

- 次の問題【1】～【6】から3題を選んで解答してください。4題以上解答しても評価の対象になるのはそのうちの(当方で選んだ)3題です。
- 用紙は任意ですが, 学生番号と氏名を明記してください。
- 手書き以外 (TeX 等) で作成する場合は, 氏名を自筆で記してください。
- 提出先は数学事務室前のレポートボックス, 提出締切は 2020(令和 2)年 2月 3日(月)です。

【1】 単一閉曲線 C とその内部 D を含む領域で $f(z)$ が正則ならば, $z \in D$ における値 $f(z)$ を C 上の積分で表示するコーシーの積分公式があった。 $z \in C$ において C の接線が存在するとき, $f(z)$ の値を積分表示(主値)する式も紹介した。 C が長方形であって z が C の頂点である場合に同様の公式をつくり, それを示しなさい。

【2】 ベルヌーイ数の定義を述べ, $\cot z$ の $z = 0$ のまわりのローラン展開を求めなさい。必要に応じてベルヌーイ数の性質も導出しなさい。

【3】 $f(z)$ を領域 D 上の定数でない有理型関数とし, $a \in D$ がその k 位の極であるとする。 a の近傍と ∞ の近傍との局所的な k 対 1 対応を命題の形で述べ, それを示しなさい。

【4】 偏角の原理(とその拡張)を用いて次の逆関数の定理を示しなさい: 「 $f(z)$ が領域 D で正則であり, $f(a) = \alpha$, $f'(a) \neq 0$ とすると, α のある近傍 V で $f(z)$ の正則な逆関数 $g(w)$ が

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{zf'(z)}{f(z)-w} dz \quad (r \text{ は十分小さい正数})$$

で与えられる。」

【5】 D を有界な領域とする。 $u(z) = u(x+iy) = u(x, y)$ 等とみなす。

(1) D 上の劣調和関数 $u(z)$ が次式をみたすことを示しなさい:

$$u(a) \leq \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-a| \leq r} u(z) dx dy, \quad a \in D, \quad r \text{ は十分小さい正数.}$$

(2) D 上の正則関数の列 $\{f_n\}$ と D 上の連続関数 f が

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_D |f_n(z) - f(z)|^2 dx dy = 0$$

をみたすとき, f が D 上の正則関数であることを示しなさい。

【6】 複素関数に関する気に入った定理を述べ, 証明の概略を記しなさい。気に入った理由も述べなさい。

以上