alpha| \quad (\alpha \in \mathbb{C}, \text{Re } \alpha > 0)$$

【問題 6】 ルーシェの定理を援用し, 次の方程式の与えられた範囲にある複素数解の個数を求めなさい. 重複度が k の解は k 個と数える.

$$e^z = 2z^2 + 1, \quad |z| < 1$$

以上