情報幾何における勾配流の Weyl 対称性

Weyl symmetry on the gradient-flow in information geometry

茨城大　　　和田 達明

with A.M. Scarfone (トリノ工科大), 野田 宗佑（都城高専）

T.W, J. Geom. Symmetry Phys. **66** (2023) 59.
T.W., S.Noda, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.

ミニワークショップ「統計多様体の幾何学とその周辺」(17)
北大　sul 7 dicembre 2025

Outline

Outline

情報幾何

- 確率分布のパラメータから成る統計多様体上の微分幾何。
- Fisher 計量 g と（捩れのない）α-接続 $\nabla^{(\alpha)}$ に基づいた非 Riemann 幾何学。

情報幾何

- 確率分布のパラメータから成る統計多様体上の微分幾何。
- Fisher 計量 g と（捩れのない）α-接続 $\nabla^{(\alpha)}$ に基づいた非 Riemann 幾何学。

- α-接続の特徴づけ?
- 一般相対論やゲージ理論との関係は？

情報幾何

- 確率分布のパラメータから成る統計多様体上の微分幾何。
- Fisher 計量 g と（捩れのない）α-接続 $\nabla^{(\alpha)}$ に基づいた非 Riemann 幾何学。

- α-接続の特徴づけ?
- 一般相対論やゲージ理論との関係は？

本講演

情報幾何の勾配流を、解析力学における粒子の軌跡（群）と見做して、Weyl 幾何の枠組みから、非計量性および Weyl ゲージ場の重要性を踏まえて、物理的に理解する。

指数型確率分布: θ-parametrized 確率分布関数 (pdf)

$$p_\theta(x) = \exp\left[\theta^i F_i(x) - \underbrace{\Psi(\theta)}_{\text{規格化因子}}\right].$$

双対 affine 座標と potential 関数:

$$\eta_i = \frac{\partial}{\partial\theta^i}\Psi(\theta). \quad \theta^i = \frac{\partial}{\partial\eta_i}\Psi^\star(\eta), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Legendre 変換： $\Psi^\star(\eta) = \theta^i\eta_i - \Psi(\theta)$,

$$\Psi(\theta) = \ln\int dx\, \exp\left[\theta^i F_i(x)\right], \quad \text{キュムラント関数}$$

$$\Psi^\star(\eta) = \int dx\, p_\theta(x) \ln p_\theta(x), \quad \Leftarrow \quad \text{(負の) エントロピ.}$$

双対 affine 座標と potential 関数:

$$\eta_i = \frac{\partial}{\partial\theta^i}\Psi(\theta). \quad \theta^i = \frac{\partial}{\partial\eta_i}\Psi^\star(\eta), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Legendre 変換： $\Psi^\star(\eta) = \theta^i\eta_i - \Psi(\theta)$,

Fisher 計量： $g_{ij}(\theta) := \dfrac{\partial\eta_i}{\partial\theta^j} = \dfrac{\partial^2\Psi(\theta)}{\partial\theta^i\partial\theta^j}$.

α-接続： $\Gamma^{(\alpha)}{}_{ijk}(\theta) := \dfrac{(1-\alpha)}{2}C_{ijk}(\theta), \quad C_{ijk}(\theta) := \dfrac{\partial^3\Psi(\theta)}{\partial\theta^i\partial\theta^j\partial\theta^k}$.

甘利 俊一：情報幾何の新展開　サイエンス社
藤原 彰夫：情報幾何学の基礎　共立出版

Outline

藤原、甘利: Physica D **80** (1995) 317.
中村: J. Ind. Appl. Math. **11** (1994) 21.

勾配流方程式

$$\frac{d\theta^i}{dt} = g^{ij}(\theta)\,\frac{\partial\Psi(\theta)}{\partial\theta^j},$$

勾配流方程式

藤原、甘利: Physica D **80** (1995) 317.
中村: J. Ind. Appl. Math. **11** (1994) 21.

勾配流方程式

$$\underbrace{\frac{d\theta^i}{dt}}_{\frac{\partial\theta^i}{\partial\eta_j}\frac{d\eta^j}{dt}} = g^{ij}(\theta)\underbrace{\frac{\partial\Psi(\theta)}{\partial\theta^j}}_{\eta_j}, \Leftrightarrow \frac{d\eta_i}{dt} = \eta_i.$$

双対座標での線形化

勾配流方程式

藤原、甘利: Physica D **80** (1995) 317.
中村: J. Ind. Appl. Math. **11** (1994) 21.

勾配流方程式

$$\frac{d\theta^i}{dt} = g^{ij}(\theta)\,\frac{\partial\Psi(\theta)}{\partial\theta^j}, \Leftrightarrow \frac{d\eta_i}{dt} = \eta_i.$$ 双対座標での線形化

$$\frac{d\eta_i}{dt} = -g_{ij}(\eta)\frac{\partial\Psi^\star(\eta)}{\partial\eta_j}, \Leftrightarrow \frac{d\theta^i}{dt} = -\theta^i.$$

勾配流方程式

藤原、甘利: Physica D **80** (1995) 317.
中村: J. Ind. Appl. Math. **11** (1994) 21.

勾配流方程式

$$\frac{d\theta^i}{dt} = g^{ij}(\theta)\,\frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta^j}, \;\Leftrightarrow\; \frac{d\eta_i}{dt} = \eta_i.$$ 双対座標での線形化

$$\frac{d^2\theta^i}{dt^2} + \Gamma^{(-1)\,i}{}_{jk}(\theta)\frac{d\theta^j}{dt}\frac{d\theta^k}{dt} = \frac{d\theta^i}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\theta^k}{dt}\nabla^{(-1)}_k\frac{d\theta^i}{dt} = -\frac{d\theta^i}{dt}.$$

$$\Gamma^{(-1)\,i}{}_{jk}(\theta) = g^{i\ell}(\theta)\frac{\partial g_{\ell j}(\theta)}{\partial \theta^k}$$

Outline

Giuseppe Luigi Lagrange

Lagrangian: $L = L(x, \dot{x})$,

正準運動量： $p_i := \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$,

Euler-Lagrange 方程式: $\dot{p}_i = \dfrac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^i}$,

Lagrange 形式

Giuseppe Luigi Lagrange

Lagrangian: $L = L(x, \dot{x})$,

正準運動量： $p_i := \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$,

Euler-Lagrange 方程式: $\dot{p}_i = \dfrac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^i}$,

$$L = \frac{1}{2} g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j - V(x)$$

Lagrange 形式

Giuseppe Luigi Lagrange

Lagrangian: $L = L(x, \dot{x})$,

正準運動量： $p_i := \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$,

Euler-Lagrange 方程式: $\dot{p}_i = \dfrac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^i}$,

$$L = \frac{1}{2} g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j - V(x)$$

$$p_i = g_{ij}(x) \dot{x}^j, \quad \text{構成関係式}$$

Lagrange 形式

Giuseppe Luigi Lagrange

Lagrangian: $L = L(x, \dot{x})$,

正準運動量： $p_i := \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$,

Euler-Lagrange 方程式: $\dot{p}_i = \dfrac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^i}$,

$$L = \frac{1}{2} g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j - V(x)$$

$$p_i = g_{ij}(x) \dot{x}^j, \quad \text{構成関係式}$$

$$\dot{p}_i = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}(x)}{\partial x^i} \dot{x}^j \dot{x}^k - \frac{\partial V(x)}{\partial x^i}. \quad \text{運動方程式}$$

Lagrange 形式

$$L = \frac{1}{2} g_{ij}(x)\dot{x}^i \dot{x}^j - V(x)$$

$$p_i = g_{ij}(x)\dot{x}^j, \quad \text{構成関係式}$$

$$\dot{p}_i = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}(x)}{\partial x^i}\dot{x}^j \dot{x}^k - \frac{\partial V(x)}{\partial x^i}. \quad \text{運動方程式}$$

$$\dot{p}_i = g_{ij}(x)\ddot{x}^j + \frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x^k}\dot{x}^j \dot{x}^k,$$

$$\Rightarrow \quad g_{ij}(x)\ddot{x}^j + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}(x)}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}(x)}{\partial x^i}\right)}_{\Gamma_{ijk}(x)}\dot{x}^j \dot{x}^k = -\frac{\partial V(x)}{\partial x^i}.$$

Lagrange 形式

$$L = \frac{1}{2} g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j - V(x)$$

$$p_i = g_{ij}(x) \dot{x}^j, \quad \text{構成関係式}$$

$$\dot{p}_i = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}(x)}{\partial x^i} \dot{x}^j \dot{x}^k - \frac{\partial V(x)}{\partial x^i}. \quad \text{運動方程式}$$

$$\dot{p}_i = g_{ij}(x) \ddot{x}^j + \frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x^k} \dot{x}^j \dot{x}^k,$$

$$\Rightarrow \quad g_{ij}(x) \ddot{x}^j + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}(x)}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}(x)}{\partial x^i} \right)}_{\Gamma_{ijk}(x)} \dot{x}^j \dot{x}^k = -\frac{\partial V(x)}{\partial x^i}.$$

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i{}_{jk}(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = -g^{ij}(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x^j}.$$

パラメータの付け替えに対して不変な作用

作用積分 (action integral)

$$S_a(x) = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} m\sqrt{g_{ij}(x)\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}}d\lambda$$

パラメータ λ の変更 ($\lambda \to \lambda'$) に対して、この作用 S_a は不変 (reparametrization invariant) である。

パラメータの付け替えに対して不変な作用

作用積分 (action integral)

$$S_a(x) = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} m\sqrt{g_{ij}(x)\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}}d\lambda = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} L\left(x, \frac{dx}{d\lambda}\right)d\lambda$$

パラメータ λ の変更 $(\lambda \to \lambda')$ に対して、この作用 S_a は不変 (reparametrization invariant) である。

パラメータの付け替えに対して不変な作用

作用積分 (action integral)

$$S_a(x) = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} m\sqrt{g_{ij}(x)\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}}d\lambda = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} L\left(x, \frac{dx}{d\lambda}\right) d\lambda$$

パラメータ λ の変更 $(\lambda \to \lambda')$ に対して、この作用 S_a は不変 (reparametrization invariant) である。

Lagrangian

$$L\left(x, \frac{dx}{d\lambda}\right) = m\sqrt{g_{ij}(x)\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}}$$

パラメータの付け替えに対して不変な作用

作用積分 (action integral)

$$S_a(x) = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} m\sqrt{g_{ij}(x)\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}}d\lambda = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} L\left(x, \frac{dx}{d\lambda}\right) d\lambda$$

パラメータ λ の変更 ($\lambda \to \lambda'$) に対して、この作用 S_a は不変 (reparametrization invariant) である。

Lagrangian

$$L\left(x, \frac{dx}{d\lambda}\right) = m\sqrt{g_{ij}(x)\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}}$$

註） $ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j, \Rightarrow S_a = \int m\, ds$ 質量 $m \times$ 弧長 s

$$L\left(x, \frac{dx}{d\lambda}\right) = m\sqrt{g_{ij}(x)\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}}$$

einbein $e(\lambda)$ の導入：

$$e(\lambda) := \frac{1}{m}\sqrt{g_{ij}(x)\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}}, \quad e(\lambda)d\lambda = e(\lambda')d\lambda'.$$

$$L\left(x, \frac{dx}{d\lambda}\right) = m\sqrt{g_{ij}(x)\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}}$$

einbein $e(\lambda)$ の導入：

$$e(\lambda) := \frac{1}{m}\sqrt{g_{ij}(x)\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}}, \quad e(\lambda)d\lambda = e(\lambda')d\lambda'.$$

Lagrangian:

$$L\left(x, \frac{dx}{d\lambda}\right) = \frac{1}{2e(\lambda)}g_{ij}(x)\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda} + \frac{e(\lambda)}{2}m^2.$$

Yu.S. Kalashnikova, A.V. Nefediev, Phys. Atom. Nucl. **60** 1389-1394 (1997)

確認

$ds^2 := g_{ij}(x)dx^i dx^j$ と記すと、$e(\lambda) = \frac{1}{m}\frac{ds}{d\lambda}$

$$L\left(x, \frac{dx}{d\lambda}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{e^{-1}(\lambda)}_{m\frac{d\lambda}{ds},}\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{2}\underbrace{e(\lambda)}_{\frac{1}{m}\frac{ds}{d\lambda}}m^2 = m\frac{ds}{d\lambda}.$$

確認

$ds^2 := g_{ij}(x)dx^i dx^j$ と記すと、$e(\lambda) = \frac{1}{m}\frac{ds}{d\lambda}$

$$L\left(x, \frac{dx}{d\lambda}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{e^{-1}(\lambda)}_{m\frac{d\lambda}{ds},}\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{2}\underbrace{e(\lambda)}_{\frac{1}{m}\frac{ds}{d\lambda}}m^2 = m\frac{ds}{d\lambda}.$$

$$\therefore \quad L\left(x, \frac{dx}{d\lambda}\right) = m\sqrt{g_{ij}(x)\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}}$$

運動方程式

$$L\left(x, \frac{dx}{d\lambda}\right) = \frac{1}{2e(\lambda)} g_{ij}(x) \frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda} + \frac{e(\lambda)}{2} m^2.$$

正準運動量： $p_i := \dfrac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^i}{d\lambda}\right)} = \dfrac{1}{e(\lambda)} g_{ij}(x)\dfrac{dx^i}{d\lambda},$

運動方程式

$$L\left(x, \frac{dx}{d\lambda}\right) = \frac{1}{2e(\lambda)} g_{ij}(x) \frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda} + \frac{e(\lambda)}{2} m^2.$$

正準運動量： $p_i := \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^i}{d\lambda}\right)} = \frac{1}{e(\lambda)} g_{ij}(x) \frac{dx^j}{d\lambda},$

Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{d\lambda} p_i = \frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{1}{2e(\lambda)} \frac{\partial g_{jk}(x)}{\partial x^i} \frac{dx^j}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda}.$$

Outline

与えられた計量 $g_{jk}(x)$ と、それとは独立な接続 ∇ に対して

$$\text{非計量性テンソル } Q_{ijk}(x) := \nabla_i\, g_{jk}(x).$$

一般に、接続は曲率、捩率、非計量性で特徴付けられる。

一般的 affine 接続の接続係数 $\overset{\text{aff}}{\Gamma}{}^i{}_{jk}(x)$

$$\overset{\text{aff}}{\Gamma}{}^i{}_{jk}(x) = \underbrace{\Gamma^i{}_{jk}(x)}_{\text{Levi-Civita}} + \underbrace{K^i{}_{jk}(x)}_{\text{contorsion tensor}} + \underbrace{L^i{}_{jk}(x)}_{\text{disformation tensor}},$$

Disformation tensor:

$$L^i{}_{jk}(x) := \frac{1}{2}\left\{Q^i{}_{jk}(x) - Q_j{}^i{}_k(x) - Q_k{}^i{}_j(x)\right\}.$$

与えられた計量 $g_{jk}(x)$ と、それとは独立な接続 ∇ に対して

$$\text{非計量性テンソル}\ Q_{ijk}(x) := \nabla_i\, g_{jk}(x).$$

一般に、接続は曲率、捩率、非計量性で特徴付けられる。

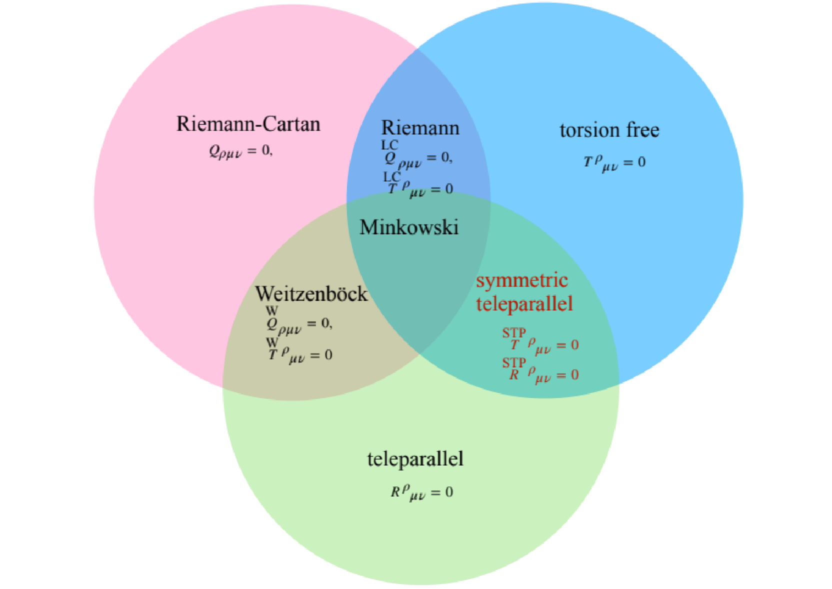
一般的 affine 接続の接続係数 $\overset{\text{aff}}{\Gamma}{}^i{}_{jk}(x)$

$$\overset{\text{aff}}{\Gamma}{}^i{}_{jk}(x) = \underbrace{\Gamma^i{}_{jk}(x)}_{\text{Levi-Civita}} + \underbrace{K^i{}_{jk}(x)}_{\text{contorsion tensor}} + \underbrace{L^i{}_{jk}(x)}_{\text{disformation tensor}},$$

Disformation tensor:

$$L^i{}_{jk}(x) := \frac{1}{2}\left\{Q^i{}_{jk}(x) - Q_j{}^i{}_k(x) - Q_k{}^i{}_j(x)\right\}.$$

接続	曲率	捩率	非計量性
Levi-Civita	non-zero	0	0
Weizenböck	0	non-zero	0



L. Järv et al. "Nonmetricity formulation of general relativity and its scalar-tensor extension", Phys. Rev. D 97, 124025 (2018)

情報幾何における非計量性？

情報幾何の分野で、”非計量性”という用語をあまり聞かない。

情報幾何における非計量性？

情報幾何の分野で、”非計量性”という用語をあまり聞かない。
双対平坦空間： 曲率も捩率もゼロ $\Rightarrow$ 非計量性が重要！

情報幾何における非計量性？

情報幾何の分野で、”非計量性”という用語をあまり聞かない。
双対平坦空間： 曲率も捩率もゼロ $\Rightarrow$ 非計量性が重要！
Amari-Centsov テンソル $C_{ijk}(\theta)$ が重要！

$$\alpha\text{-接続：}\ \Gamma^{(\alpha)\,i}{}_{jk}(\theta) = \Gamma^{i}{}_{jk}(\theta) - \frac{\alpha}{2} g^{i\ell}(\theta) C_{\ell jk}(\theta).$$

情報幾何における非計量性？

情報幾何の分野で、” 非計量性 ” という用語をあまり聞かない。
双対平坦空間： 曲率も捩率もゼロ ⇒ 非計量性が重要！
Amari-Centsov テンソル $C_{ijk}(\theta)$ が重要！

$$\alpha\text{-接続：}\ \ \Gamma^{(\alpha)\,i}{}_{jk}(\theta) = \Gamma^{i}{}_{jk}(\theta) - \frac{\alpha}{2}\, g^{i\ell}(\theta) C_{\ell jk}(\theta).$$

これより、

$$\begin{aligned}\nabla_i^{(\alpha)} g_{jk}(\theta) &= \partial_i g_{jk}(\theta) - \Gamma^{(\alpha)\,\ell}{}_{ij}(\theta) g_{\ell k}(\theta) - \Gamma^{(\alpha)\,\ell}{}_{ik}(\theta) g_{j\ell}(\theta) \\ &= \underbrace{\overset{\mathrm{LC}}{\nabla}_i g_{jk}(\theta)}_{0} + \alpha\, C_{ijk}(\theta) = \alpha\, C_{ijk}(\theta),\end{aligned}$$

α-接続 $\nabla^{(\alpha)}$ に対する非計量性

$$Q^{(\alpha)}_{ijk}(\theta) := \nabla_i^{(\alpha)} g_{jk}(\theta) = \alpha\, C_{ijk}(\theta).$$

Hirano and Nagahama, Physica A **625**, 129017 (2023)

情報幾何における非計量性？

双対平坦空間： 曲率も捩率もゼロ $\Rightarrow$ 非計量性が重要！
Amari-Centsov テンソル $C_{ijk}(\theta)$ が重要！

$$\alpha\text{-接続：}\quad \Gamma^{(\alpha)\,i}{}_{jk}(\theta) = \Gamma^{i}{}_{jk}(\theta) - \frac{\alpha}{2}\, g^{i\ell}(\theta) C_{\ell jk}(\theta).$$

α-接続 $\nabla^{(\alpha)}$ に対する非計量性

$$Q^{(\alpha)}_{ijk}(\theta) := \nabla^{(\alpha)}_i g_{jk}(\theta) = \alpha\, C_{ijk}(\theta).$$

The disformation tensor:

$$L^{i}{}_{jk}(x) := \frac{1}{2}\left\{ Q^{i}{}_{jk}(x) - Q_j{}^{i}{}_{k}(x) - Q_k{}^{i}{}_{j}(x) \right\} = -\frac{\alpha}{2}\, g^{i\ell}(\theta) C_{\ell jk}(\theta).$$

情報幾何における非計量性？

双対平坦空間： 曲率も捩率もゼロ $\Rightarrow$ 非計量性が重要！

Amari-Centsov テンソル $C_{ijk}(\theta)$ が重要！

$$\alpha\text{-接続：}\quad \Gamma^{(\alpha)\,i}{}_{jk}(\theta) = \Gamma^{i}{}_{jk}(\theta) - \frac{\alpha}{2} g^{i\ell}(\theta) C_{\ell jk}(\theta).$$

α-接続 $\nabla^{(\alpha)}$ に対する非計量性

$$Q^{(\alpha)}_{ijk}(\theta) := \nabla^{(\alpha)}_{i} g_{jk}(\theta) = \alpha\, C_{ijk}(\theta).$$

The disformation tensor:

$$L^{i}{}_{jk}(x) := \frac{1}{2}\left\{ Q^{i}{}_{jk}(x) - Q_{j}{}^{i}{}_{k}(x) - Q_{k}{}^{i}{}_{j}(x) \right\} = -\frac{\alpha}{2} g^{i\ell}(\theta) C_{\ell jk}(\theta).$$

α-接続の特徴づけ

$$\Gamma^{(\alpha)\,i}{}_{jk}(x) = \overbrace{\Gamma^{i}{}_{jk}(x)}^{\text{Levi-Civita}} + \underbrace{\overbrace{K^{i}{}_{jk}(x)}^{\text{contorsion}}}_{0} + \underbrace{\overbrace{L^{i}{}_{jk}(x)}^{\text{disformation}}}_{-\frac{\alpha}{2} g^{i\ell}(\theta) C_{\ell jk}(\theta)},$$

Outline

Weyl 幾何 $(\mathcal{M}, g_{ij}, \omega_k)$

非計量性: $\overset{\mathrm{w}}{\nabla}_k\, g_{ij} = \omega_k\, g_{ij},\ \overset{\mathrm{w}}{\nabla}_k\, g^{ij} = -\omega_k\, g^{ij},\ \omega_k$: Weyl ゲージ場,

接続係数： $\overset{\mathrm{w}}{\Gamma}{}^k{}_{ij} = \underbrace{\Gamma^k{}_{ij}}_{\text{Levi-Civita}} - \frac{1}{2}\left(\delta^k_i \omega_j + \delta^k_j \omega_i - g^{k\ell}\omega_\ell g_{ij}\right).$

($\omega_k \to 0$ で Riemann 幾何に帰着。)

Weyl 幾何 $(\mathcal{M}, g_{ij}, \omega_k)$

非計量性: $\overset{\mathrm{w}}{\nabla}_k\, g_{ij} = \omega_k\, g_{ij}$, $\overset{\mathrm{w}}{\nabla}_k\, g^{ij} = -\omega_k\, g^{ij}$, ω_k : Weyl ゲージ場,

接続係数： $\overset{\mathrm{w}}{\Gamma}{}^k{}_{ij} = \underbrace{\Gamma^k{}_{ij}}_{\text{Levi-Civita}} - \frac{1}{2}\left(\delta^k_i \omega_j + \delta^k_j \omega_i - g^{k\ell}\omega_\ell g_{ij}\right).$

($\omega_k \to 0$ で Riemann 幾何に帰着。)

Weyl ゲージ変換: （正の関数 $\Omega(x)$ に対して）

$$
\begin{cases}
g_{ij} \to \bar{g}_{ij} = \Omega^2(x)\, g_{ij}, \\
\omega_k \to \bar{\omega}_k = \omega_k + \partial_k \ln \Omega^2(x), \\
\varphi(x) \to \bar{\varphi}(x) = \varphi(x)/\Omega(x). \quad \varphi(x)\text{: スカラー関数}
\end{cases}
$$

Weyl ゲージ変換: （正の関数 $\Omega(x)$ に対して）

$$\begin{cases} g_{ij} \to \bar{g}_{ij} = \Omega^2(x)\, g_{ij}, \\ \omega_k \to \bar{\omega}_k = \omega_k + \partial_k \ln \Omega^2(x), \\ \varphi(x) \to \bar{\varphi}(x) = \varphi(x)/\Omega(x). \quad \varphi(x)\text{: スカラー関数} \end{cases}$$

Weyl 対称性： Weyl ゲージ変換に対する不変性。

Weyl 幾何

Weyl ゲージ変換: （正の関数 $\Omega(x)$ に対して）

$$\begin{cases} g_{ij} \to \bar{g}_{ij} = \Omega^2(x)\, g_{ij}, \\ \omega_k \to \bar{\omega}_k = \omega_k + \partial_k \ln \Omega^2(x), \\ \varphi(x) \to \bar{\varphi}(x) = \varphi(x)/\Omega(x). \quad \varphi(x)\text{: スカラー関数} \end{cases}$$

Weyl 対称性： Weyl ゲージ変換に対する不変性。

等価クラス (g_{ij}, ω_k)

- 各等価クラスは互いに Weyl ゲージ変換で繋がっている。
- ゲージ固定： ある特定の等価クラス (g_{ij}, ω_k) を選ぶこと。

特に $(g_{ij}, \omega_k = 0)$ を Einstein ゲージと呼ぶ。$\because$ Riemann 幾何に帰着

自己平行方程式と固有時

滑らかな曲線 $C = C(\lambda)$ に沿った 2 つの平行ベクトル場 V と U に対して、

$$\frac{d}{d\lambda}\left(g_{ij}(x)V^iU^j\right) = \omega_k \frac{dx^k}{d\lambda} g_{ij}(x)V^iU^j.$$

自己平行方程式と固有時

滑らかな曲線 $C = C(\lambda)$ に沿った 2 つの平行ベクトル場 V と U に対して、

$$\frac{d}{d\lambda}\left(g_{ij}(x)V^iU^j\right) = \omega_k \frac{dx^k}{d\lambda} g_{ij}(x)V^iU^j.$$

与えられた Weyl ゲージ場 ω_k に対して、

Weyl の自己平行方程式：

$$\frac{dx^j}{d\lambda} \overset{\mathrm{w}}{\nabla}_j \frac{dx^i}{d\lambda} = \frac{1}{2u^2(\lambda)}\left(\frac{du^2(\lambda)}{d\lambda} - u^2(\lambda)\,\omega_j \frac{dx^j}{d\lambda}\right)\frac{dx^i}{d\lambda}.$$

ここで、接線ベクトル $u^j(\lambda) := dx^j/d\lambda$ と

$$u^2(\lambda) := g_{ij}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}.$$

自己平行方程式と固有時

与えられた Weyl ゲージ場 ω_k に対して、

Weyl の自己平行方程式：

$$\frac{dx^j}{d\lambda}\overset{\mathrm{w}}{\nabla}_j\frac{dx^i}{d\lambda}=\frac{1}{2u^2(\lambda)}\left(\frac{du^2(\lambda)}{d\lambda}-u^2(\lambda)\,\omega_j\frac{dx^j}{d\lambda}\right)\frac{dx^i}{d\lambda}.$$

ここで、接線ベクトル $u^j(\lambda):=dx^j/d\lambda$ と

$$u^2(\lambda):=g_{ij}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}.$$

以下の関係を満たすパラメータ τ を、 Weyl の 固有時と呼ぶ。

$$\frac{du^2(\tau)}{d\tau}=u^2(\tau)\omega_k\frac{dx^k}{d\tau}.$$

Outline

スカラー場 $\eta^2(\theta)$ を導入： $\eta^2(\theta) := g^{ij}(\theta) \dfrac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta^i} \dfrac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta^j}$

スカラー場 $\eta^2(\theta)$ を導入： $\eta^2(\theta) := g^{ij}(\theta) \frac{\partial\Psi(\theta)}{\partial\theta^i} \frac{\partial\Psi(\theta)}{\partial\theta^j}$

勾配流方程式 を利用して、

勾配流における $\Psi(\theta)$ の rate

$$\frac{d\Psi(\theta)}{dt} = \frac{\partial\Psi(\theta)}{\partial\theta^i} \underbrace{\frac{d\theta^i}{dt}}_{g^{ij}(\theta)\frac{\partial\Psi(\theta)}{\partial\theta^j}} = \eta^2(\theta)$$

Weyl 対称性を持つ作用積分

$$S_{gf}(x) := \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} \sqrt{\eta^2(\theta) g_{ij}(\theta) \frac{d\theta^i}{d\lambda} \frac{d\theta^j}{d\lambda}} d\lambda,$$

力学との対応：

$$\begin{aligned} x^i(\lambda) &\quad \Leftrightarrow \quad \theta^i(\lambda), \\ p_i(\lambda) &\quad \Leftrightarrow \quad \eta_i(\lambda), \\ m(x) &\quad \Leftrightarrow \quad \eta^2(\theta), \end{aligned}$$

Weyl 対称性を持つ作用積分

$$S_{gf}(x) := \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} \sqrt{\eta^2(\theta) g_{ij}(\theta) \frac{d\theta^i}{d\lambda} \frac{d\theta^j}{d\lambda}} d\lambda, = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} L\left(\theta, \frac{d\theta}{d\lambda}\right) d\lambda$$

Weyl ゲージ変換に対して不変！

$$\begin{cases} g_{ij}(\theta) \to \Omega^2(\theta)\, g_{ij}(\theta), \\ \quad \omega_k \to \omega_k + \partial_k \ln \Omega^2(\theta), \\ \eta^2(\theta) \to \eta^2(\theta)/\Omega^2(\theta). \end{cases}$$

Weyl 対称性を持つ作用積分

$$S_{gf}(x) := \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} \sqrt{\eta^2(\theta) g_{ij}(\theta) \frac{d\theta^i}{d\lambda} \frac{d\theta^j}{d\lambda}} d\lambda, = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} L\left(\theta, \frac{d\theta}{d\lambda}\right) d\lambda$$

einbein が $e(t) = 1$ となるパラメータ t を選ぶ。
$\Rightarrow \quad e(\lambda) = \frac{1}{\eta^2(\theta)} \frac{ds}{d\lambda}$ より、$\lambda = t$ とおいて $ds = \eta^2(\theta) dt$.

$$L\left(\theta, \frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{1}{2\underbrace{e(t)}_{1}} g_{ij}(\theta) \frac{d\theta^i}{dt} \frac{d\theta^j}{dt} + \frac{\overbrace{e(t)}^{1}}{2} \eta^2(\theta).$$

Weyl 対称性を持つ作用積分

$$S_{gf}(x) := \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} \sqrt{\eta^2(\theta) g_{ij}(\theta) \frac{d\theta^i}{d\lambda}\frac{d\theta^j}{d\lambda}} d\lambda, = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} L\left(\theta, \frac{d\theta}{d\lambda}\right) d\lambda$$

einbein が $e(t) = 1$ となるパラメータ t を選ぶ。
$\Rightarrow \quad e(\lambda) = \frac{1}{\eta^2(\theta)}\frac{ds}{d\lambda}$ より、$\lambda = t$ とおいて $ds = \eta^2(\theta)dt$.

$$L\left(\theta, \frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{1}{2\,\underbrace{e(t)}_{1}} g_{ij}(\theta)\frac{d\theta^i}{dt}\frac{d\theta^j}{dt} + \frac{\overbrace{e(t)}^{1}}{2}\eta^2(\theta).$$

正準運動量： $\eta_i = \dfrac{\partial L}{\partial\left(\frac{d\theta^i}{dt}\right)} = g_{ij}(\theta)\dfrac{d\theta^i}{dt}, \quad \Leftrightarrow \quad \overbrace{\dfrac{d\theta^i}{dt} = g^{ij}(\theta)\dfrac{\partial\Psi(\theta)}{\partial\theta^j}}^{\text{勾配流方程式}}$

Weyl 対称性を持つ作用積分

$$S_{gf}(x) := \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} \sqrt{\eta^2(\theta) g_{ij}(\theta) \frac{d\theta^i}{d\lambda}\frac{d\theta^j}{d\lambda}} d\lambda, = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} L\left(\theta, \frac{d\theta}{d\lambda}\right) d\lambda$$

einbein が $e(t) = 1$ となるパラメータ t を選ぶ。

$\Rightarrow \quad e(\lambda) = \frac{1}{\eta^2(\theta)}\frac{ds}{d\lambda}$ より、$\lambda = t$ とおいて $ds = \eta^2(\theta)dt$.

$$L\left(\theta, \frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{1}{2\,\underbrace{e(t)}_{1}} g_{ij}(\theta)\frac{d\theta^i}{dt}\frac{d\theta^j}{dt} + \frac{\overbrace{e(t)}^{1}}{2}\eta^2(\theta).$$

正準運動量：$\eta_i = \dfrac{\partial L}{\partial\left(\frac{d\theta^i}{dt}\right)} = g_{ij}(\theta)\dfrac{d\theta^i}{dt}, \quad \Leftrightarrow \quad \overbrace{\dfrac{d\theta^i}{dt} = g^{ij}(\theta)\dfrac{\partial\Psi(\theta)}{\partial\theta^j}}^{\text{勾配流方程式}}$

Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt}\eta_i = \frac{\partial L}{\partial\theta^i} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}(\theta)}{\partial\theta^i}\frac{d\theta^j}{dt}\frac{d\theta^k}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial\eta^2(\theta)}{\partial\theta^i}, \Leftrightarrow \frac{d\theta^k}{dt}\nabla_k^{(-1)}\frac{d\theta^i}{dt} = -\frac{d\theta^i}{dt}.$$

α-接続 $\nabla^{(\alpha)}$ と Weyl 接続 $\overset{\mathrm{w}}{\nabla}$ との関係

$\Big(g_{ij}(\theta), \omega_k = -\partial_k \ln \eta^2(\theta)\Big)$ とゲージ固定。

$$\text{Weyl 幾何の自己平行方程式：}\quad \frac{d\theta^k}{dt}\overset{\mathrm{w}}{\nabla}_k \frac{d\theta^i}{dt} = -\omega_k \frac{d\theta^k}{dt}\frac{d\theta^i}{dt}.$$

が、$\alpha = -1$ の θ-空間における準測地線方程式

$$\frac{d\theta^k}{dt}\nabla_k^{(-1)}\frac{d\theta^i}{dt} = -\frac{d\theta^i}{dt},\quad \text{と等価。}$$

α-接続 $\nabla^{(\alpha)}$ と Weyl 接続 $\overset{\mathrm{w}}{\nabla}$ との関係

$\left(g_{ij}(\theta), \omega_k = -\partial_k \ln \eta^2(\theta)\right)$ とゲージ固定。

$$\text{Weyl 幾何の自己平行方程式：}\quad \frac{d\theta^k}{dt}\overset{\mathrm{w}}{\nabla}_k \frac{d\theta^i}{dt} = -\omega_k \frac{d\theta^k}{dt}\frac{d\theta^i}{dt}.$$

が、$\alpha = -1$ の θ-空間における準測地線方程式

$$\frac{d\theta^k}{dt}\nabla^{(-1)}_k \frac{d\theta^i}{dt} = -\frac{d\theta^i}{dt},$$ と等価。

$\alpha = -1$ 接続と Weyl 接続の関係

$$\overset{\mathrm{w}}{\Gamma}{}^i{}_{jk}(\theta)\frac{d\theta^j}{dt} = \Gamma^{(-1)}{}^i{}_{jk}(\theta)\frac{d\theta^j}{dt} - \omega_k \frac{d\theta^i}{dt} - \delta^i_k$$

Weyl 幾何の枠組みから、非計量性および Weyl ゲージ場の重要性を踏まえて、情報幾何における勾配流を説明。

- α-接続： $\Gamma^{(\alpha)\,i}{}_{jk}(x) = \overbrace{\Gamma^{i}{}_{jk}(x)}^{\text{Levi-Civita}} \overbrace{-\frac{\alpha}{2}\, g^{i\ell}(\theta) C_{\ell jk}(\theta)}^{\text{disformation}}$
- $d\Psi(\theta)/dt$ を特徴づける $\eta^2(\theta)$ を導入.
- 曲線のパラメータは $e(t) = 1$ となる t.
  弧長パラメータ s との関係は、$ds = \eta^2(\theta)\, dt$.
- $\left(g_{ij}(\theta), \omega_k = -\frac{\partial}{\partial\theta^k} \ln \eta^2(\theta)\right)$ とゲージ固定.
- 自己平行方程式： $\frac{d\theta^k}{dt} \overset{\mathrm{W}}{\nabla}_k \frac{d\theta^i}{dt} = -\omega_k \frac{d\theta^k}{dt}.$