広いクラスの凸錐上のヘッセ幾何

伊師英之（名古屋大学　多元数理）

全ての等質錐は，ある条件をみたすブロック分解をもつ正定値実対称行列の集合として実現でき，これは等質錐の研究において大変便利な代数的道具立てを与える ([6, 8, 9]. 類似の結果は [2, 14, 22, 23])．一方，数理統計においては，chordal なグラフによって指定された成分がゼロであるような正定値実対称行列のなす凸錐について，等質錐と類似した興味深い結果が成り立つことが知られている ([11, 12, 15]). 我々は等質錐の行列実現の条件を緩めることによって，両者を包含する広いクラスの凸錐を定義し，それに対して種々の結果を拡張することに成功した．これは凸錐計画法の理論（[10, 13]）に対して新たに重要な例を与えることになると期待される．

等質錐の行列実現

整数 n の分割 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ をとり, 次の条件をみたすベクトル空間 $\mathcal{V}_{lk} \subset \mathrm{Mat}(n_l, n_k; \mathbb{R})$ $(1 \le k < l \le r)$ の系を考える：
(V1) $A \in \mathcal{V}_{lk} \Rightarrow A\,{}^{\mathsf{t}}\!A \in \mathbb{R} I_{n_l} \quad (1 \le k < l \le r)$,
(V2) $A \in \mathcal{V}_{lj},\ B \in \mathcal{V}_{kj} \Rightarrow A\,{}^{\mathsf{t}}\!B \in \mathcal{V}_{lk} \quad (1 \le j < k < l \le r)$,
(V3) $A \in \mathcal{V}_{lk},\ B \in \mathcal{V}_{kj} \Rightarrow AB \in \mathcal{V}_{lj} \quad (1 \le j < k < l \le r)$.
ベクトル空間 $\mathcal{Z}_{\mathcal{V}} \subset \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ を次のように定義する：

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{V}} := \left\{ X = \begin{pmatrix} X_{11} & {}^{\mathsf{t}}X_{21} & \cdots & {}^{\mathsf{t}}X_{r1} \\ X_{21} & X_{22} & & {}^{\mathsf{t}}X_{r2} \\ \vdots & & \ddots & \\ X_{r1} & X_{r2} & \cdots & X_{rr} \end{pmatrix} ;\ \begin{array}{l} X_{kk} = x_{kk} I_{n_k},\ x_{kk} \in \mathbb{R}\ (k = 1, \ldots, r) \\ X_{lk} \in \mathcal{V}_{lk}\ (1 \le k < l \le r) \end{array} \right\}.$$

ここで

$$H_{\mathcal{V}} := \left\{ T = \begin{pmatrix} T_{11} & & & \\ T_{21} & T_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ T_{r1} & T_{r2} & \cdots & T_{rr} \end{pmatrix} ;\ \begin{array}{l} T_{kk} = t_{kk} I_{n_k},\ t_{kk} > 0\ (k = 1, \ldots, r) \\ T_{lk} \in \mathcal{V}_{lk}\ (1 \le k < l \le r) \end{array} \right\}$$

とおくと, 線型リー群 $H_{\mathcal{V}} \subset GL(N, \mathbb{R})$ は $\mathcal{Z}_{\mathcal{V}} \subset \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ に $\rho(T) : \mathcal{Z}_{\mathcal{V}} \ni X \mapsto T X\,{}^{\mathsf{t}}T \in \mathcal{Z}_{\mathcal{V}} \quad (T \in H_{\mathcal{V}})$ によって作用している. しかも, この作用によって $H_{\mathcal{V}}$ は正

2016 年 9 月 12 日–13 日, ミニワークショップ「統計多様体の幾何学とその周辺 (8)」

則開凸錐 $\mathcal{P}_\mathcal{V} := \mathcal{Z}_\mathcal{V} \cap \mathrm{Sym}^+(n,\mathbb{R})$. に単純推移的に作用する．したがって $\mathcal{P}_\mathcal{V}$ は等質錐であり, **全ての等質錐は，このようにして得られる $\mathcal{P}_\mathcal{V}$ と線型同値である** ([2]). 例えば二次錐 $\left\{ x \in \mathbb{R}^n \,;\, x_1 > \sqrt{x_2^2 + \cdots + x_n^2} \right\}$ については

$$\mathcal{Z}_\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & & & x_3 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & x_1 - x_2 & x_n \\ x_3 & \cdots & x_n & x_1 - x_2 \end{pmatrix} ; x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{Sym}(n-1,\mathbb{R}),$$

とすればよく，r 次の正定値エルミート行列のなす凸錐については $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = 2$ かつ

$$\mathcal{V}_{lk} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\} \qquad (1 \le k < l \le r)$$

とすればよい．

新しいクラスの凸錐

ベクトル空間の系 $\{\mathcal{V}_{lk}\}_{1 \le k < l \le r}$ が条件 (V1), (V2) を満たすとき，$\mathcal{P}_\mathcal{V} \subset \mathcal{Z}_\mathcal{V}$ は等質錐とは限らないが，等質錐についての結果の多くが一般化できる．この新しいクラスの凸錐のなかには，グラフィカルモデルにおいて chordal なグラフに対応する対称行列の凸錐が含まれる．たとえば A_n グラフに対応する行列は三重対角行列

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_{n+1} & 0 & \ldots & 0 \\ x_{n+1} & x_2 & x_{n+2} & \ddots & \vdots \\ 0 & x_{n+2} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & x_{n-1} & x_{2n+1} \\ 0 & \ldots & 0 & x_{2n+1} & x_n \end{pmatrix}$$

であり，そのなかで正定値なもののなす凸錐は典型的な例である．

References

[1] S. A. Andersson and G. G. Wojnar, *Wishart distributions on homogeneous cones*, J. Theoret. Probab. **17** (2004), 781–818.

[2] C. B. Chua, *Relating homogeneous cones and positive definite cones via T-algebras*, SIAM J. Optim. **14** (2003), 500–506.

[3] J. Faraut and A. Korányi, “Analysis on symmetric cones,” Clarendon Press, Oxford, 1994.

[4] S. G. Gindikin, *Analysis in homogeneous domains*, Russian Math. Surveys **19** (1964), 1–89.

[5] O. Güler and L. Tunçel, *Characterization of the barrier parameter of homogeneous convex cones*, Math. Program. A **81** (1998), 55–76.

[6] H. Ishi, *On symplectic representations of normal j-algebras and their application to Xu's realizations of Siegel domains*, Differ. Geom. Appl. **24** (2006), 588–612.

[7] —, *On a class of homogeneous cones consisting of real symmetric matrices*, Josai Mathematical Monograph **6** (2013), 71–80.

[8] —, "Homogeneous cones and their applications to statistics", in Modern methods of multivariate statistics, Travaux en Cours **82**, pp. 135–154, Hermann, 2014.

[9] —, "Matrix realization of homogeneous cones", in Lecture Notes of Computer Science **9389**, pp. 248–256, Springer, 2015.

[10] 小島政和, 土谷隆, 水野眞治, 矢部博, "内点法", 東京, 朝倉書店, 2001.

[11] S. L. Lauritzen, "Graphical models," Clarendon Press, Oxford, 1996.

[12] G. Letac and H. Massam, *Wishart distributions for decomposable graphs*, The Annals of Statistics **35** (2007), 1278–1323.

[13] Y. Nesterov and A. Nemirovskii, "Interior-point polynomial algorithms in convex programming," SIAM Studies in Applied Mathematics **13**, SIAM, Philadelphia, 1994.

[14] O. S. Rothaus, *The construction of homogeneous convex cones*, Ann. of Math. **83** , 358–376, Correction: ibid **87** (1968), 399.

[15] A. Roverato, *Cholesky decomposition of a hyper inverse Wishart matrix*, Biometrika **87** (2000), 99–112.

[16] H. Shima, *Homogeneous Hessian martifolls*, Ann. Jnst. Fourier, Grenoble **30** (1980), 91–128.

[17] —, "ヘッセ幾何学", 裳華房, 東京, 2001.

[18] V. A. Truong and L. Tunçel, *Geometry of homogeneous convex cones, duality mapping, and optimal self-concordant barriers*, Math. Program. **100** (2004), 295–316.

[19] 土屋隆, 笹川卓, ２次錐計画問題による磁気シールドのロバスト最適化, 統計数理 **53** (2005), 297–315.

[20] L. Tunçe and S. Xu, *On homogeneous convex cones, the Caratheodory number, and the duality mapping* Math. Oper. Res. **26** (2001), 234–247.

[21] E. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc. **12** (1963), 340–403.

[22] Y. C. Xu, "Theory of complex homogeneous bounded domains," Kluwer, Dordrecht, 2005.

[23] TT. Yamasaki and T. Nomura, *Realization of homogeneous cones through oriented graphs*, Kyushu J. Math., **69** (2015), 11–48.