τ-情報幾何学

未完成，未推敲の暫定版 *

田中　勝

福岡大学理学部応用数学科

作成日：2015 年 6 月 24 日

変更日：2015 年 9 月 2 日

目次

* 朝倉書店に専門的過ぎるということで出版を断られた版です.

1 アファイン空間と測度空間

1.1 アファイン空間

集合 X とベクトル空間 U に対して，以下のような性質をもつ写像 “$\dotplus$”を考える：

$$\dotplus : X \times U \to X : (x, u) \mapsto x \dotplus u \tag{1}$$

写像“$\dotplus$”の性質（平行移動）

性質 1. 集合 X の任意の元 x とベクトル空間 V の任意のベクトル u_1 と u_2 に対して

$$(x \dotplus u_1) \dotplus u_2 = x \dotplus (u_1 + u_2) \tag{2}$$

ここで，$u_1 + u_2$ はベクトル空間 U における通常のベクトルの和である．

性質 2. 集合 X の任意の 2 つの元 x_1 と x_2 に対して，

$$x_2 = x_1 \dotplus u \tag{3}$$

となるようなベクトル空間 U の元 u が一意に存在する．

このとき，写像“$\dotplus$”を平行移動とよび，3 つ組 $(X, U, \dotplus)$ をアファイン空間[*1]という．つまり，集合 X について，ベクトル空間 U の元は集合 X の元の平行移動量を与え，写像“$\dotplus$”は集合 X の元をベクトル空間 U の元を用いてどのように平行移動するかを決定している．平行移動後の元は，もちろん集合 X の元になっている．

アファイン空間は平坦であり，アファイン座標系とよばれる特別な座標系が存在する．集合 X の任意の元 x_0 を一つ選んだとき，X の元はすべて x_0 を適当な量だけ平行移動することで得られるので，集合 X の元は平行移動量 $u \in U$ と同一視することができる．このとき，x_0 を原点とよび，O と表すこともある．平行移動量を表すベクトルから構成されるベクトル空間 U の次元が有限で r のとき，U の任意の元 u は

$$u = \theta^1 u_1 + \theta^2 u_2 + \cdots + \theta^r u_r \tag{4}$$

のように線形独立な r 個の基底ベクトルを用いて表すことができる．このときの係数 $\left\{\theta^i\right\}_{i=1}^r$ は，u ごとに一意に決まるので，$\left(\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r\right)$ は u の座標と考えることができ，これをアファイン座標系とよぶ．つまり，アファイン座標系とは，アファイン空間のターゲット空間 X の元の中から原点 O にしたい元 x_0 を一つ選び，X の各元 x と原点 O により決まるベクトル空間 U の元 $u(x_0, x)$ とを同一視することで得られる X と U の間の全単射写像に基づいて定義される関数 $\theta^i = \theta^i(x_0, u)$，$(i = 1, 2, \ldots, r)$ のコレクションのことである:

$$u = \theta^1(x_0, u)\, u_1 + \theta^2(x_0, u)\, u_2 + \cdots + \theta^r(x_0, u)\, u_r \tag{5}$$

[*1] 単に X をアファイン空間ということもある．

次に，アファイン部分空間を定義する．まず，アファイン空間 $(X, U, +)$ が与えられたとき，X の部分集合 $Y \subset X$ について考える．この部分集合 Y が，ベクトル空間 U の部分空間 $V \subset U$ による平行移動 “$+$”について閉じているとき，3 つ組 $(Y, V, +)$ をアファイン部分空間[*2]という．

1.2 平行移動

アファイン空間とアファイン部分空間の定義に現れる平行移動 “$+$”は，性質 1 と性質 2 をもつことが要求されているだけなので，これら二つの性質を満たすような写像であれば，平行移動と考えても構わないことになる．そこで，X と U を適当な関数空間[*3]とし，平行移動 “$+$”として次のような写像[*4]を考えてみる：

$$e_\tau : X \times U \to X : (x, u) \mapsto \exp_\tau(u) \otimes_\tau x \tag{6}$$

ただし，$\tau \in \mathbb{R}$ で，$\exp_\tau(u)$ は τ-指数関数を表し，

$$\exp_\tau(u) = \{1 + (1-\tau)\,u\}^{\frac{1}{1-\tau}} \tag{7}$$

$$\lim_{\tau \to 1} \exp_\tau(u) = \lim_{\tau \to 1} \{1 + (1-\tau)\,u\}^{\frac{1}{1-\tau}} = e^u \tag{8}$$

であり，$f \otimes_\tau g$ は τ-積を表し，

$$f \otimes_\tau g = \left(f^{1-\tau} + g^{1-\tau} - 1\right)^{\frac{1}{1-\tau}} \tag{9}$$

のように定義される．また，式 (16) を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \to 1} f \otimes_\tau g &= \lim_{\tau \to 1} \left(f^{1-\tau} + g^{1-\tau} - 1\right)^{\frac{1}{1-\tau}} \\ &= \lim_{\tau \to 1} \left(1 + (1-\tau)\{\ln_\tau(f) + \ln_\tau(g)\}\right)^{\frac{1}{1-\tau}} \\ &= e^{\log(f)+\log(g)} = fg\end{aligned} \tag{10}$$

[*2] 単に Y をアファイン部分空間ということもある．

[*3] τ-指数関数と τ-対数関数がうまく定義できるような関数空間を考える．

[*4] 次の式がうまく定義できるような状況を考える：$\exp_\tau(u) \otimes_\tau x = \left\{x^{1-\tau} + (1-\tau)\,u\right\}^{\frac{1}{1-\tau}}$

である．τ-積 $\otimes_\tau$ は，次のように結合則を満たす：

$$\begin{aligned}(f \otimes_\tau g) \otimes_\tau h &= \left\{\left(f^{1-\tau} + g^{1-\tau} - 1\right)^{\frac{1}{1-\tau}}\right\} \otimes_\tau h \\ &= \left\{\left(f^{1-\tau} + g^{1-\tau} - 1\right) + h^{1-\tau} - 1\right\}^{\frac{1}{1-\tau}} \\ &= \left\{f^{1-\tau} + \left(g^{1-\tau} + h^{1-\tau} - 1\right) - 1\right\}^{\frac{1}{1-\tau}} \\ &= f \otimes_\tau \left\{g^{1-\tau} + h^{1-\tau} - 1\right\}^{\frac{1}{1-\tau}} \\ &= f \otimes_\tau (g \otimes_\tau h) \end{aligned} \tag{11}$$

この写像 e_τ が性質 1 を満たすことを示そう．そのために，まず，次の関係式が成り立つことを示す：

$$\exp_\tau(u_2) \otimes_\tau \exp_\tau(u_1) = \exp_\tau(u_2 + u_1) \tag{12}$$

これは，左辺を展開して整理すると

$$\begin{aligned}\exp_\tau(u_2) \otimes_\tau \exp_\tau(u_1) &= \{1 + (1-\tau)\, u_2\}^{\frac{1}{1-\tau}} \otimes_\tau \{1 + (1-\tau)\, u_1\}^{\frac{1}{1-\tau}} \\ &= [\{1 + (1-\tau)\, u_2\} + \{1 + (1-\tau)\, u_1\} - 1]^{\frac{1}{1-\tau}} \\ &= \{1 + (1-\tau)\, (u_2 + u_1)\}^{\frac{1}{1-\tau}} \\ &= \exp_\tau(u_2 + u_1) \end{aligned} \tag{13}$$

のようになるので，成立することがわかる．この関係式を利用することで，写像 e_τ は性質 1 を満たすことが次のように示される：

$$\begin{aligned}e_\tau(e_\tau(x, u_1)\,, u_2) &= e_\tau(\exp_\tau(u_1) \otimes_\tau x, u_2) \\ &= \exp_\tau(u_2) \otimes_\tau (\exp_\tau(u_1) \otimes_\tau x) \\ &= (\exp_\tau(u_2) \otimes_\tau \exp_\tau(u_1)) \otimes_\tau x \\ &= \exp_\tau(u_2 + u_1) \otimes_\tau x \\ &= e_\tau(x, u_2 + u_1) \end{aligned} \tag{14}$$

次に，写像 e_τ が性質 2 を満たすことを示そう．そのために，次のような τ-指数関数の

逆関数としての τ-対数関数と τ-商を定義する：

$$\ln_\tau(x) = \frac{1}{1-\tau}\left(x^{1-\tau}-1\right) \tag{15}$$

$$\lim_{\tau\to 1}\ln_\tau(x) = \lim_{\tau\to 1}\frac{1}{1-\tau}\left(x^{1-\tau}-1\right) = \log(x) \tag{16}$$

$$f \oslash_\tau g = \left(f^{1-\tau} - g^{1-\tau} + 1\right)^{\frac{1}{1-\tau}} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\tau\to 1} f \oslash_\tau g &= \lim_{\tau\to 1}\left(f^{1-\tau} - g^{1-\tau} + 1\right)^{\frac{1}{1-\tau}} \\ &= \lim_{\tau\to 1}\left(1 + (1-\tau)\left\{\ln_\tau(f) - \ln_\tau(g)\right\}\right)^{\frac{1}{1-\tau}} \\ &= e^{\log(f)-\log(g)} = \frac{f}{g}\end{aligned} \tag{18}$$

まず，X の任意の 2 つの元 x_1 と x_2 に対して，$\ln_\tau(x_2 \oslash_\tau x_1) \in U$ を考えると

$$\begin{aligned}e_\tau(x_1, \ln_\tau(x_2 \oslash_\tau x_1)) &= \exp_\tau\{\ln_\tau(x_2 \oslash_\tau x_1)\} \otimes_\tau x_1 \\ &= (x_2 \oslash_\tau x_1) \otimes_\tau x_1 \\ &= \left(x_2^{1-\tau} - x_1^{1-\tau} + 1\right)^{\frac{1}{1-\tau}} \otimes_\tau x_1 \\ &= \left\{\left(x_2^{1-\tau} - x_1^{1-\tau} + 1\right) + x_1^{1-\tau} - 1\right\}^{\frac{1}{1-\tau}} \\ &= x_2\end{aligned} \tag{19}$$

のようになり，x_1 と x_2 を与えれば一意に決まる量であることがわかる．したがって，写像 e_τ が性質 2 を満たすことが示された．つまり，写像 e_τ は平行移動であることが示された．平行移動が写像 e_τ で定義されていることを τ-アファイン構造とよぶことにする．

τ-積，τ-商と τ-拡張型関数（代表的な性質）

- τ-積：

$$f \otimes_\tau g = \left(f^{1-\tau} + g^{1-\tau} - 1\right)^{\frac{1}{1-\tau}} \tag{20}$$

これは次の関係を満たす：

$$f \otimes_\tau g = g \otimes_\tau f \tag{21}$$

$$(f \otimes_\tau g) \otimes_\tau h = f \otimes_\tau (g \otimes_\tau h) \tag{22}$$

特に，τ-積の単位元は 1 である：

$$f \otimes_\tau 1 = f \tag{23}$$

- τ-商：

$$f \oslash_\tau g = \left(f^{1-\tau} - g^{1-\tau} + 1\right)^{\frac{1}{1-\tau}} \tag{24}$$

これは次の関係を満たす：

$$(f \oslash_\tau g) \oslash_\tau h = (f \oslash_\tau h) \oslash_\tau g = f \oslash_\tau (g \otimes_\tau h) \tag{25}$$

特に $\tau \neq 1$ のとき，0 による除算を τ-商を用いて定義することができる：

$$f \oslash_\tau 0 = \left(f^{1-\tau} + 1\right)^{\frac{1}{1-\tau}} \tag{26}$$

- τ-指数関数：

$$\exp_\tau(u) = \{1 + (1-\tau)\, u\}^{\frac{1}{1-\tau}} \tag{27}$$

これは次の関係を満たす：

$$\exp_\tau(u_2) \otimes_\tau \exp_\tau(u_1) = \exp_\tau(u_2 + u_1) \tag{28}$$

$$\exp_\tau(u_2) \oslash_\tau \exp_\tau(u_1) = \exp_\tau(u_2 - u_1) \tag{29}$$

- τ-対数関数：

$$\ln_\tau(x) = \frac{1}{1-\tau}\left(x^{1-\tau} - 1\right) \tag{30}$$

これは次の関係を満たす：

$$\ln_\tau(u_2 \otimes_\tau u_1) = \ln_\tau(u_2) + \ln_\tau(u_1) \tag{31}$$

$$\ln_\tau(u_2 \oslash_\tau u_1) = \ln_\tau(u_2) - \ln_\tau(u_1) \tag{32}$$

τ-指数関数と τ-対数関数，τ-指数関数の特殊な性質

- τ-指数関数と τ-対数関数は互いに逆関数の関係にある：

$$\ln_\tau(\exp_\tau(u)) = \exp_\tau(\ln_\tau(u)) = u \tag{33}$$

- 通常の積に対しては τ-対数関数は二種類の表現をもつ：

$$\ln_\tau(u_1 u_2) = u_2^{1-\tau}\ln_\tau(u_1) + u_1^{1-\tau}\ln_\tau(u_2) - (1-\tau)\ln_\tau(u_1)\ln_\tau(u_2) \tag{34}$$

$$\ln_\tau(u_1 u_2) = \ln_\tau(u_1) + \ln_\tau(u_2) + (1-\tau)\ln_\tau(u_1)\ln_\tau(u_2) \tag{35}$$

1.3 測度空間

全体集合を Ω とし，Ω 上の σ-集合体[*5]を $\mathcal{F}$ とする．これらの組で構成される可測空間 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上で定義される非負有限測度の集合 $\mathcal{M}$[*6]を零集合により同値類に分割したときの類の一つを $\mathcal{M}_0$ とする．また，Ω 上の可測関数（確率変数）から成る線形空間を $\mathcal{R}_\Omega$ とする．このとき，三つ組 $(\mathcal{M}_0,\mathcal{R}_\Omega,e_\tau)$[*7]は，$\tau$-アファイン構造をもつ，すなわち τ-アファイン空間である．以下では，このことを証明していく．

まず，測度空間 $(\Omega,\mathcal{F},m)$（ただし，$m\in\mathcal{M}_0$）において，任意の非負可測関数 f と $A\in\mathcal{F}$ が与えられたとき，集合関数 $m_f:\mathcal{F}\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ を，

$$m_f(A) = \int_A f(\omega)\ \mathrm{d}m(\omega) \tag{36}$$

で定義すれば，$(\Omega,\mathcal{F},m_f)$ は測度空間となり，$m_f\in\mathcal{M}_0$ であることに注意する．以後，$\Omega=\mathbb{R}$ として考えていくので，このことを

$$\mathrm{d}m_f(x) = f(x)\,\mathrm{d}m(x) \tag{37}$$

のように表すことにする．任意の非負可測関数 $f(x)$ に対して，$g(x)\in\mathcal{R}_\Omega$ が唯一つ存在

---

*5 Ω が $\mathbb{R}$ のとき，$\mathbb{R}$ のすべての区間を含む最小の σ-加法族（σ-集合体）$\mathcal{F}$ を，ボレル集合族（ボレル集合体）$\mathcal{B}$ という．以後，$\Omega=\mathbb{R}$ として考えていくが，他のパラメータなどの取り得る値の範囲も $\mathbb{R}$ と表記されることがあるので，明確にするために Ω を使用する．

*6 $\mathcal{M}$ の任意の元 m は $^\forall A\in\mathcal{F}$ に対して $0\le m(A)$ であり，$m(\Omega)<\infty$（有限）である．また，測度空間 $(\Omega,\mathcal{F},m)$ は，σ-有限であるものとする．σ-有限とは，Ω が有限測度をもつ可測集合の可算和で表されることをいう．

*7 $X=\mathcal{M}_0$，$U=\mathcal{R}_\Omega$，$+\!\!\!+ = e_\tau$ のように割り当てる．

して，
$$f(x) = \exp_\tau(g(x)) \tag{38}$$
と表すことができるので，
$$\mathrm{d}m_f(x) = \exp_\tau(g(x))\,\mathrm{d}m(x) \tag{39}$$
とも書ける．このとき，
$$\mathrm{d}m_f(x) = \exp_\tau(g(x))\,\mathrm{d}m(x) = \{\exp_\tau(g(x)) \otimes_\tau 1\}\,\mathrm{d}m(x) \tag{40}$$
なので，
$$\exp_\tau(g(x)) \otimes_\tau \mathrm{d}m(x) := \{\exp_\tau(g(x)) \otimes_\tau 1\}\,\mathrm{d}m(x) \tag{41}$$
と定義[*8]すれば，
$$\mathrm{d}m_f(x) = \exp_\tau(g(x)) \otimes_\tau \mathrm{d}m(x) = e_\tau(\mathrm{d}m(x)\,, g(x)) \tag{42}$$
となり，$\mathrm{d}m_f(x)$ は $\mathrm{d}m(x)$ を $g(x)$ だけ e_τ で平行移動したものになっている．そこで，$\mathcal{M}_0$ 上での $\mathcal{R}_\Omega$ の元による e_τ で定められる平行移動が，実際に性質 1 と性質 2 を満たすことを確認する．

まず，性質 1 については，e_τ 自身がもつ性質（式 (14)）により，満たされていることがわかる．また，性質 2 については，$\mathcal{M}_0$ が零集合により同値類に分割された一つの類であることから，$\mathcal{M}_0$ の任意の二つの測度は互いに絶対連続[*9]になっている．したがって，Radon-Nikodym の定理[*10][2] により性質 2 が満たされることが保証される：

Radon-Nikodym の定理

σ-有限な測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, m_1)$ と，可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上に $m_2 \ll m_1$（m_1 に関して絶対連続）であるような有限な測度 m_2 が与えられたとき，可積分な Radon-Nikodym 導関数 $\dfrac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}m_1}$ が存在し，それは m_1-零集合上での違いを除いて一意である．

[*8] $\exp_\tau(g(x))$ は非負可測関数であり，$\mathrm{d}m(x)$ は測度であることに注意する．

[*9] 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の二つの測度 $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ が与えられたとき，測度 m_2 が測度 m_1 に関して絶対連続 $m_2 \ll m_1$ とは，m_1-零集合 A に対して，$m_2(A) = 0$ となることをいう．

[*10] 測度 m_1 と m_2 は共に $\mathcal{M}_0$ から選ばれるので有限な測度である．そのため，Radon-Nikodym の定理はもう少し強い仮定，すなわち，どちらも有限測度の場合に成立するもので実際には構わない．

以上のことから，三つ組 $(\mathcal{M}_0, \mathcal{R}_\Omega, e_\tau)$ は，τ-アファイン構造をもつことが示された．すなわち，τ-アファイン空間になっていることが示された．

さて，$\mathcal{M}_0$ の任意の元 $\mathrm{d}m(x)$ は，Radon-Nikodym の定理より，適当なルベーグ測度を用いることで，Radon-Nikodym 導関数を $p(x)$ とすれば

$$\mathrm{d}m(x) = p(x)\,\mathrm{d}x \tag{43}$$

のように表すことができるので，今後はこの表現で考えていくことにする．

このとき，τ-アファイン空間 $(\mathcal{M}_0, \mathcal{R}_\Omega, e_\tau)$ に対するアファイン座標系は，原点を $p_0(x)\,\mathrm{d}x$ とするとき，

$$\begin{aligned}
p(x)\,\mathrm{d}x &= e_\tau(p_0(x)\,\mathrm{d}x, g(x)) \\
&= \{\exp_\tau(g(x)) \otimes_\tau p_0(x)\}\,\mathrm{d}x \\
&= \{\exp_\tau(g(x)) \otimes_\tau \exp_\tau(\ln_\tau(p_0(x)))\}\,\mathrm{d}x \\
&= \exp_\tau(g(x) + \ln_\tau(p_0(x)))\,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{44}$$

なので，$g(x)$ を $\mathcal{R}_\Omega$ の基底で展開したときの展開係数のコレクションとして得ることができる．そこで，平行移動量を取り出す写像 l_τ を次のように定義[*11]する：

$$l_\tau\big|_{\mathrm{d}m_0} : \mathcal{M}_0 \to \mathcal{R}_\Omega : p(x)\,\mathrm{d}x \mapsto g(x) + \ln_\tau(p_0(x)) \tag{45}$$

この写像 $l_\tau\big|_{\mathrm{d}m_0}$ は，原点として選んだ測度 $p_0(x)\,\mathrm{d}x$ に非負可測関数 $\exp_\tau(g(x))$ を掛けることで得られる測度 $p(x)\,\mathrm{d}x$ から，非負可測関数を決定している $g(x)$ を取り出している．つまり，τ-アファイン空間 $(\mathcal{M}_0, \mathcal{R}_\Omega, e_\tau)$ の原点 $p_0(x)\,\mathrm{d}x$ が既知のとき，非負可測関数 $\exp_\tau(g(x))$ から $g(x)$ を次のように求めていると考えてよい：

$$\ln_\tau(p(x)) = \ln_\tau(\exp_\tau(g(x) + \ln_\tau(p_0(x)))) = g(x) + \ln_\tau(p_0(x)) \tag{46}$$

この表現では “より平行移動らしい”[*12]印象を得ることができる．

今後は，記述を簡単にするために $f(x)$ を f のように表すこともある．また，以下のように，これまでの記法と混ぜて簡単に表すこともある：

$$\ln_\tau p = g(x) + \ln_\tau p_0 \tag{47}$$

さて，これまでは σ-有限な測度空間について考えてきたが，$m(\Omega)$ が有限の値をとるので，この値で割ることで常に全体集合 Ω に対しては $m(\Omega) = 1$ とできる．つまり，これ

[*11] 平行移動させるためには始点を指定する必要があることに注意する．

[*12] 通常の加法で表されているということ．

までの議論を up to scale[*13]で考えれば，確率測度からなる集合[*14]を $\mathcal{P}$ として，τ-アファイン空間 $(\mathcal{P}, \mathcal{R}_\Omega, e_\tau)$ についての議論として考えることができる．ここで注意しなければならないことは，一般に τ-アファイン構造は平行移動の下で測度を保存しないということである．つまり，平行移動すれば測度は常に変化するものと考えておかなければならない．そこで，up to scale で考えるという消極的な立場を捨て，積極的な立場をとることにする．すなわち，測度を変化させる平行移動の向きを新たに追加することで，平行移動の下での測度の変化を，追加された座標軸上での座標の変化として考えることにする：$\mathbb{R}_+$ を正の実数の集合として

$$(\mathcal{M}_0, \mathcal{R}_\Omega, e_\tau) \simeq (\mathcal{P} \times \mathbb{R}_+, \mathcal{R}_\Omega, e_\tau) \tag{48}$$

実は，この構造こそが，アファイン微分幾何学やヘッセ幾何学との密接な関係を作り出しているのである．

2 接空間と双対性

2.1 τ-対数尤度

データが与えられたとき，そのデータの背後に存在するはずの確率分布[*15]を，得られたデータに基づいて推定するという統計的推定問題においては尤度[*16]の評価が重要となる．背後に存在するはずの確率分布のモデルとして，パラメトリックな分布[*17]$P\big(X; \theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r\big)$ を選択しよう．このとき，i.i.d.[*18]サンプル $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$

[*13] 要するに，$m(\Omega)$ の値が有限であれば 1 であるとみなすということ．

[*14] $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_0$ であることに注意．また，$p \in \mathcal{P}$ のとき，確率空間は三つ組 $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ で与えられる．

[*15] データがなぜ得られたのかという問いに，そのデータが得られる確率が最大だったからと答える．そのために存在が仮定されるのが，データが従っているはずの背後の確率分布である．これが尤度を最大にするように確率分布を推定しようという最尤推定の考え方であり，言わば確率的世界観とでもいう立場に基づいている．

[*16] 「ゆうど」と読む．「尤」という字は，パソコンなどでは「もっともらしい」と入力して漢字に変換するとよい．

[*17] θ^i の添え字 i は，べき指数ではなく，単にパラメータ θ を区別するための添え字である．上付き添え字なのでべき指数と混乱しないように，θ^i を 2 乗するときには $\big(\theta^i\big)^2$ のように表す．

[*18] i.i.d. とは，independent and identically distributed の頭文字を並べたもので，独立に同一の分布に従うことを表している．

に対するパラメータの尤度 $L\bigl(\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r\bigr)$ [*19] は，

$$L\bigl(\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r\bigr) = \prod_{i=1}^{N} P\bigl(x_i; \theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r\bigr) \tag{49}$$

で与えられる．サンプル全体に対する尤度 $L\bigl(\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r\bigr)$ は，サンプル内の要素一つ一つに対応した尤度 $P\bigl(x_i; \theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r\bigr)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ の積で表される．この尤度が最大となるようにパラメータの値を決定することが最尤推定であるが，そのためには，$L\bigl(\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r\bigr)$ の極大値を求めることが要求される．つまり，$L\bigl(\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r\bigr)$ をパラメータ θ^k $(k = 1, 2, \ldots, r)$ で偏微分して得られた r 個の偏導関数をすべて 0 とおき，それらから構成される連立方程式を解くことになる．ところが，尤度 $L\bigl(\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r\bigr)$ は N 個の尤度 $P\bigl(x_i; \theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r\bigr)$ の積になっているので，偏微分してその結果をまとめるのは面倒である．そこで，以下のように $L\bigl(\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r\bigr)$ の対数をとると，大小関係を変えずに積を和に直すことができ，偏微分して結果をまとめることが容易になる：

$$\log L\bigl(\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r\bigr) = \sum_{i=1}^{N} \log P\bigl(x_i; \theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r\bigr) \tag{50}$$

この $\log L\bigl(\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r\bigr)$ を対数尤度とよぶ．このサンプル全体に対する対数尤度は，サンプル内の要素一つ一つに対応した対数尤度 $\log P\bigl(x_i; \theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r\bigr)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ の和で表されているため取り扱いが容易になっている[*20]．

このように統計的推定に有用な対数尤度を，τ-アファイン空間 $(\mathcal{M}_0, \mathcal{R}_\Omega, e_\tau)$ 上に式 (47) により定義する．つまり，τ-対数尤度を平行移動量として次のように定義する：

$$\overset{\tau}{\ell} = \overset{\tau}{\ell}(p) = \ln_\tau p = g(x) + \ln_\tau p_0 \tag{51}$$

元々，統計的推定問題などでは，パラメトリックな場合にはモデルとして選んだ分布のパラメータ推定やノンパラメトリックな場合には分布そのものの推定などを行うとき，データの背後に存在するはずの真の分布からモデルとして選択した確率分布もしくは推定

[*19] 初学者は，確率分布と同じ式がパラメータの尤度として現れることに戸惑うことがあるようだ．$P\bigl(X; \theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r\bigr)$ を，確率変数 X の関数としてみるとき確率分布とよび，パラメータ $\bigl\{\theta^i\bigr\}_{i=1}^{r}$ の関数としてみるとき尤度とよぶ．つまり，変数として何を選ぶかに応じて名前を変える関数と思えばよいのである．

[*20] ここまでの尤度と対数尤度に関する議論は，積を τ-積に，対数関数を τ-対数関数に置き換えることで，そのまま成立させることができる．積を τ-積に拡張したことで，独立性の概念が拡張されたのではないかと考えたくなるが，物事の依存関係を τ-積で指定したと考えるべきである．つまり，積を τ-積へ拡張することは，従属性が τ-積で表されるようなものを選択したと考えるべきである．

された分布がどの程度離れているのかを評価し，それを最小にするようにパラメータや分布を推定する．τ-対数尤度は，原点に選んだ分布からモデルや推定された分布がどの程度離れているのかを τ-アファイン構造に基づいて評価しているので，対数尤度の対応物として相応しいものであると期待できる．

τ-アファイン空間 $(\mathcal{M}_0, \mathcal{R}_\Omega, e_\tau)$ を考えているので，$\mathcal{R}_\Omega$ から有限個の基底を選び，それらで張られているような部分空間を考えれば，その部分空間上に自然な座標系としてアファイン座標系を導入することができる．そこで，$\mathcal{P}$ の部分集合であるパラメトリックな確率分布の集合 $\check{\mathcal{P}}$ と $\mathcal{R}_\Omega$ の線形部分空間 $U_\Omega^{r+1}\big(\check{\mathcal{P}}\big)$ から構成される τ-アファイン部分空間 $\big(\check{\mathcal{P}} \times \mathbb{R}_+, U_\Omega^{r+1}\big(\check{\mathcal{P}}\big), e_\tau\big)$ について考えていく：

$$U_\Omega^{r+1}\big(\check{\mathcal{P}}\big) = \big\{g(x)\,\big|g(x) = \theta^0 \check{p}_0^{1-\tau} + \theta^1 x + \theta^2 x^2 + \cdots + \theta^r x^r,\ \check{p}_0 \in \check{\mathcal{P}}\big\} \tag{52}$$

ここで，x^i の上付き添え字 i はべき指数である[*21]．また，非負可測関数 $\check{p}_0$（確率密度関数）のべき乗が登場する理由は，以下のように τ-積を通常の積で書き直したとき，単純なスケール変換になるようにするためである．このとき，

$$\begin{aligned}
p &= \exp_\tau\left(\theta^0 \check{p}_0^{1-\tau} + \sum_{k=1}^{r} \theta^i x^i\right) \otimes_\tau \check{p}_0 \\
&= \exp_\tau\big(\theta^0 \check{p}_0^{1-\tau}\big) \otimes_\tau \exp_\tau\left(\sum_{k=1}^{r} \theta^i x^i\right) \otimes_\tau \check{p}_0 \\
&= \exp_\tau\left(\sum_{k=1}^{r} \theta^i x^i\right) \otimes_\tau \big\{\exp_\tau\big(\theta^0 \check{p}_0^{1-\tau}\big) \otimes_\tau \check{p}_0\big\} \\
&= \exp_\tau\left(\sum_{k=1}^{r} \theta^i x^i\right) \otimes_\tau \Big[\big\{1 + (1-\tau)\,\theta^0 \check{p}_0^{1-\tau}\big\}^{\frac{1}{1-\tau}} \otimes_\tau \check{p}_0\Big] \\
&= \exp_\tau\left(\sum_{k=1}^{r} \theta^i x^i\right) \otimes_\tau \big\{\check{p}_0^{1-\tau} + (1-\tau)\,\theta^0 \check{p}_0^{1-\tau}\big\}^{\frac{1}{1-\tau}} \\
&= \exp_\tau\left(\sum_{k=1}^{r} \theta^i x^i\right) \otimes_\tau \big\{1 + (1-\tau)\,\theta^0\big\}^{\frac{1}{1-\tau}}\, \check{p}_0 \\
&= \exp_\tau\left(\sum_{k=1}^{r} \theta^i x^i\right) \otimes_\tau \exp_\tau\big(\theta^0\big)\, \check{p}_0
\end{aligned} \tag{53}$$

[*21] 統計的には，このように書けるということは，i.i.d サンプルが与えられたとき，各 x^i は対応するアファイン座標 θ^i の十分統計量になっていることを意味している．

のようになるので，$\theta^0 \check{p}_0^{1-\tau}$ の部分が，測度の変化を表すために追加された 1 次元空間の座標になっていることがわかる．

そこで，

$$N_\tau\bigl(\check{\mathcal{P}}\bigr) = \left\{\theta^0 \check{p}_0^{1-\tau} \middle| \theta^0 \in \mathbb{R},\ \check{p}_0 \in \check{\mathcal{P}}\right\} \tag{54}$$

とし，

$$V_\Omega^r = \left\{g(x) \,\middle|\, g(x) = \theta^1 x + \theta^2 x^2 + \cdots + \theta^r x^r\right\} \subset \mathcal{R}_\Omega \tag{55}$$

とすれば，

$$U_\Omega^{r+1}\bigl(\check{\mathcal{P}}\bigr) = N_\tau\bigl(\check{\mathcal{P}}\bigr) \oplus V_\Omega^r \tag{56}$$

のように表すことができ，

$$V_\Omega^r \cap N_\tau\bigl(\check{\mathcal{P}}\bigr) = \{0\} \tag{57}$$

である．

さて，ここで $\check{\mathcal{P}}$ の点を V_Ω^r の元で平行移動して得られる点が，再び $\check{\mathcal{P}}$ の点になるように $\check{\mathcal{P}}$ へ射影することを考える．

まず，τ-指数関数に関する以下の性質に注目する．

τ-指数関数の特殊な性質

$$\frac{1}{C}\exp_\tau(g(x)) = \exp_\tau\Bigl(C^{-(1-\tau)}\left(g(x) - \ln_\tau C\right)\Bigr) \tag{58}$$

このとき，

$$\int \exp_\tau\left(\sum_{i=1}^r \theta^i x^i\right) \otimes_\tau \check{p}_0 \,\mathrm{d}x = C \tag{59}$$

とすれば，

$$\begin{aligned}
\check{p} &= \frac{1}{C}\left\{\exp_\tau\left(\sum_{i=1}^r \theta^i x^i\right) \otimes_\tau \check{p}_0\right\} \\
&= \frac{1}{C}\exp_\tau\left(\sum_{i=1}^r \theta^i x^i + \ln_\tau \check{p}_0\right) \\
&= \exp_\tau\left(C^{-(1-\tau)}\left(\left(\sum_{i=1}^r \theta^i x^i + \ln_\tau \check{p}_0\right) - \ln_\tau C\right)\right) \\
&= \exp_\tau\left(C^{-(1-\tau)}\left(\sum_{i=1}^r \theta^i x^i - \psi_\tau\bigl(\theta^1, \ldots, \theta^r\bigr) + \ln_\tau \check{p}_0\right)\right)
\end{aligned} \tag{60}$$

となる．ただし，

$$\psi_\tau\bigl(\theta^1,\ldots,\theta^r\bigr)=\ln_\tau\left(\int\exp_\tau\left(\sum_{i=1}^r\theta^i x^i\right)\otimes_\tau \check{p}_0\,\mathrm{d}x\right)=\ln_\tau C \tag{61}$$

である．さらに，引き続き $N_\tau\bigl(\check{\mathcal{P}}\bigr)$ の元で平行移動すると，

$$\begin{aligned}
p&=\exp_\tau\bigl(\theta^0\check{p}^{1-\tau}\bigr)\otimes_\tau\exp_\tau\left(C^{-(1-\tau)}\left(\sum_{i=1}^r\theta^i x^i-\psi_\tau+\ln_\tau\check{p}_0\right)\right)\\
&=\exp_\tau\left(\theta^0\check{p}^{1-\tau}+C^{-(1-\tau)}\left(\sum_{i=1}^r\theta^i x^i-\psi_\tau+\ln_\tau\check{p}_0\right)\right)\\
&=\exp_\tau\bigl(\theta^0\bigr)\,\check{p}
\end{aligned}\tag{62}$$

となる．また，$U_\Omega^{r+1}\bigl(\check{\mathcal{P}}\bigr)$ の元で平行移動した後，定数倍した場合には，

$$\begin{aligned}
p&=\frac{1}{B}\left(\exp_\tau\bigl(\theta^0\check{p}_0^{1-\tau}\bigr)\otimes_\tau\exp_\tau\left(\sum_{i=1}^r\theta^i x^i\right)\otimes_\tau\check{p}_0\right)\\
&=\exp_\tau\left(\left(B^{-(1-\tau)}\theta^0\right)\check{p}_0^{1-\tau}+B^{-(1-\tau)}\left(\sum_{i=1}^r\theta^i x^i-\ln_\tau B+\ln_\tau\check{p}_0\right)\right)
\end{aligned}\tag{63}$$

となる．

今後は，パラメトリックな確率分布の集合 $\check{\mathcal{P}}$ の点を V_Ω^r の元で平行移動して得られる点も再び $\check{\mathcal{P}}$ の元であるようにしたいので，必ず規格化操作を実行することにする．つまり，

$U_\Omega^{r+1}\bigl(\check{\mathcal{P}}\bigr)$ の元による平行移動

$U_\Omega^{r+1}\bigl(\check{\mathcal{P}}\bigr)=N_\tau\bigl(\check{\mathcal{P}}\bigr)\oplus V_\Omega^r$ の元による $\check{p}_0(x)\in\check{\mathcal{P}}$ の順序付き平行移動：

$$\check{p}=\exp_\tau\left(C^{-(1-\tau)}\left(\sum_{i=1}^r\theta^i x^i-\psi_\tau+\ln_\tau\check{p}_0\right)\right)\tag{64}$$

$$p=\exp_\tau\bigl(\theta^0\check{p}^{1-\tau}\bigr)\otimes_\tau\check{p}\tag{65}$$

ただし，

$$\psi_\tau=\ln_\tau C=\ln_\tau\left(\int\exp_\tau\left(\sum_{i=1}^r\theta^i x^i\right)\otimes_\tau\check{p}_0\,\mathrm{d}x\right)\tag{66}$$

のように，2 段階に分けて $U_\Omega^{r+1}\left(\check{\mathcal{P}}\right)$ の元による平行移動を考えていく．このことは，τ-アファイン部分空間 $\left(\check{\mathcal{P}}\times\mathbb{R}_+, U_\Omega^{r+1}\left(\check{\mathcal{P}}\right), e_\tau\right)$ を二つの部分空間 $\left(\check{\mathcal{P}}, V_\Omega^r, e_\tau\right)$ と $\left(\check{\mathcal{P}}\times\mathbb{R}_+, N_\tau\left(\check{\mathcal{P}}\right), e_\tau\right)$ に分けて，まず $\left(\check{\mathcal{P}}, V_\Omega^r, e_\tau\right)$ の元で並行移動し，その後 $\left(\check{\mathcal{P}}\times\mathbb{R}_+, N_\tau\left(\check{\mathcal{P}}\right), e_\tau\right)$ の元で測度の大きさを変化させる*22ことに相当する．この二つの部分空間は，

$$\left(\check{\mathcal{P}}, V_\Omega^r, e_\tau\right) \cap \left(\check{\mathcal{P}}\times\mathbb{R}_+, N_\tau\left(\check{\mathcal{P}}\right), e_\tau\right) = \left(\check{\mathcal{P}}, \{0\}, e_\tau\right) = \check{\mathcal{P}} \tag{67}$$

を満たすので，$\check{\mathcal{P}}$ 上での平行移動に関する τ-アファイン部分空間 $\left(\check{\mathcal{P}}, V_\Omega^r, e_\tau\right)$ と測度の大きさを変える τ-アファイン部分空間 $\left(\check{\mathcal{P}}\times\mathbb{R}_+, N_\tau\left(\check{\mathcal{P}}\right), e_\tau\right)$ とが横断的に交わる*23ことを期待させる．

今後は，τ-アファイン部分空間 $\left(\check{\mathcal{P}}\times\mathbb{R}_+, U_\Omega^{r+1}\left(\check{\mathcal{P}}\right), e_\tau\right)$ の点に対して，測度 $p(x)\,\mathrm{d}x$ そのものは座標として考えずに，τ-対数尤度 $\overset{\tau}{\ell}(p)$ の方を座標として考える．これは，先に述べたように統計的推定問題などでは，対数尤度の方がより使い易いということと，なにより指数型分布族の取り扱いが非常に楽になるということを反映している．対数尤度を優先して考えるべき理由はざまざまあるが，要するに，τ-アファイン部分空間 $\left(\check{\mathcal{P}}\times\mathbb{R}_+, U_\Omega^{r+1}\left(\check{\mathcal{P}}\right), e_\tau\right)$ の点を p のように表したり，$\overset{\tau}{\ell}(p)$ のように表したりするが，座標に関してはアファイン座標系を使うことにするので，$U_\Omega^{r+1}\left(\check{\mathcal{P}}\right)$ の元を与える τ-対数尤度 $\overset{\tau}{\ell}(p)$ を座標として使用することになる．

2.2 スコア関数

スコア関数とは，分布を特徴付けるパラメータで対数尤度を偏微分したものである．つまり，τ-アファイン部分空間 $\left(\check{\mathcal{P}}\times\mathbb{R}_+, U_\Omega^{r+1}\left(\check{\mathcal{P}}\right), e_\tau\right)$ では，平行移動量が線形部分空間 $U_\Omega^{r+1}\left(\check{\mathcal{P}}\right)$ の元で表されるので，パラメータ $\left(\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^r\right)$ で τ-対数尤度 $\overset{\tau}{\ell}$ を偏微分したものになる：

$$\overset{\tau}{\ell}_\alpha = \frac{\partial \overset{\tau}{\ell}}{\partial\theta^\alpha} = \frac{\partial \ln_\tau p}{\partial\theta^\alpha} = p^{1-\tau}\frac{\partial \log p}{\partial\theta^\alpha} \tag{68}$$

*22 規格化を導入する前は，$\left(\check{\mathcal{P}}, V_\Omega^r, e_\tau\right)$ の元と $\left(\check{\mathcal{P}}\times\mathbb{R}_+, N_\tau\left(\check{\mathcal{P}}\right), e_\tau\right)$ の元の作用は交換可能だったが，規格化を導入した後では交換しないので注意すること．

*23 可微分多様体 X の部分多様体 Y と Z が横断的に交わるとは，すべての $p \in Y\cap Z$ について $T_pX = T_pY \oplus T_pZ$ が成立することである．この構造を利用して，接触構造を考えたい．その上で，フロベニウスの定理を用いてルジャンドル多様体の話に持ち込みたい．これができれば熱力学とのより完全な対応付けを行うことができる．

ここで，添え字 α は，$0,1,2,\dots,r$ の範囲の値をとる．今後，ギリシャ文字の添え字（α,β,γ など）は $0,1,2,\dots,r$ の範囲の値をとり，ラテン文字の添え字（i,j,k など）は $1,2,\dots,r$ の範囲の値をとるものとする．

このとき，τ-アファイン部分空間 $\left(\check{\mathcal{P}}\times\mathbb{R}_+, U_\Omega^{r+1}\big(\check{\mathcal{P}}\big), e_\tau\right)$ は，二つの τ-アファイン部分空間により

$$\left(\check{\mathcal{P}}\times\mathbb{R}_+, U_\Omega^{r+1}\big(\check{\mathcal{P}}\big), e_\tau\right) = \left(\check{\mathcal{P}}, V_\Omega^r, e_\tau\right) \cup \left(\check{\mathcal{P}}\times\mathbb{R}_+, N_\tau\big(\check{\mathcal{P}}\big), e_\tau\right) \tag{69}$$

のように表されるので，スコア関数の評価は

$$\left(\check{\mathcal{P}}, V_\Omega^r, e_\tau\right) \cap \left(\check{\mathcal{P}}\times\mathbb{R}_+, N_\tau\big(\check{\mathcal{P}}\big), e_\tau\right) = \check{\mathcal{P}} \tag{70}$$

上で行うことにする．つまり，$\theta^0=0$ でスコア関数を評価する：

$$\overset{\tau}{\ell}_0 = p^{1-\tau}\big|_{\theta^0=0} = \check{p}^{1-\tau} \tag{71}$$

$$\overset{\tau}{\ell}_i = p^{1-\tau}\frac{\partial\log p}{\partial\theta^i}\bigg|_{\theta^0=0} = \check{p}^{1-\tau}\frac{\partial\log\check{p}}{\partial\theta^i} \tag{72}$$

これは，パラメトリックな確率測度の空間 $\check{\mathcal{P}}$ に対する接ベクトルを考えていることになっている．

つまり，このスコア関数が，τ-アファイン部分空間 $\left(\check{\mathcal{P}}\times\mathbb{R}_+, U_\Omega^{r+1}\big(\check{\mathcal{P}}\big), e_\tau\right)$ の接空間 $T_pU_\Omega^{r+1}$ の基底ベクトルになっていると考えたい．そこで，今後は，スコア関数は常に線形独立であるものと仮定しておく．

2.3 τ-アファイン共役と縮約

ここからは，平行移動の仕方を指定するパラメータ τ の値を，ある程度具体的に考えていく．つまり，$\tau=s$ とし，しばらくは $s\in[0,1]$ として考えていく[*24]．また，$\tau=s$ の共役として $\tau=1-s$ を考える．このとき，$\tau=s=\frac{1}{3}$ のときの共役は $\tau=1-s=\frac{2}{3}$ であるが，$\tau=s=\frac{2}{3}$ のときの共役は $\tau=1-s=\frac{1}{3}$ となるので，$\tau=s$ が $\frac{1}{3}$ なのか $\tau=1-s$ が $\frac{1}{3}$ なのか区別が付き難くなってしまう．そこで，$\tau=s$ を表すのに B を使い，$\tau=1-s$ を表すのに S を使うことにする．つまり，$B+S=1$ を満たす[*25]．この共役は，ヘルダー共役に類似のものであり，τ-アファイン共役とよぶことにする．ただし，

[*24] $s=0$ または $s=1$ は極限をとることで対応する．

[*25] B は Body の頭文字であり，S は Soul の頭文字である．二つ合わせて実在（Real）となるという語呂合わせである．

τ-アファイン共役は，単に s を $1-s$ に置き換えるだけではなく，$\theta^0=0$ のときには，それぞれの τ の値に応じた平行移動の仕方（$\tau=s$ と $\tau=1-s$）で測度空間 $\check{\mathcal{P}}$ の同一の点にたどり着くことも要求する．B で指定される τ-アファイン構造をもった空間を $Body$ 世界とよび，その τ-アファイン共役である S で指定される τ-アファイン構造をもった空間を $Soul$ 世界とよぶことにする．

τ-アファイン共役と次の章で導入する縮約により，$Body$ 世界の双対空間として $Soul$ 世界を見ることができるため，どちらをターゲット空間に選んでもよいが，今後はアファイン座標系を導入するためのターゲット空間としては $Body$ 世界の方を選択する．そのため，$Soul$ 世界の方の座標系も $Body$ 世界の方に導入された座標系を用いて考えることになる．

つまり，$Body$ 世界の可測関数の線形部分空間を

$$U_B^{r+1}\big(\check{\mathcal{P}}\big)=\left\{g_B(x)\,\middle|\,g_B(x)=\theta^0\check{p}^{1-s}+u_s\left(x;\overset{B}{\theta^1},\ldots,\overset{B}{\theta^r}\right)\right\} \tag{73}$$

とする．ただし，

$$\check{p}=\exp_s(u_s)\otimes_s\check{p}_0=\exp_s\left(C^{-(1-s)}\left(\sum_{i=1}^{r}\overset{B}{\theta^i}x^i-\psi_B+\ln_s\check{p}_0\right)\right) \tag{74}$$

であり，

$$\int\exp_s\left(\sum_{i=1}^{r}\overset{B}{\theta^i}x^i\right)\otimes_s\check{p}_0\,\mathrm{d}x=C=\exp_s(\psi_B) \tag{75}$$

のとき，

$$u_s=C^{-(1-s)}\left(\sum_{i=1}^{r}\overset{B}{\theta^i}x^i-\check{p}_0^{1-s}\psi_B\right) \tag{76}$$

である[*26]．

$U_B^{r+1}\big(\check{\mathcal{P}}\big)$ の τ-アファイン共役な可測関数の線形部分空間は

$$U_S^{r+1}\big(\check{\mathcal{P}}\big)=\left\{g_S(x)\,\middle|\,g_S(x)=\check{p}^s\ln_{1-s}\big(\exp_s\big(-\theta^0\big)\big)+u_{1-s}\left(x;\overset{S}{\theta^1},\ldots,\overset{S}{\theta^r}\right)\right\} \tag{77}$$

[*26] この式からも，$\check{p}_0$ を u_s だけ B-平行移動したものを再び確率密度関数に戻すには，スケール変換 $\check{p}_0^{1-s}\,(-\psi_B)$ を行うことになっているので，スケール変換に対応する十分統計量は $\check{p}_0^{1-s}$ の型であることがわかる．

のようになる．ただし，$\overset{B}{\check{p}} = \overset{S}{\check{p}} = \check{p}$ なので，

$$\check{p} = \exp_{1-s}(u_{1-s}) \otimes_{1-s} \check{p}_0 = \exp_{1-s}\left(C^{-s} \left(\sum_{i=1}^{r} \overset{S}{\theta^i} x^i - \psi_S + \ln_{1-s} \check{p}_0 \right)\right) \tag{78}$$

となり，

$$C = \int \exp_{1-s}\left(\sum_{i=1}^{r} \overset{S}{\theta^i} x^i \right) \otimes_{1-s} \check{p}_0 \, \mathrm{d}x = \exp_{1-s}(\psi_S) \tag{79}$$

$$\psi_S = \ln_{1-s}(\exp_s(\psi_B)) \tag{80}$$

である．このとき，

$$u_{1-s} = C^{-s} \left(\sum_{i=1}^{r} \overset{S}{\theta^i} x^i - \check{p}_0^s \, \psi_S \right) \tag{81}$$

となる．

$\theta^0 = 0$ では，どちらも同一の点 $\check{p}$ を表しているので，u_{1-s} は u_s を用いて以下のように表される：

$$u_{1-s} = \ln_{1-s}(\exp_s(u_s + \ln_s \check{p}_0)) - \ln_{1-s} \check{p}_0 \tag{82}$$

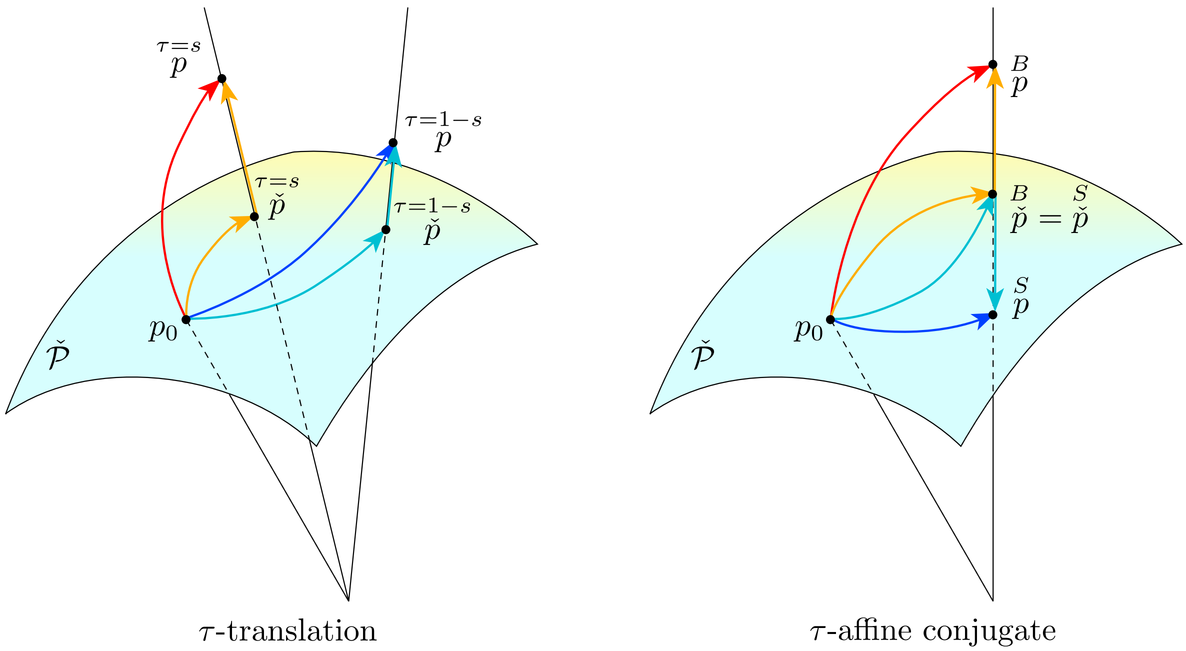

図 1　τ-アファイン構造と τ-アファイン共役

図 1 では，$\check{p}_0 \in \check{\mathcal{P}}$ として，$U_\Omega^{r+1}\bigl(\check{\mathcal{P}}\bigr)$ の元による平行移動を表している．左側の図は，一般的な状況を見やすくするために $\check{\mathcal{P}}$ の外側にすべての点が来るように描かれている．もちろん，常にこのようになるわけではなく，平行移動によっては $\check{\mathcal{P}}$ の外側や内側に移ることもある．また，右側の図は，τ-アファイン共役の様子を描いてる．

ところで，$\theta^0 = 0$ のとき，$u_s = 0$ の周りで展開すると

$$p = \check{p}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(s-1)^k}{k!} \frac{\Gamma\Bigl(k + \frac{1}{s-1}\Bigr)}{\Gamma\Bigl(\frac{1}{s-1}\Bigr)} \check{p}_0^{k(s-1)+1} u_s^k = \check{p}_0 + \check{p}_0^s u_s + \cdots \tag{83}$$

または，$u_s \to 0$ のとき $u_{1-s} \to 0$ なので，

$$p = \check{p}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-s)^{k-1}}{k!} \frac{\Gamma\bigl(k - \frac{1}{s}\bigr)}{\Gamma\bigl(1 - \frac{1}{s}\bigr)} \check{p}_0^{1-sk} u_{1-s}^k = \check{p}_0 + \check{p}_0^{1-s} u_{1-s} + \cdots \tag{84}$$

のように展開することができる．

さて，τ-対数尤度について考えてみると，

$$\overset{B}{\ell} = \ln_s \check{p} = \frac{1}{1-s} \left(\check{p}^{1-s} - 1\right) \tag{85}$$

の τ-アファイン共役は

$$\overset{S}{\ell} = \ln_{1-s} \check{p} = \frac{1}{s} \left(\check{p}^s - 1\right) \tag{86}$$

となる．また，スコア関数については

$$\overset{B}{\ell}_i = \check{p}^{1-s} \frac{\partial \log \check{p}}{\partial \theta^i} \tag{87}$$

であり，τ-アファイン共役は

$$\overset{S}{\ell}_i = \check{p}^s \frac{\partial \log \check{p}}{\partial \theta^i} \tag{88}$$

のようなる．

一方，測度の大きさの変化を表す方向に関するスコア関数については，

$$\overset{B}{\ell}_0 = \check{p}^{1-s} \tag{89}$$

のとき，τ-アファイン共役を

$$\overset{S}{\ell}_0 = -\check{p}^s \tag{90}$$

で定義する．このマイナス符号が特別に必要な理由は，$\exp_s\left(\theta^0\right)$ 倍だけ測度が変化したとき，その τ-アファイン共役は $\exp_s\left(-\theta^0\right)$ 倍だけ変化してほしいからである[*27]．また，このマイナス符号には，リーマンテンソルの添え字がもつ対称性と反対称性を回復させる効果もあるが，これに関してはリーマンテンソルの章で述べることにする．

τ-アファイン部分空間 $\left(\check{\mathcal{P}} \times \mathbb{R}_+, U_\Omega^{r+1}\left(\check{\mathcal{P}}\right), e_\tau\right)$ の元で，τ-アファイン共役の上記の定義を満たすような組は，

$$\begin{aligned}\overset{\tau}{p}(x) &= \exp_\tau\left(\check{p}(x)^{1-\tau} \ln_\tau\left(\exp_s\left(\frac{2\tau-1}{2s-1}\theta^0\right)\right)\right) \otimes_\tau \check{p}(x) \\ &= \exp_\tau\left(\frac{2\tau-1}{2s-1}\theta^0\right) \cdot \check{p}(x) \qquad (91)\end{aligned}$$

のように表すことができる[*28]．ただし，τ は s または $1-s$ のどちらかの値を取るものとする．つまり，τ は B または S を表している：

$$\overset{B}{p}(x) = \left(1 + (1-s)\,\theta^0\right)^{\frac{1}{1-s}} \check{p}(x) \qquad (92)$$

$$\overset{S}{p}(x) = \left(1 - (1-s)\,\theta^0\right)^{\frac{1}{1-s}} \check{p}(x) \qquad (93)$$

このとき，τ-対数尤度は $\overset{\tau}{\ell}(p) = \ln_\tau p(x)$ なので，

$$\overset{\tau}{\ell}(p) = \check{p}(x)^{1-\tau} \ln_\tau\left(\exp_s\left(\frac{2\tau-1}{2s-1}\theta^0\right)\right) + \ln_\tau \check{p}(x) \qquad (94)$$

となる．ただし，

$$\check{p}(x) = \exp_\tau\left(C^{-(1-\tau)}\left(\sum_{i=1}^{r} \theta^i x^i - \psi_\tau + \ln_\tau \check{p}_0\right)\right) \qquad (95)$$

であり，C は $\tau = B$ のときも $\tau = S$ のときも同じ値をとる：

$$C = \int \exp_\tau\left(\sum_{i=1}^{r} \theta^i x^i\right) \otimes_\tau \check{p}_0 \,\mathrm{d}x = \exp_\tau(\psi_\tau) \qquad (96)$$

このため，

$$\exp_{1-s}(\psi_S) = \exp_s(\psi_B) \qquad (97)$$

[*27] $s=1$ のときには，互いに逆数の関係になっている．実際，$\theta^0 = \ln_s \lambda$ とすれば，$\exp_s\left(\theta^0\right) = \lambda$ であり，$\exp_s\left(-\theta^0\right) = \left(2-\lambda^{1-s}\right)^{\frac{1}{1-s}}$ となり，$\lim_{s\to 1}\left(2-\lambda^{1-s}\right)^{\frac{1}{1-s}} = \dfrac{1}{\lambda}$ となる．

[*28] x^i の上付き添え字 i は，べき指数であると同時に和をとるための添え字でもある．また，同じ点を表す場合でも平行移動の仕方に依存して θ^i $(i=1,\ldots,r)$ は変化するので，θ^i は τ の値に依存して決まる量であることに注意する．

が成立することになる．

まとめると，τ-対数尤度は，$\overset{B}{\check{p}} = \overset{S}{\check{p}} = \check{p}$ なので，次のように与えられる：

互いに τ-アファイン共役な τ-対数尤度

$\overset{B}{\ell}$ と $\overset{S}{\ell}$ を *Body* 世界の座標 $\left(\theta^0, \theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r\right)$ で考える：

$$\begin{aligned}\overset{B}{\ell} &= \theta^0 \check{p}(x)^{1-s} + \ln_s \check{p}(x) \\ &= \theta^0 \check{p}^{1-s} + C^{-(1-s)} \left(\sum_{i=1}^{r} \theta^i x^i - \psi_B + \ln_s \check{p}_0 \right) \end{aligned} \tag{98}$$

$$\begin{aligned}\overset{S}{\ell} &= \check{p}(x)^s \ln_{1-s}\!\left(\exp_s\!\left(-\theta^0\right)\right) + \ln_{1-s} \check{p}(x) \\ &= \check{p}^s \ln_{1-s}\!\left(\exp_s\!\left(-\theta^0\right)\right) + \ln_{1-s} \overset{B}{\check{p}} \\ &= \check{p}^s \ln_{1-s}\!\left(\exp_s\!\left(-\theta^0\right)\right) + \ln_{1-s} \left(\exp_s \left(C^{-(1-s)} \left(\sum_{i=1}^{r} \theta^i x^i - \psi_B + \ln_s \check{p}_0 \right) \right) \right) \end{aligned} \tag{99}$$

このとき，

$$t_i = \frac{\partial \log \check{p}}{\partial \theta^i} = C^{-(1-s)} \check{p}^{s-1} \left(x^i - \check{p}^{1-s} \frac{\partial \psi_B}{\partial \theta^i} \right) \tag{100}$$

$$t_{ij} = \frac{\partial^2 \log \check{p}}{\partial \theta^i \partial \theta^j} \tag{101}$$

$$t_{ijk} = \frac{\partial^3 \log \check{p}}{\partial \theta^i \partial \theta^j \partial \theta^k} \tag{102}$$

とおくと，それぞれ

$$\int \mathrm{d}x\, \check{p}\, t_i = 0 \tag{103}$$

$$\int \mathrm{d}x\, \check{p}\, (t_i t_j + t_{ij}) = 0 \tag{104}$$

$$\int \mathrm{d}x\, \check{p}\, (t_i t_j t_k + t_k t_{ij} + t_i t_{jk} + t_j t_{ki} + t_{ijk}) = 0 \tag{105}$$

を満たす．これらを用いて，スコア関数を $\theta^0 = 0$ で評価すると，次のようになる：

$Body$ 世界のスコア関数

接空間 $T_{\check{p}} U_B^{r+1}$ の基底ベクトル：

$$\overset{B}{\ell}_0 = \check{p}(x)^{1-s} \tag{106}$$

$$\begin{aligned} \overset{B}{\ell}_i &= \left(1 + (1-s)\,\theta^0\right) \check{p}(x)^{1-s} \left.\frac{\partial \log \check{p}(x)}{\partial \theta^i}\right|_{\theta^0=0} \\ &= \check{p}^{1-s} t_i = C^{-(1-s)} \left(x^i - \check{p}^{1-s} \frac{\partial \psi_B}{\partial \theta^i} \right) \end{aligned} \tag{107}$$

$Soul$ 世界のスコア関数

接空間 $T_{\check{p}} U_S^{r+1}$ の基底ベクトル：

$$\overset{S}{\ell}_0 = -\check{p}^s \left(1 - (1-s)\,\theta^0\right)^{\frac{2s-1}{1-s}} \Big|_{\theta^0=0} = -\check{p}(x)^s \tag{108}$$

$$\begin{aligned} \overset{S}{\ell}_i &= \left(1 - (1-s)\,\theta^0\right)^{\frac{s}{1-s}} \check{p}(x)^s \left.\frac{\partial \log \check{p}(x)}{\partial \theta^i}\right|_{\theta^0=0} \\ &= \check{p}^s t_i = \check{p}^{2s-1} C^{-(1-s)} \left(x^i - \check{p}^{1-s} \frac{\partial \psi_B}{\partial \theta^i} \right) \end{aligned} \tag{109}$$

また，次の公式

微分に関する公式

$Body$ 世界の座標による微分公式：

$$\frac{\partial \check{p}(x)}{\partial \theta^i} = \check{p}(x)^s \, \overset{B}{\ell}_i \tag{110}$$

$$C^{-1} \frac{\partial C}{\partial \theta^i} = C^{-(1-s)} \frac{\partial \psi_B}{\partial \theta^i} \tag{111}$$

を利用することで，スコア関数の $Body$ 世界のアファイン座標 $\left(\theta^0, \theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r\right)$ による偏導関数は次のように与えられる：

$Body$ 世界のスコア関数の偏導関数

$$\overset{B}{\ell}_{00} = 0 \tag{112}$$

$$\begin{aligned}
\overset{B}{\ell}_{0i} = \overset{B}{\ell}_{i0} &= (1-s)\,\check{p}(x)^{1-s}\,\frac{\partial \log \check{p}(x)}{\partial \theta^i} \\
&= (1-s)\,\check{p}^{1-s} t_i = (1-s)\,\overset{B}{\ell}_i
\end{aligned} \tag{113}$$

$$\begin{aligned}
\overset{B}{\ell}_{ij} &= \left(1 + (1-s)\,\theta^0\right) \check{p}(x)^{1-s} \left\{ (1-s)\,\frac{\partial \log \check{p}(x)}{\partial \theta^i}\,\frac{\partial \log \check{p}(x)}{\partial \theta^j} + \frac{\partial^2 \log \check{p}(x)}{\partial \theta^i \partial \theta^j} \right\} \Bigg|_{\theta^0 = 0} \\
&= \check{p}^{1-s} \left\{ (1-s)\, t_i t_j + t_{ij} \right\} \\
&= -C^{-(1-s)} \left\{ (1-s)\,\frac{\partial \psi_B}{\partial \theta^j}\,\overset{B}{\ell}_i + (1-s)\,\frac{\partial \psi_B}{\partial \theta^i}\,\overset{B}{\ell}_j + \check{p}^{1-s}\,\frac{\partial^2 \psi_B}{\partial \theta^i \partial \theta^j} \right\}
\end{aligned} \tag{114}$$

$Soul$ 世界のスコア関数の偏導関数

$$\overset{S}{\ell}_{00} = (2s-1)\left(1-(1-s)\,\theta^0\right)^{\frac{3s-2}{1-s}}\check{p}^s\Big|_{\theta^0=0} \tag{115}$$
$$= (2s-1)\,\check{p}(x)^s = -\,(2s-1)\,\overset{S}{\ell}_0$$

$$\overset{S}{\ell}_{0i} = \overset{S}{\ell}_{i0} = -s\left(1-(1-s)\,\theta^0\right)^{\frac{2s-1}{1-s}}\check{p}(x)^s\;\frac{\partial\log\check{p}(x)}{\partial\theta^i}\Big|_{\theta^0=0}$$
$$= -s\,\check{p}^s t_i = -s\,\overset{S}{\ell}_i \tag{116}$$

$$\overset{S}{\ell}_{ij} = \left(1-(1-s)\,\theta^0\right)^{\frac{s}{1-s}}\check{p}(x)^s\left\{s\,\frac{\partial\log\check{p}(x)}{\partial\theta^i}\,\frac{\partial\log\check{p}(x)}{\partial\theta^j} + \frac{\partial^2\log\check{p}(x)}{\partial\theta^i\partial\theta^j}\right\}\Big|_{\theta^0=0}$$
$$= \check{p}^s\,(s\,t_i t_j + t_{ij})$$
$$= (2s-1)\,\check{p}^s\frac{\partial\log\check{p}(x)}{\partial\theta^i}\,\frac{\partial\log\check{p}(x)}{\partial\theta^j}$$
$$- C^{-(1-s)}\left\{(1-s)\,\frac{\partial\psi_B}{\partial\theta^j}\overset{S}{\ell}_i + (1-s)\,\frac{\partial\psi_B}{\partial\theta^i}\overset{S}{\ell}_j + \check{p}^s\,\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\theta^i\partial\theta^j}\right\} \tag{117}$$

さて，互いに τ-アファイン共役な接空間 $T_{\check{p}}U_B^{r+1}$ と $T_{\check{p}}U_S^{r+1}$ の任意の元 $\overset{\tau}{\mathbf{a}}$ は，$\tau = B$ または $\tau = S$（$\tau = s$ または $\tau = 1-s$）として，

$$\overset{\tau}{\boldsymbol{a}} = a^0\overset{\tau}{\ell}_0 + \sum_{i=1}^{r} a^i\overset{\tau}{\ell}_i \tag{118}$$

のように表すことができるが，

$$\overset{\tau}{\ell}_i = \frac{2\tau-1}{2s-1}\overset{\tau}{\ell}_0\frac{\partial\log\check{p}}{\partial\theta^i} \tag{119}$$

が成立するので，

$$\overset{\tau}{\boldsymbol{a}} = a^0\overset{\tau}{\ell}_0 + \sum_{i=1}^{r} a^i\frac{2\tau-1}{2s-1}\overset{\tau}{\ell}_0\frac{\partial\log\check{p}}{\partial\theta^i}$$
$$= \left(a^0 + \frac{2\tau-1}{2s-1}\sum_{i=1}^{r} a^i\frac{\partial\log\check{p}}{\partial\theta^i}\right)\overset{\tau}{\ell}_0 \tag{120}$$

のように表すこともできる．$\overset{\tau}{\ell}_0$ に比例しているからといって，$T_{\check{p}}N_\tau$ の元とは限らないので注意が必要である．

2.4 計量

ここで，*Body* 世界と *Soul* 世界の τ-アファイン共役な関係を利用して，縮約という操作

$$\langle\cdot|\cdot\rangle : U_S^{r+1}(\check{\mathcal{P}}) \times U_B^{r+1}(\check{\mathcal{P}}) \to \mathbb{R} \tag{121}$$

を次のように定義する[*29]：

$$\Big\langle Soul\ \text{世界の量}\ \Big| Body\ \text{世界の量} \Big\rangle = \int_\Omega \mathrm{d}x\,(Soul\ \text{世界の量})\,(Body\ \text{世界の量}) \tag{122}$$

Body 世界の量とは，平行移動が e_s で指定されたアファイン空間に関する量であり，*Soul* 世界の量とは，平行移動が e_{1-s} で指定されたアファイン空間に関する量である．つまり，τ-アファイン構造に依存して，どちらの世界の量であるかは決まっている．

このとき，$\theta^0 = 0$ におけるスコア関数[*30]が，点 $\check{p}(x)$ における接空間 $T_{\check{p}}U_\Omega^{r+1}$ の基底ベクトルになっている[*31]ので，接空間 $T_{\check{p}}U_\Omega^{r+1}$ 上に縮約を用いて計量を次のように導入する：

$$g_{\alpha\beta} = \left\langle \overset{S}{\ell}_\alpha \middle| \overset{B}{\ell}_\beta \right\rangle \tag{123}$$

まず，g_{00} は，

$$\begin{aligned} g_{00} &= \left\langle \overset{S}{\ell}_0 \middle| \overset{B}{\ell}_0 \right\rangle \\ &= \int \mathrm{d}x\,\{-\check{p}(x)^s\}\,\check{p}(x)^{1-s} \\ &= -\int \mathrm{d}x\,\check{p}(x) \\ &= -1 \end{aligned} \tag{124}$$

[*29] 今後，積分領域を表す Ω は省略する．

[*30] スコア関数は常に線形独立であると仮定している．

[*31] $\check{p} \in \left(\check{\mathcal{P}} \times \mathbb{R}_+, U_\Omega^{r+1}(\check{\mathcal{P}}), e_\tau\right)$ と考える．τ-アファイン構造は，V_Ω^r 内の平行移動であっても $N_\tau(\check{\mathcal{P}})$ 方向の変化を引き起こすので注意が必要である．もちろん，興味があるのは TV_Ω^r での幾何学的な量であるが，TV_Ω^r は TU_Ω^{r+1} と異なり平坦ではないので注意する必要がある．

のように求めることができる．これは，$\overset{S}{\ell}_0 = -\check{p}^s \left(1 - (1-s)\,\theta^0\right)^{\frac{2s-1}{1-s}} \Big|_{\theta^0=0}$ であることから，

$$g_{00} = -\left(1 - (1-s)\,\theta^0\right)^{\frac{2s-1}{1-s}} \Big|_{\theta^0=0} \tag{125}$$

のように求めてもよい．次に，g_{0i} は[*32]

$$\begin{aligned} g_{0i} &= \left\langle \overset{S}{\ell}_0 \middle| \overset{B}{\ell}_i \right\rangle \\ &= \int \mathrm{d}x \left\{-\check{p}(x)^s\right\} \check{p}(x)^{1-s}\ \frac{\partial \log \check{p}(x)}{\partial \theta^i} \\ &= -\int \mathrm{d}x \frac{\partial \check{p}(x)}{\partial \theta^i} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \theta^i} \int \mathrm{d}x\, \check{p}(x) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{126}$$

であり，g_{i0} は

$$\begin{aligned} g_{i0} &= \left\langle \overset{S}{\ell}_i \middle| \overset{B}{\ell}_0 \right\rangle \\ &= \int \mathrm{d}x\, \check{p}(x)^s\ \frac{\partial \log \check{p}(x)}{\partial \theta^i}\, \check{p}(x)^{1-s} \\ &= \int \mathrm{d}x \frac{\partial \check{p}(x)}{\partial \theta^i} \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta^i} \int \mathrm{d}x\, \check{p}(x) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{127}$$

[*32] 今後，パラメータによる偏微分と確率変数に関する積分は自由に交換できるものと仮定する．

なので，$g_{0i}=g_{i0}=0$ である．次に，g_{ij} は

$$
\begin{aligned}
g_{ij} &= \left\langle \overset{S}{\ell}_i \middle| \overset{B}{\ell}_j \right\rangle \\
&= \int \mathrm{d}x\, \check{p}(x)^s \, \frac{\partial \log \check{p}(x)}{\partial \theta^i} \, \check{p}(x)^{1-s} \, \frac{\partial \log \check{p}(x)}{\partial \theta^i} \\
&= \int \mathrm{d}x\, \check{p}(x) \, \frac{\partial \log \check{p}(x)}{\partial \theta^i} \frac{\partial \log \check{p}(x)}{\partial \theta^j} \\
&= \left(g^{Fisher}\right)_{ij} \qquad (128)
\end{aligned}
$$

となり，添え字 i と j について対称である．まとめると，計量は

$$
(g_{\alpha\beta}) = \left(\begin{array}{c|ccc}
-1 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & \left(g^{Fisher}\right)_{11} & \cdots & \left(g^{Fisher}\right)_{1r} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \left(g^{Fisher}\right)_{r1} & \cdots & \left(g^{Fisher}\right)_{rr}
\end{array}\right) \qquad (129)
$$

のようになり，物理でおなじみの不定計量になっている．今後，この計量 $(g_{\alpha\beta})$ の逆行列を $\left(g^{\alpha\beta}\right)$ のように上付き添え字を用いて表すことにする．

ここで，

$$
\begin{aligned}
g_{0i} &= \left\langle \overset{S}{\ell}_0 \middle| \overset{B}{\ell}_i \right\rangle \\
&= \int \{-\check{p}^s\} \, C^{-(1-s)} \left(x^i - \check{p}^{1-s} \frac{\partial \psi_B}{\partial \theta^i} \right) \mathrm{d}x \\
&= -C^{-(1-s)} \int \left(\check{p}^s x^i - \check{p} \frac{\partial \psi_B}{\partial \theta^i} \right) \mathrm{d}x \\
&= -C^{-(1-s)} \left\{ \int \check{p}^s x^i \mathrm{d}x - \int \check{p} \frac{\partial \psi_B}{\partial \theta^i} \mathrm{d}x \right\} \\
&= -C^{-(1-s)} \left\{ \int \check{p}^s x^i \mathrm{d}x - \frac{\partial \psi_B}{\partial \theta^i} \right\} \qquad (130)
\end{aligned}
$$

であり，$g_{0i}=0$ なので

$$
\frac{\partial \psi_B}{\partial \theta^i} = \int \check{p}^s x^i \mathrm{d}x \qquad (131)
$$

が成り立っていることがわかる．また，これから

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi_B}{\partial\theta^i \partial\theta^j} &= \int \left(s\,\check{p}^{s-1} \frac{\partial \check{p}}{\partial\theta^j} \right) x^i \mathrm{d}x \\
&= \int s\,\check{p}^{s-1} \left\{ \check{p}^s C^{-(1-s)} \left(x^j - \check{p}^{1-s} \frac{\partial \psi_B}{\partial\theta^j} \right) \right\} x^i \mathrm{d}x \\
&= s\,C^{-(1-s)} \int \check{p}^{2s-1} \left(x^j - \check{p}^{1-s} \frac{\partial \psi_B}{\partial\theta^j} \right) x^i \mathrm{d}x \\
&= s\,C^{-(1-s)} \left(\int \check{p}^{2s-1} x^j x^i \,\mathrm{d}x - \frac{\partial \psi_B}{\partial\theta^j} \int \check{p}^s x^i \,\mathrm{d}x \right) \\
&= s\,C^{-(1-s)} \left(\int \check{p}^{2s-1} x^i x^j \,\mathrm{d}x - \frac{\partial \psi_B}{\partial\theta^i} \frac{\partial \psi_B}{\partial\theta^j} \right) \qquad (132)
\end{aligned}
$$

が得られる．一方，

$$
\begin{aligned}
g_{ij} &= \left\langle \overset{S}{\ell}_i \middle| \overset{B}{\ell}_j \right\rangle \\
&= \int \mathrm{d}x\, \check{p}^{2s-1} C^{-(1-s)} \left(x^i - \check{p}^{1-s} \frac{\partial \psi_B}{\partial\theta^i} \right) C^{-(1-s)} \left(x^j - \check{p}^{1-s} \frac{\partial \psi_B}{\partial\theta^j} \right) \\
&= C^{-2(1-s)} \int \mathrm{d}x\, \check{p}^{2s-1} \left(x^i - \check{p}^{1-s} \frac{\partial \psi_B}{\partial\theta^i} \right) \left(x^j - \check{p}^{1-s} \frac{\partial \psi_B}{\partial\theta^j} \right) \\
&= C^{-2(1-s)} \int \mathrm{d}x \left\{ \check{p}^{2s-1} x^i x^j - \left(\check{p}^s x^i \right) \frac{\partial \psi_B}{\partial\theta^j} - \left(\check{p}^s x^j \right) \frac{\partial \psi_B}{\partial\theta^i} + \check{p} \frac{\partial \psi_B}{\partial\theta^i} \frac{\partial \psi_B}{\partial\theta^j} \right\} \\
&= C^{-2(1-s)} \left(\int \mathrm{d}x\, \check{p}^{2s-1} x^i x^j - \frac{\partial \psi_B}{\partial\theta^i} \frac{\partial \psi_B}{\partial\theta^j} \right) \qquad (133)
\end{aligned}
$$

なので，

$$
\frac{\partial^2 \psi_B}{\partial\theta^i \partial\theta^j} = s\,C^{1-s} \left\langle \overset{S}{\ell}_i \middle| \overset{B}{\ell}_j \right\rangle = s\,C^{1-s} g_{ij} = s\,C^{1-s} \left(g^{Fisher} \right)_{ij} \qquad (134)
$$

となることがわかる．さらに，微分公式 (110) と (111) を用いて同様の計算を行えば，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \psi_B}{\partial\theta^i \partial\theta^j \partial\theta^k} = s\,C^{-(1-s)} \Bigg\{ & (2s-1)\,C^{-(1-s)} \left(\int \check{p}^{3s-2} x^i x^j x^k \,\mathrm{d}x - \frac{\partial \psi_B}{\partial\theta^i} \frac{\partial \psi_B}{\partial\theta^j} \frac{\partial \psi_B}{\partial\theta^k} \right) \\
& - \frac{\partial \psi_B}{\partial\theta^i} \frac{\partial^2 \psi_B}{\partial\theta^j \partial\theta^k} - \frac{\partial \psi_B}{\partial\theta^j} \frac{\partial^2 \psi_B}{\partial\theta^k \partial\theta^i} - \frac{\partial \psi_B}{\partial\theta^k} \frac{\partial^2 \psi_B}{\partial\theta^i \partial\theta^j} \Bigg\} \qquad (135)
\end{aligned}
$$

を得ることができる．また，

$$
s\,C^{1-s} \frac{\partial g_{ij}}{\partial\theta^k} = \frac{\partial^3 \psi_B}{\partial\theta^i \partial\theta^j \partial\theta^k} - (1-s)\,C^{-(1-s)} \frac{\partial \psi_B}{\partial\theta^k} \frac{\partial^2 \psi_B}{\partial\theta^i \partial\theta^j} \qquad (136)
$$

および

$$s\,C^{1-s}\left\langle \overset{S}{\ell}_{ij} \middle| \overset{B}{\ell}_{k} \right\rangle = \frac{\partial^3\psi_B}{\partial\theta^i\partial\theta^j\partial\theta^k} + (1-s)\,C^{-(1-s)}\frac{\partial\psi_B}{\partial\theta^k}\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\theta^i\partial\theta^j} \tag{137}$$

と

$$s\,C^{1-s}\left\langle \overset{S}{\ell}_{k} \middle| \overset{B}{\ell}_{ij} \right\rangle = -\,(1-s)\,C^{-(1-s)}\left(\frac{\partial\psi_B}{\partial\theta^i}\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\theta^j\partial\theta^k} + \frac{\partial\psi_B}{\partial\theta^j}\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\theta^k\partial\theta^i}\right) \tag{138}$$

が成り立つことも直接的な計算により示すことができる．これらを用いると，

$$\begin{aligned} &s\,C^{1-s}\left\langle \overset{S}{\ell}_{ij} \middle| \overset{B}{\ell}_{k} \right\rangle - s\,C^{1-s}\left\langle \overset{S}{\ell}_{k} \middle| \overset{B}{\ell}_{ij} \right\rangle \\ &= \frac{\partial^3\psi_B}{\partial\theta^i\partial\theta^j\partial\theta^k} + (1-s)\,C^{-(1-s)}\left(\frac{\partial\psi_B}{\partial\theta^i}\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\theta^j\partial\theta^k} + \frac{\partial\psi_B}{\partial\theta^j}\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\theta^k\partial\theta^i} + \frac{\partial\psi_B}{\partial\theta^k}\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\theta^i\partial\theta^j}\right) \end{aligned} \tag{139}$$

であることが導かれる．次のような関係式も成り立っていることに注意する：

$$s\,C^{1-s}\int \mathrm{d}x\,\check{p}\,t_i = s\left(\int \mathrm{d}x\,\check{p}\,x^i - \frac{\partial\psi_B}{\partial\theta^i}\right) = 0 \tag{140}$$

$$s\,C^{1-s}\int \mathrm{d}x\,\check{p}\,t_i t_j = \frac{\partial^2\psi_B}{\partial\theta^i\partial\theta^j} \tag{141}$$

$$\begin{aligned} &(2s-1)\,s\,C^{1-s}\int \mathrm{d}x\,\check{p}\,t_i t_j t_k \\ &= \frac{\partial^3\psi_B}{\partial\theta^i\partial\theta^j\partial\theta^k} + (1-s)\,C^{-(1-s)}\left(\frac{\partial\psi_B}{\partial\theta^i}\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\theta^j\partial\theta^k} + \frac{\partial\psi_B}{\partial\theta^j}\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\theta^k\partial\theta^i} + \frac{\partial\psi_B}{\partial\theta^k}\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\theta^i\partial\theta^j}\right) \end{aligned} \tag{142}$$

これらの関係式から，$\left\langle \overset{S}{\ell}_{ij} \middle| \overset{B}{\ell}_{k} \right\rangle$ と $\left\langle \overset{S}{\ell}_{k} \middle| \overset{B}{\ell}_{ij} \right\rangle$ は，添字 (i,j,k) について完全対称な量で互いに関係していることがわかる．その上，計量 g_{ij} の定義より，

$$\left\langle \overset{S}{\ell}_{ki} \middle| \overset{B}{\ell}_{j} \right\rangle + \left\langle \overset{S}{\ell}_{i} \middle| \overset{B}{\ell}_{jk} \right\rangle = \frac{\partial g_{ij}}{\partial\theta^k} \tag{143}$$

が成り立つ[*33]ので，計量的な双対接続を $\left\langle \overset{S}{\ell}_{ki} \middle| \overset{B}{\ell}_{j} \right\rangle$ と $\left\langle \overset{S}{\ell}_{i} \middle| \overset{B}{\ell}_{jk} \right\rangle$ で定義すればよさそうに思えるが，実際，これらはコシュール接続と一致していることが後の章で示される．

さて，この計量の形からわかることは，計量は平行移動の仕方から独立である，つまり平行移動の仕方を指定するパラメータ τ に依存しないということである．τ-アファイン部分

[*33] 添字の順番に注意すること．

空間 $\left(\check{\mathcal{P}} \times \mathbb{R}_+, U_\Omega^{r+1}\left(\check{\mathcal{P}}\right), e_\tau\right)$ の接空間 $T_p U_\Omega^{r+1}$ を考え，τ-アファイン共役という操作と縮約を導入すれば，計量は平行移動の下で不変であるという特徴をもっている．実は，確率変数の変換の下で計量が不変であることを要請すれば，スコア関数が $p(x;\theta)$ に関して斉次関数であり，その τ-アファイン共役がパラメータ s を $1-s$ で置き換えたものになる，つまり，スコア関数とその τ-アファイン共役量は一意的であることを以下のように示すことができる[*34]．まず, 確率密度関数 $p(x;\theta)$ から確率変数の変換 $y = f(x)$ により確率密度関数 $q(y;\theta)$ が，ヤコビアンの絶対値を $J(y) = \left|\dfrac{\mathrm{d}f^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right|$ として，$p(x;\theta)\,\mathrm{d}x = q(y;\theta)\,\mathrm{d}y$ で $\mathrm{d}x = J(y)\,\mathrm{d}y$ のように得られたとしよう．このとき，

$$\frac{\partial \log p}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \log\left(J^{-1}(y)\,q\right)}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \log q}{\partial \theta^i} \tag{144}$$

である．また，p に関して $2m-1$ 次の斉次関数 $G(p)$ と p の関数 $F(p)$ を用いて計量が次のように定義されているものとする：

$$\int G(p)\,pF'(p)\,\frac{\partial \log p}{\partial \theta^j}\,pF'(p)\,\frac{\partial \log p}{\partial \theta^i}\mathrm{d}x \tag{145}$$

ただし，

$$\frac{\partial F(p)}{\partial \theta^i} = pF'(p)\,\frac{\partial \log p}{\partial \theta^i} \tag{146}$$

を用いている．ここで，計量が確率変数の変数変換の下で不変であることを要請すると，

$$\begin{aligned}
&\int G(p)\,pF'(p)\,\frac{\partial \log p}{\partial \theta^j}\,pF'(p)\,\frac{\partial \log p}{\partial \theta^i}\mathrm{d}x \\
&= \int G\left(J^{-1}q\right)J^{-1}qF'\left(J^{-1}q\right)\frac{\partial \log q}{\partial \theta^j}\,J^{-1}qF'\left(J^{-1}q\right)\frac{\partial \log q}{\partial \theta^i}J\mathrm{d}y \\
&= \int G(q)\,q\left\{J^{-m}F'\left(J^{-1}q\right)\right\}\frac{\partial \log q}{\partial \theta^j}\,q\left\{J^{-m}F'\left(J^{-1}q\right)\right\}\frac{\partial \log q}{\partial \theta^i}\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{147}$$

より，

$$J^{-m}F'\left(J^{-1}q\right) = F'(q) \tag{148}$$

[*34] この証明は，甘利 [1]（p.69）によるものと本質的には同じである．甘利は，計量が確率変数の変換の下で不変であることを要求することで，$F'_\alpha(p)$ が p に関して斉次関数であることを導き，確率密度関数 $p(x;\theta)$ の α-表現である $F_\alpha(p) = \dfrac{2}{1-\alpha}p^{\frac{1-\alpha}{2}}$ を用いた計量が一意的であることを示している．ところで，甘利の証明では明確に示されてはいないが，G についても p に関して斉次関数であることが要求されている．

であり，$F'(q)$ が $(-m)$ 次の斉次関数であることがわかる．このとき，

$$qF'(q)\,\frac{\partial \log q}{\partial \theta^i} \propto q\, q^{-m}\,\frac{\partial \log q}{\partial \theta^i} = q^{1-m}\,\frac{\partial \log q}{\partial \theta^i} = \overset{B=m}{\ell_i}(q) \tag{149}$$

$$G(q)\, qF'(q)\,\frac{\partial \log q}{\partial \theta^j} \propto q^{2m-1}\, q\, q^{-m}\,\frac{\partial \log q}{\partial \theta^j} = q^{m}\,\frac{\partial \log q}{\partial \theta^j} = \overset{S=1-m}{\ell_j}(q) \tag{150}$$

となっているので，スコア関数の τ-アファイン共役は m を $1-m$ で置き換えたものであり，スコア関数とその τ-アファイン共役による縮約で定義される計量は一意的であることが示された．

さて，τ-アファイン部分空間 $\left(\check{\mathcal{P}} \times \mathbb{R}_+, U_\Omega^{r+1}\left(\check{\mathcal{P}}\right), e_\tau\right)$ は

$$\left(\check{\mathcal{P}} \times \mathbb{R}_+, U_\Omega^{r+1}\left(\check{\mathcal{P}}\right), e_\tau\right) = \left(\check{\mathcal{P}}, V_\Omega^r, e_\tau\right) \cup \left(\check{\mathcal{P}} \times \mathbb{R}_+, N_\tau\left(\check{\mathcal{P}}\right), e_\tau\right) \tag{151}$$

のように二つの τ-アファイン部分空間から構成され，

$$\left(\check{\mathcal{P}}, V_\Omega^r, e_\tau\right) \cap \left(\check{\mathcal{P}} \times \mathbb{R}_+, N_\tau\left(\check{\mathcal{P}}\right), e_\tau\right) = \left(\check{\mathcal{P}}, \{0\}, e_\tau\right) = \check{\mathcal{P}} \tag{152}$$

であり，$\check{\mathcal{P}}$ 上のすべての点 $\check{p}$ について

$$T_{\check{p}} U_\Omega^{r+1} = T_{\check{p}} V_\Omega^r \oplus T_{\check{p}} N_\tau \tag{153}$$

が成立するので，τ-アファイン部分空間 $\left(\check{\mathcal{P}}, V_\Omega^r, e_\tau\right)$ と $\left(\check{\mathcal{P}} \times \mathbb{R}_+, N_\tau\left(\check{\mathcal{P}}\right), e_\tau\right)$ は横断的に交わっていることがわかる．

つぎに，縮約により定義された計量を用いて *Body* 世界内での内積と *Soul* 世界内での内積をそれぞれ定義する．まず，τ は B または S であるとし，点 $\check{p} \in \check{\mathcal{P}}$ における *Body* 世界での接空間を $T_{\check{p}} U_B^{r+1}$ で表し，*Soul* 世界での接空間を $T_{\check{p}} U_S^{r+1}$ のように表すことにする．このとき，$T_{\check{p}} U_\tau^{r+1}$ の任意の 2 つの元 $\overset{\tau}{\ell}_\alpha$ と $\overset{\tau}{\ell}_\beta$ に対して内積を縮約を用いて次のように定める：

$$g\left(\overset{\tau}{\ell}_\alpha, \overset{\tau}{\ell}_\beta\right) = \left\langle \overset{S}{\ell}_\alpha \middle| \overset{B}{\ell}_\beta \right\rangle = g_{\alpha\beta} \tag{154}$$

このとき，二つのベクトル場 $X, Y : U_\tau^{r+1} \to TU_\tau^{r+1}$ が与えられたとき，点 $\check{p}$ でのベクトルは次のように決まる：

$$X\left(\overset{\tau}{\ell}\right) = \sum_{\alpha=0}^{r} X^\alpha \overset{\tau}{\ell}_\alpha \tag{155}$$

$$Y\left(\overset{\tau}{\ell}\right) = \sum_{\alpha=0}^{r} Y^\alpha \overset{\tau}{\ell}_\alpha \tag{156}$$

これらのベクトルの $T_{\check{p}}U_\tau^{r+1}$ 上での内積は

$$g\left(X\left(\overset{\tau}{\ell}\right),\ Y\left(\overset{\tau}{\ell}\right)\right)=\sum_{\alpha,\beta=0}^{r} g_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta \tag{157}$$

のように与えられる．

この関係を利用して，$T_{\check{p}}U_\tau^{r+1}$ の双対空間，すなわち余接空間 $T^*_{\check{p}}U_\tau^{r+1}$ の基底ベクトルを次のように定めることができる[*35]：

$$\overset{\tau}{\ell}{}^{\dagger\,\alpha}=\sum_{\beta=0}^{r} g^{\alpha\beta}\overset{\tau}{\ell}_\beta \tag{158}$$

ただし，$\left(g^{\alpha\beta}\right)$ は計量 $(g_{\alpha\beta})$ の逆行列である．この定義は，例えば，

$$\begin{aligned}\left\langle \overset{S}{\ell}_\gamma \,\middle|\, \overset{B}{\ell}{}^{\dagger\,\alpha}\right\rangle &= \left\langle \overset{S}{\ell}_\gamma \,\middle|\, \sum_{\beta=0}^{r} g^{\alpha\beta}\overset{B}{\ell}_\beta\right\rangle \\ &= \sum_{\beta=0}^{r} g^{\alpha\beta}\left\langle \overset{S}{\ell}_\gamma \,\middle|\, \overset{B}{\ell}_\beta\right\rangle \\ &= \sum_{\beta=0}^{r} g^{\alpha\beta}g_{\gamma\beta} \\ &= \delta^\alpha_\gamma \end{aligned}\tag{159}$$

が成立するように定められている．したがって，余接空間 $T^*_{\check{p}}U_\tau^{r+1}$ 上での内積は

$$\begin{aligned} g^*\left(\overset{\tau}{\ell}{}^{\dagger\,\alpha},\overset{\tau}{\ell}{}^{\dagger\,\beta}\right) &= \left\langle \overset{S}{\ell}{}^{\dagger\,\alpha} \,\middle|\, \overset{B}{\ell}{}^{\dagger\,\beta}\right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{\delta=0}^{r} g^{\alpha\delta}\overset{S}{\ell}_\delta \,\middle|\, \sum_{\gamma=0}^{r} g^{\beta\gamma}\overset{B}{\ell}_\gamma\right\rangle \\ &= \sum_{\delta,\gamma=0}^{r} g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}\left\langle \overset{S}{\ell}_\delta \,\middle|\, \overset{B}{\ell}_\gamma\right\rangle \\ &= \sum_{\delta,\gamma=0}^{r} g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}g_{\delta\gamma} \\ &= g^{\alpha\beta} \end{aligned}\tag{160}$$

[*35] 添字の上下に注意すること．

のようになっている．

2.5 接空間 $T\mathcal{R}_\Omega$ の直交分解

縮約は，τ-アファイン共役な関係にある量について定義されている，つまり，$Body$ 世界の量と $Soul$ 世界の量の組みを与えることで定義されていることに注意して，接空間 $T_{\check{p}}\mathcal{R}_\Omega$ の直交分解について考える．このとき，直交性は縮約を用いて定義された内積により与えられる．

まず，平行移動の仕方（$\tau = B$ または $\tau = S$）に応じて，それぞれ 2 種類の写像 $\overset{\tau}{\pi}_{\check{p}}$ と $\left(\overset{\tau}{\mathrm{id}} - \overset{\tau}{\pi}_{\check{p}}\right)$ を定義する：$f \in T_{\check{p}}\mathcal{R}_\Omega$ のとき，$Body$ 世界に対して，

$$\overset{B}{f}_{\parallel} = \overset{B}{\pi}_{\check{p}}(f) = g^{00}\left\langle \overset{S}{\ell}_0 \middle| f \right\rangle \overset{B}{\ell}_0 + \sum_{i,j=1}^{r} g^{ij}\left\langle \overset{S}{\ell}_j \middle| f \right\rangle \overset{B}{\ell}_i \tag{161}$$

$$\overset{B}{f}_{\perp} = \left(\overset{B}{\mathrm{id}} - \overset{B}{\pi}_{\check{p}}\right)(f) = f - g^{00}\left\langle \overset{S}{\ell}_0 \middle| f \right\rangle \overset{B}{\ell}_0 - \sum_{i,j=1}^{r} g^{ij}\left\langle \overset{S}{\ell}_j \middle| f \right\rangle \overset{B}{\ell}_i \tag{162}$$

$Soul$ 世界に対して，

$$\overset{S}{f}_{\parallel} = \overset{S}{\pi}_{\check{p}}(f) = g^{00}\left\langle f \middle| \overset{B}{\ell}_0 \right\rangle \overset{S}{\ell}_0 + \sum_{i,j=1}^{r} g^{ij}\left\langle f \middle| \overset{B}{\ell}_j \right\rangle \overset{S}{\ell}_i \tag{163}$$

$$\overset{S}{f}_{\perp} = \left(\overset{S}{\mathrm{id}} - \overset{S}{\pi}_{\check{p}}\right)(f) = f - g^{00}\left\langle f \middle| \overset{B}{\ell}_0 \right\rangle \overset{S}{\ell}_0 - \sum_{i,j=1}^{r} g^{ij}\left\langle f \middle| \overset{B}{\ell}_j \right\rangle \overset{S}{\ell}_i \tag{164}$$

ただし，$\overset{\tau}{\mathrm{id}}$ は以下のように恒等写像を表している：

$$\overset{\tau}{\mathrm{id}} : T_{\check{p}}\mathcal{R}_\Omega \to T_{\check{p}}\mathcal{R}_\Omega : f \mapsto f \tag{165}$$

縮約による内積に基づいて，ここで定義された 2 種類の写像 $\overset{\tau}{\pi}_{\check{p}}$ と $\left(\overset{\tau}{\mathrm{id}} - \overset{\tau}{\pi}_{\check{p}}\right)$ が直交分解を与えることを示そう．

以下，$Body$ 世界の場合について考えていく．$\overset{B}{f}_{\parallel}$ は，スコア関数 $\left\{\overset{B}{\ell}_0, \overset{B}{\ell}_1, \ldots, \overset{B}{\ell}_r\right\}$ により表されているので，

$$\overset{B}{f}_{\parallel} \in T_{\check{p}}U_B^{r+1} = T_{\check{p}}V_B^r \oplus T_{\check{p}}N_B \tag{166}$$

である．つまり，$\overset{B}{\pi}_{\check{p}}$ は接空間 $T_{\check{p}}U_B^{r+1}$ 上への射影になっている．一方，$\overset{B}{f}_{\perp}$ は，$\overset{B}{\ell}_0$ との内

積[*36]が

$$\left\langle \overset{S}{\ell}_0 \middle| \overset{B}{f}_\perp \right\rangle = \left\langle \overset{S}{\ell}_0 \middle| f \right\rangle - g^{00} \left\langle \overset{S}{\ell}_0 \middle| f \right\rangle \left\langle \overset{S}{\ell}_0 \middle| \overset{B}{\ell}_0 \right\rangle - \sum_{i,j=1}^{r} g^{ij} \left\langle \overset{S}{\ell}_j \middle| f \right\rangle \left\langle \overset{S}{\ell}_0 \middle| \overset{B}{\ell}_i \right\rangle$$
$$= 0 \tag{167}$$

となり，$\overset{B}{\ell}_k$ との内積が

$$\begin{aligned}\left\langle \overset{S}{\ell}_k \middle| \overset{B}{f}_\perp \right\rangle &= \left\langle \overset{S}{\ell}_k \middle| f \right\rangle - g^{00} \left\langle \overset{S}{\ell}_0 \middle| f \right\rangle \left\langle \overset{S}{\ell}_k \middle| \overset{B}{\ell}_0 \right\rangle - \sum_{i,j=1}^{r} g^{ij} \left\langle \overset{S}{\ell}_j \middle| f \right\rangle \left\langle \overset{S}{\ell}_k \middle| \overset{B}{\ell}_i \right\rangle \\ &= \left\langle \overset{S}{\ell}_k \middle| f \right\rangle - \sum_{i,j=1}^{r} g^{ij} g_{ki} \left\langle \overset{S}{\ell}_j \middle| f \right\rangle \\ &= \left\langle \overset{S}{\ell}_k \middle| f \right\rangle - \sum_{j=1}^{r} \delta_k^j \left\langle \overset{S}{\ell}_j \middle| f \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \tag{168}$$

となることより，$\overset{B}{f}_\perp$ は，接空間 $T_{\check{p}}U_B^{r+1}$ のすべての元と直交することがわかる．そこで，$T_{\check{p}}U_B^{r+1}$ の直交補空間を $T_{\check{p}}W_B$ とすれば，

$$\overset{B}{f}_\perp \in T_{\check{p}}W_B \tag{169}$$

である．つまり，$\left(\mathrm{id} - \overset{B}{\pi}_{\check{p}}\right)$ は直交補空間 $T_{\check{p}}W_B$ 上への射影になっている．また，$\overset{B}{f}_\parallel$ と $\overset{B}{f}_\perp$ は，互いに直交しており

$$f = \overset{B}{f}_\parallel + \overset{B}{f}_\perp \in T_{\check{p}}\mathcal{R}_\Omega \tag{170}$$

が成立するため，$T_{\check{p}}\mathcal{R}_\Omega$ は，

$$T_{\check{p}}\mathcal{R}_\Omega = T_{\check{p}}W_B \oplus T_{\check{p}}U_B^{r+1} = T_{\check{p}}W_B \oplus T_{\check{p}}V_B^r \oplus T_{\check{p}}N_B \tag{171}$$

のような直和に分解できることがわかる．

[*36] $\overset{B}{\ell}_\alpha$ と $\overset{B}{\ell}_\beta$ との内積は，$g\left(\overset{B}{\ell}_\alpha, \overset{B}{\ell}_\beta\right) = \left\langle \overset{S}{\ell}_\alpha \middle| \overset{B}{\ell}_\beta \right\rangle$ で与えられることを思い出そう．

次に，$Soul$ 世界の場合について考えてる．$\overset{S}{f}_{\parallel}$ は，スコア関数 $\left\{\overset{S}{\ell}_0, \overset{S}{\ell}_1, \ldots, \overset{S}{\ell}_r\right\}$ により表されているので，

$$\overset{S}{f}_{\parallel} \in T_{\check{p}} U_S^{r+1} = T_{\check{p}} V_S^r \oplus T_{\check{p}} N_S \tag{172}$$

である．つまり，$\overset{S}{\pi}_{\check{p}}$ は接空間 $T_{\check{p}} U_S^{r+1}$ 上への射影になっている．一方，$\overset{S}{f}_{\perp}$ は，$\overset{S}{\ell}_0$ との内積は

$$\begin{aligned}\left\langle \overset{S}{f}_{\perp} \middle| \overset{B}{\ell}_0 \right\rangle &= \left\langle f \middle| \overset{B}{\ell}_0 \right\rangle - g^{00} \left\langle f \middle| \overset{B}{\ell}_0 \right\rangle \left\langle \overset{S}{\ell}_0 \middle| \overset{B}{\ell}_0 \right\rangle - \sum_{i,j=1}^{r} g^{ij} \left\langle f \middle| \overset{B}{\ell}_j \right\rangle \left\langle \overset{S}{\ell}_i \middle| \overset{B}{\ell}_0 \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \tag{173}$$

となり，$\overset{S}{\ell}_k$ との内積が

$$\begin{aligned}\left\langle \overset{S}{f}_{\perp} \middle| \overset{B}{\ell}_k \right\rangle &= \left\langle f \middle| \overset{B}{\ell}_k \right\rangle - g^{00} \left\langle f \middle| \overset{B}{\ell}_0 \right\rangle \left\langle \overset{S}{\ell}_0 \middle| \overset{B}{\ell}_k \right\rangle - \sum_{i,j=1}^{r} g^{ij} \left\langle f \middle| \overset{B}{\ell}_j \right\rangle \left\langle \overset{S}{\ell}_i \middle| \overset{B}{\ell}_k \right\rangle \\ &= \left\langle f \middle| \overset{B}{\ell}_k \right\rangle - \sum_{i,j=1}^{r} g^{ij} g_{ik} \left\langle f \middle| \overset{B}{\ell}_j \right\rangle \\ &= \left\langle f \middle| \overset{B}{\ell}_k \right\rangle - \sum_{j=1}^{r} \delta_k^j \left\langle f \middle| \overset{B}{\ell}_j \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \tag{174}$$

となるので，$\overset{S}{f}_{\perp}$ は，接空間 $T_{\check{p}} U_S^{r+1}$ のすべての元と直交することがわかる．そこで，$T_{\check{p}} U_S^{r+1}$ の直交補空間を $T_{\check{p}} W_S$ とすれば，

$$\overset{S}{f}_{\perp} \in T_{\check{p}} W_S \tag{175}$$

である．つまり，$\left(\overset{S}{\mathrm{id}} - \overset{S}{\pi}_{\check{p}}\right)$ は直交補空間 $T_{\check{p}} W_S$ 上への射影になっている．また，$\overset{S}{f}_{\parallel}$ と $\overset{S}{f}_{\perp}$ は，互いに直交しており

$$f = \overset{S}{f}_{\parallel} + \overset{S}{f}_{\perp} \in T_{\check{p}} \mathcal{R}_{\Omega} \tag{176}$$

が成立するため，$T_{\check{p}} \mathcal{R}_{\Omega}$ は，

$$T_{\check{p}} \mathcal{R}_{\Omega} = T_{\check{p}} W_S \oplus T_{\check{p}} U_S^{r+1} = T_{\check{p}} W_S \oplus T_{\check{p}} V_S^r \oplus T_{\check{p}} N_S \tag{177}$$

のような直和に分解できることがわかる．

まとめると，$\tau = B$ または $\tau = S$ として，接空間 $T_{\check{p}}\mathcal{R}_\Omega$ は 2 種類の射影，すなわち $T_{\check{p}}U_\tau^{r+1}$ 上への射影 $\overset{\tau}{\pi}_{\check{p}}$ と $T_{\check{p}}W_\tau$ 上への射影 $\left(\overset{\tau}{\mathrm{id}} - \overset{\tau}{\pi}_{\check{p}}\right)$ により

$$T_{\check{p}}\mathcal{R}_\Omega = T_{\check{p}}W_\tau \oplus T_{\check{p}}U_\tau^{r+1} = T_{\check{p}}W_\tau \oplus T_{\check{p}}V_\tau^r \oplus T_{\check{p}}N_\tau \tag{178}$$

のように直和に分解することができる．

2.6 クラメール・ラオの不等式

ここでは，前の章で導入した 2 種類の射影を用いた $T_{\check{p}}\mathcal{R}_\Omega$ の直和分解を利用して，クラメール・ラオの不等式を導く．まず，N 個の i.i.d. サンプル $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ が与えられたとき，尤度 $L(\boldsymbol{\theta})$ は，

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{k=1}^{N} \check{p}(x_k; \boldsymbol{\theta}) \tag{179}$$

のように確率密度関数 $\check{p}(x_k; \boldsymbol{\theta})$ の積[*37]で与えられる．ただし，$\boldsymbol{\theta} = \left(\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r\right)$ である．

このとき，なんらかの手法により，i.i.d. サンプル $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ に基づいてパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ を推定し，その推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ が不偏推定量[*38]になっているものと仮定する：

$$\int \mathrm{D}x\, L\, \hat{\theta}^i = \theta^i \tag{180}$$

ただし，

$$\mathrm{D}x = \prod_{k=1}^{N} \mathrm{d}x_k \tag{181}$$

である．

スコア関数は，*Body* 世界では

$$\overset{B}{\ell}_0 = L^{1-s} \tag{182}$$

$$\overset{B}{\ell}_m = L^{1-s} \frac{\partial \log L}{\partial \theta^m} = \overset{B}{\ell}_0 \frac{\partial \log L}{\partial \theta^m} \tag{183}$$

[*37] N 個のサンプルは，i.i.d. であることが仮定されているので，N 個のサンプルが得られる確率は個々のサンプル x_i が得られる確率の積，つまり同時確率で与えられる．

[*38] 真の分確率分布によるパラメータの推定量の期待値が真のパラメータに一致するとき，パラメータの推定量を不偏推定量という．

となり，$Soul$ 世界では

$$\overset{S}{\ell}_0 = -L^s \tag{184}$$

$$\overset{S}{\ell}_n = L^s \frac{\partial \log L}{\partial \theta^n} = -\overset{S}{\ell}_0 \frac{\partial \log L}{\partial \theta^n} \tag{185}$$

となる．

このとき，パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の不偏推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ に対して，次のような量を考える：

$$\overset{B}{f^i} = \hat{\theta}^i \overset{B}{\ell}_0 = \hat{\theta}^i L^{1-s} \tag{186}$$

$$\overset{S}{f^j} = \hat{\theta}^j \overset{S}{\ell}_0 = -\hat{\theta}^j L^s \tag{187}$$

ここで，$\hat{\theta}^i \overset{\tau}{\ell}_0 \in T_L U_\tau^{r+1}$ である．$\hat{\theta}^i \overset{\tau}{\ell}_0$ のように表されてはいるが，$\hat{\theta}^i \overset{\tau}{\ell}_0 \in T_L N_\tau$ であるとは限らないので注意が必要である．これは，すべてのスコア関数を $\overset{\tau}{\ell}_0$ に比例するように書き直せることからもわかる．

また，計量は

$$\begin{aligned}
\left\langle \overset{S}{\ell}_n \middle| \overset{B}{\ell}_m \right\rangle &= \int \mathrm{D}x \left(L^s \frac{\partial \log L}{\partial \theta^n} \right) \left(L^{1-s} \frac{\partial \log L}{\partial \theta^m} \right) \\
&= \int \mathrm{D}x\, L \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \log \check{p}(x_k; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta^n} \right) \left(\sum_{h=1}^{N} \frac{\partial \log \check{p}(x_h; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta^m} \right) \\
&= N g_{mn}
\end{aligned} \tag{188}$$

のように N 倍されるので，計量の逆行列は $\dfrac{1}{N} g^{ij}$ となる．したがって，射影を行うときには，この $\dfrac{1}{N} g^{ij}$ を用いる必要があるので注意すること．

さて，$\overset{\tau}{f}{}^i_{\parallel}$ と $\overset{\tau}{f}{}^i_{\perp}$ を，これから求めるために，あらかじめ必要な計算を以下に行ってお

く：まず，$\overset{B}{f^i}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\sum_{m,n=1}^{r} g^{mn}\left\langle \overset{S}{\ell_n} \middle| \overset{B}{f^i} \right\rangle \overset{B}{\ell_m} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m,n=1}^{r} g^{mn}\left(\int \mathrm{D}x \left(L^s\frac{\partial \log L}{\partial \theta^n}\right)\left(\hat{\theta}^i L^{1-s}\right)\right)\overset{B}{\ell_m} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m,n=1}^{r} g^{mn}\left(\int \mathrm{D}x\, \frac{\partial L}{\partial \theta^n}\hat{\theta}^i\right)\overset{B}{\ell_m} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m,n=1}^{r} g^{mn}\frac{\partial}{\partial \theta^n}\left(\int \mathrm{D}x\, L\,\hat{\theta}^i\right)\overset{B}{\ell_m} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m,n=1}^{r} g^{mn}\frac{\partial \theta^i}{\partial \theta^n}\overset{B}{\ell_m} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m,n=1}^{r} g^{mn}\,\delta^i_n\,\overset{B}{\ell_m} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{r} g^{im}\overset{B}{\ell_m}
\end{aligned}
\tag{189}
$$

と

$$
\begin{aligned}
g^{00}\left\langle \overset{S}{\ell_0} \middle| \overset{B}{f^i} \right\rangle \overset{B}{\ell_0} &= -\left(\int \mathrm{D}x\ (-L^s)\left(\hat{\theta}^i L^{1-s}\right)\right)\overset{B}{\ell_0} \\
&= \left(\int \mathrm{D}x\, L\,\hat{\theta}^i\right)\overset{B}{\ell_0} \\
&= \theta^i \overset{B}{\ell_0}
\end{aligned}
\tag{190}
$$

が得られる．次に，$\overset{S}{f^j}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\sum_{m,n=1}^{r} g^{mn}\left\langle \overset{S}{f^j}\middle|\overset{B}{\ell_m}\right\rangle \overset{S}{\ell_n} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m,n=1}^{r} g^{mn}\left(\int \mathrm{D}x\,\left(-\hat{\theta}^j L^s\right)\left(L^{1-s}\frac{\partial \log L}{\partial \theta^m}\right)\right)\overset{S}{\ell_n} \\
&= -\frac{1}{N}\sum_{m,n=1}^{r} g^{mn}\left(\int \mathrm{D}x\,\frac{\partial L}{\partial \theta^m}\hat{\theta}^j\right)\overset{S}{\ell_n} \\
&= -\frac{1}{N}\sum_{m,n=1}^{r} g^{mn}\frac{\partial}{\partial \theta^m}\left(\int \mathrm{D}x\,L\,\hat{\theta}^j\right)\overset{S}{\ell_n} \\
&= -\frac{1}{N}\sum_{m,n=1}^{r} g^{mn}\frac{\partial \theta^j}{\partial \theta^m}\overset{S}{\ell_n} \\
&= -\frac{1}{N}\sum_{m,n=1}^{r} g^{mn}\,\delta^j_m\,\overset{S}{\ell_n} \\
&= -\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{r} g^{jn}\overset{S}{\ell_n}
\end{aligned} \tag{191}
$$

と

$$
\begin{aligned}
g^{00}\left\langle \overset{S}{f^j}\middle|\overset{B}{\ell_0}\right\rangle \overset{S}{\ell_0} &= -\left(\int \mathrm{D}x\,\left(-\hat{\theta}^j L^s\right)\left(L^{1-s}\right)\right)\overset{S}{\ell_0} \\
&= \left(\int \mathrm{D}x\,L\,\hat{\theta}^j\right)\overset{S}{\ell_0} \\
&= \theta^j\overset{S}{\ell_0}
\end{aligned} \tag{192}
$$

が得られる．

これらを利用することで，$\overset{\tau}{f^i}$ の $T_L U_\tau^{r+1}$ 上への射影 $\overset{\tau}{f^i_\parallel}$ と $T_L W_\tau$ 上への射影 $\overset{\tau}{f^i_\perp}$ を求めると，

$$
A^i = \left(\hat{\theta}^i - \theta^i\right) - \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{r} g^{im}\frac{\partial \log L}{\partial \theta^m} \tag{193}
$$

として，$\overset{B}{f^i}$ に対しては

$$\overset{B}{f^i_{\parallel}} = \theta^i \overset{B}{\ell_0} + \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{r} g^{im}\overset{B}{\ell_m} \tag{194}$$

$$\begin{aligned}
\overset{B}{f^i_{\perp}} &= \overset{B}{f^i} - \overset{B}{f^i_{\parallel}} \\
&= \left(\hat{\theta}^i - \theta^i\right)\overset{B}{\ell_0} - \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{r} g^{im}\overset{B}{\ell_m} \\
&= \left\{\left(\hat{\theta}^i - \theta^i\right) - \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{r} g^{im}\frac{\partial \log L}{\partial \theta^m}\right\}\overset{B}{\ell_0} \\
&= A^i\,\overset{B}{\ell_0}
\end{aligned} \tag{195}$$

となり，$\overset{S}{f^j}$ に対しては

$$\overset{S}{f^j_{\parallel}} = \theta^j \overset{S}{\ell_0} - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{r} g^{jn}\overset{S}{\ell_n} \tag{196}$$

$$\begin{aligned}
\overset{S}{f^j_{\perp}} &= \overset{S}{f^j} - \overset{S}{f^j_{\parallel}} \\
&= \left(\hat{\theta}^j - \theta^j\right)\overset{S}{\ell_0} + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{r} g^{jn}\overset{S}{\ell_n} \\
&= \left\{\left(\hat{\theta}^j - \theta^j\right) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{r} g^{jn}\frac{\partial \log L}{\partial \theta^n}\right\}\overset{S}{\ell_0} \\
&= A^j\,\overset{S}{\ell_0}
\end{aligned} \tag{197}$$

となる．

これから，$\left\langle \overset{S}{f^j_{\perp}} \middle| \overset{B}{f^i_{\perp}} \right\rangle$ を評価していくが，まず，必要になる量をあらかじめ求めておく：

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\hat{\theta}^j - \theta^j\right)\overset{S}{\ell_0} \middle| \left(\hat{\theta}^i - \theta^i\right)\overset{B}{\ell_0} \right\rangle &= \int \mathrm{D}x\,\left(-L^s\left(\hat{\theta}^j - \theta^j\right)\right)\left(\left(\hat{\theta}^i - \theta^i\right)L^{1-s}\right) \\
&= -\int \mathrm{D}x\,L\left(\hat{\theta}^i - \theta^i\right)\left(\hat{\theta}^j - \theta^j\right) \\
&= -\mathrm{Cov}\left(\hat{\theta}^i, \hat{\theta}^j\right)
\end{aligned} \tag{198}$$

ここで，$\mathrm{Cov}\left(\hat{\theta}^i, \hat{\theta}^j\right)$ はパラメータの推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ の分散・共分散行列である．また，

$$\begin{aligned}
\left\langle \overset{S}{\ell_n} \middle| \left(\hat{\theta}^i - \theta^i\right) \overset{B}{\ell_0} \right\rangle &= \int \mathrm{D}x \, \left(L^s \frac{\partial \log L}{\partial \theta^n}\right) \left(\left(\hat{\theta}^i - \theta^i\right) L^{1-s}\right) \\
&= \int \mathrm{D}x \, \frac{\partial L}{\partial \theta^n} \left(\hat{\theta}^i - \theta^i\right) \\
&= \int \mathrm{D}x \, \frac{\partial L}{\partial \theta^n} \hat{\theta}^i - \theta^i \int \mathrm{D}x \, \frac{\partial L}{\partial \theta^n} \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta^n} \int \mathrm{D}x \, L \hat{\theta}^i - \theta^i \frac{\partial}{\partial \theta^n} \int \mathrm{D}x \, L \\
&= \frac{\partial \theta^i}{\partial \theta^n} - \theta^i \frac{\partial 1}{\partial \theta^n} \\
&= \delta^i_n
\end{aligned} \tag{199}$$

と

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\hat{\theta}^j - \theta^j\right) \overset{S}{\ell_0} \middle| \overset{B}{\ell_m} \right\rangle &= \int \mathrm{D}x \, \left(-\left(\hat{\theta}^j - \theta^j\right) L^s\right) \left(L^{1-s} \frac{\partial \log L}{\partial \theta^m}\right) \\
&= -\int \mathrm{D}x \, \frac{\partial L}{\partial \theta^m} \left(\hat{\theta}^j - \theta^j\right) \\
&= -\int \mathrm{D}x \, \frac{\partial L}{\partial \theta^m} \hat{\theta}^j + \theta^j \int \mathrm{D}x \, \frac{\partial L}{\partial \theta^m} \\
&= -\frac{\partial}{\partial \theta^m} \int \mathrm{D}x \, L \hat{\theta}^j + \theta^j \frac{\partial}{\partial \theta^m} \int \mathrm{D}x \, L \\
&= -\frac{\partial \theta^j}{\partial \theta^m} - \theta^j \frac{\partial 1}{\partial \theta^m} \\
&= -\delta^j_m
\end{aligned} \tag{200}$$

も得られる．

これらを用いて，$\left\langle \overset{S}{f^j_\perp} \middle| \overset{B}{f^i_\perp} \right\rangle$ を評価すると，

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \overset{S}{f^j_\perp} \middle| \overset{B}{f^i_\perp} \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\hat{\theta}^j - \theta^j\right) \overset{S}{\ell_0} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{r} g^{jn} \overset{S}{\ell_n} \middle| \left(\hat{\theta}^i - \theta^i\right) \overset{B}{\ell_0} - \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{r} g^{im} \overset{B}{\ell_m} \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\hat{\theta}^j - \theta^j\right) \overset{S}{\ell_0} \middle| \left(\hat{\theta}^i - \theta^i\right) \overset{B}{\ell_0} \right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{r} g^{jn} \left\langle \overset{S}{\ell_n} \middle| \left(\hat{\theta}^i - \theta^i\right) \overset{B}{\ell_0} \right\rangle - \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{r} g^{im} \left\langle \left(\hat{\theta}^j - \theta^j\right) \overset{S}{\ell_0} \middle| \overset{B}{\ell_m} \right\rangle \\
&\quad - \frac{1}{N^2} \sum_{m,n=1}^{r} g^{jn} g^{im} \left\langle \overset{S}{\ell_n} \middle| \overset{B}{\ell_m} \right\rangle \\
&= -\mathrm{Cov}\left(\hat{\theta}^i, \hat{\theta}^j\right) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{r} g^{jn} \delta^i_n - \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{r} g^{im} \left(-\delta^j_m\right) \\
&\quad - \frac{1}{N^2} \sum_{m,n=1}^{r} g^{jn} g^{im} N g_{mn} \\
&= -\left\{ \mathrm{Cov}\left(\hat{\theta}^i, \hat{\theta}^j\right) - \frac{1}{N} g^{ij} \right\}
\end{aligned}
\tag{201}
$$

のようになる．

一方，

$$
\begin{aligned}
\left\langle \overset{S}{f^j_\perp} \middle| \overset{B}{f^i_\perp} \right\rangle &= \left\langle A^j \overset{S}{\ell_0} \middle| A^i \overset{B}{\ell_0} \right\rangle \\
&= -\int \mathrm{D}x \, L \, A^j \, A^i \\
&= -\int \mathrm{D}x \left(\sqrt{L} \, A^j\right) \left(\sqrt{L} \, A^i\right)
\end{aligned}
\tag{202}
$$

となるので，右辺は分散・共分散型行列[*39]の (j, i)-成分に -1 をかけたものとみなすこと

[*39] 行列 A が，ベクトルを用いて $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T$ のような型で表されるとき，行列 A を分散・共分散型行列とよぶ．このとき，A に関する 2 次形式は，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{a}\right) \left(\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x}\right) = \left(\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x}\right)^2 \geq 0$

ができる．一般に，分散・共分散型行列は半正定値行列になるので，

$$\left(\left\langle \overset{S}{f^j_\perp} \middle| \overset{B}{f^i_\perp} \right\rangle\right) \leq 0 \tag{203}$$

が成立する[*40]．

したがって，

$$\left(\mathrm{Cov}\left(\hat{\theta}^i, \hat{\theta}^j\right) - \frac{1}{N} g^{ij}\right) \geq 0 \tag{204}$$

が得られる．これは，まさにクラメール・ラオの不等式である．等号は，$A^i = 0$ のときであり，そのときに限る．つまり，

$$A^i = \left(\hat{\theta}^i - \theta^i\right) - \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{r} g^{im} \frac{\partial \log L}{\partial \theta^m} = 0 \tag{205}$$

が成立するときであり，このとき，

$$\hat{\theta}^i = \theta^i + \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{r} g^{im} \frac{\partial \log L}{\partial \theta^m} \tag{206}$$

$$= \theta^i + \sum_{m=1}^{r} g^{im} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \log p(x_k; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta^m}\right) \tag{207}$$

である．

3 双対接続と曲率

3.1 双対接続

ここでは，接空間 TU_Ω^{r+1} 上に τ-アファイン構造に基づいた双対接続 $\overset{B}{\nabla}$ と $\overset{S}{\nabla}$ をコシュールの恒等式により導入する．

まず，任意のベクトル場 $X : \check{\mathcal{P}} \to T_{\check{p}} U_\Omega^{r+1}$，つまり，

$$X = \sum_{\alpha=0}^{r} X^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \tag{208}$$

が成立するので，分散・共分散型行列 A は半正定値行列である．また，半正定値行列の和は，半正定値行列である．

[*40] $\left(a_{ij}\right)$ または $\left(a^{ij}\right)$ は行列を表している．

は，点 $\check{p}$ における接空間 $T_{\check{p}}U_{\Omega}^{r+1}$ の基底ベクトルが $\left\{\overset{\tau}{\ell}_0, \overset{\tau}{\ell}_1, \ldots, \overset{\tau}{\ell}_r\right\}$ なので，

$$X\left(\overset{\tau}{\ell}\right) = \sum_{\alpha=0}^{r} X^{\alpha}\, \overset{\tau}{\ell}_{\alpha} \in T_{\check{p}}U_{\Omega}^{r+1} \tag{209}$$

のように表すことができ，X^{α} は $\left(\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^r\right)$ の関数であり，$X\left(\overset{\tau}{\ell}\right)$ は確率変数 x と $\left(\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^r\right)$ の関数である．

今後，アインシュタインの和の規約を導入し，和をとる記号 $\sum$ を書かないようにしていく．つまり，上下に同じ添字が現れたときには，常に和をとるものとする．また，上下に繰り返し現れる添字がギリシャ文字の場合には，和をとる範囲は 0 から r までであり，ラテン文字の場合には，1 から r までであるので注意すること．たとえば，

$$X^{\alpha\beta ij}Y_{\alpha\gamma k} \quad \text{は，} \sum_{\alpha=0}^{r} X^{\alpha\beta ij}Y_{\alpha\gamma k} \quad \text{のことであり，}$$

$$X^{\alpha\beta ik}Y_{\gamma\delta k} \quad \text{は，} \sum_{k=1}^{r} X^{\alpha\beta ik}Y_{\gamma\delta k} \quad \text{のことである．}$$

また，上下に同じ添字が現れていても，和をとらずに単なる掛け算になっている状況を表すときには，その都度指摘する[*41]．

さらに，ベクトル X の変化率がベクトル Y に沿った向きではどのくらいかを表す記号として，$\overset{\tau}{\nabla}_Y X$ ではなく，

$$\overset{\tau}{\nabla} X(Y) \tag{210}$$

を用いることにする[*42]．これにより変化量の線形性を強調し，見た目に意味を明確に反

[*41] 物理では，上下に同じ添字が現れているにもかかわらず，和をとらないときには，添字を大文字にして表すこともある．つまり，$X^{Aij\alpha}Y_{Ak\beta}$ は上下に同じ添字 A が現れているけれども大文字なので，単なる掛け算であり，添字 A について和はとらない．

[*42] 関数 f の変化率（全微分）がベクトル $\boldsymbol{v}$ に沿った向きではどのくらいかを表す量が，$\mathrm{d}f(\boldsymbol{v})$ と表されることに対応した定義である．

映できる．このとき，式 (210) は，次のように計算できる[*43]：

$$
\begin{aligned}
\overset{\tau}{\nabla}X(Y) &= \mathrm{d}X(Y) + X^\alpha \overset{\tau}{\nabla}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(Y) \\
&= Y^\gamma\left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial\theta^\beta}\mathrm{d}\theta^\beta \otimes \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta^\gamma}\right) + X^\alpha Y^\beta \overset{\tau}{\nabla}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\right) \\
&= Y^\gamma \frac{\partial X^\alpha}{\partial\theta^\beta}\mathrm{d}\theta^\beta\left(\frac{\partial}{\partial\theta^\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + X^\alpha Y^\beta \overset{\tau}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\gamma} \\
&= Y^\gamma \frac{\partial X^\alpha}{\partial\theta^\beta}\delta^\beta_\gamma \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + X^\alpha Y^\beta \overset{\tau}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\gamma} \\
&= \left(\frac{\partial X^\gamma}{\partial\theta^\beta} + \overset{\tau}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}X^\alpha\right)Y^\beta \frac{\partial}{\partial\theta^\gamma}
\end{aligned}
\tag{211}
$$

ただし，

$$
\mathrm{d}\theta^\beta\left(Y^\gamma\frac{\partial}{\partial\theta^\gamma}\right) = Y^\gamma\mathrm{d}\theta^\beta\left(\frac{\partial}{\partial\theta^\gamma}\right) = Y^\gamma\delta^\beta_\gamma = Y^\beta \tag{212}
$$

$$
\overset{\tau}{\nabla}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\right) = \overset{\tau}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\gamma} \tag{213}
$$

である[*44]．また，点 $\check{p}$ を与えると，

$$
\overset{\tau}{\nabla}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\right)\left(\overset{\tau}{\ell}\right) = \overset{\tau}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}\,\overset{\tau}{\ell}_\gamma\ . \tag{214}
$$

となり，関数になる．

さて，接空間 $T_{\check{p}}U_\Omega^{r+1}$ は，各点でアフィン部分空間 $\left(\check{\mathcal{P}}\times\mathbb{R}_+, U_\Omega^{r+1}, e_\tau\right)$ と同型なので，平坦な捩れのない空間である．そこで，コシュールの恒等式を用いて接続を定義することにする．ベクトル場 X, Y, Z が与えられたとき，τ-アファイン構造に適した形にコシュールの恒等式を拡張すると，

$$
\begin{aligned}
&g\left(X, \overset{B}{\nabla}W(V)\right) + g\left(\overset{S}{\nabla}W(V), X\right) \\
&= Vg(W,X) + Wg(V,X) - Xg(V,W) \\
&\quad - g(V,[W,X]) - g(W,[V,X]) + g(X,[V,W])
\end{aligned}
\tag{215}
$$

---

*43 和をとる添字は，単に和をとるためだけに使用されるので，和をとる範囲さえ誤解がないように注意しておけば何を用いてもよく，自由に変更できる．たとえば，A^iB_i を A^kB_k としても全く問題はない．

*44 $\mathrm{d}f(V) = \dfrac{\partial f}{\partial\theta^\alpha}\mathrm{d}\theta^\alpha(V) = V^\beta\dfrac{\partial f}{\partial\theta^\alpha}\mathrm{d}\theta^\alpha\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta^\beta}\right) = V^\beta\dfrac{\partial f}{\partial\theta^\alpha}\delta^\alpha_\beta = V^\alpha\dfrac{\partial f}{\partial\theta^\alpha} = V(f)$

のようになる．

コシュールの恒等式は，計量が平行移動で保存されるという条件

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial\theta^\gamma} = \overset{S}{\Gamma}{}^{\delta}_{\alpha\gamma}\, g_{\delta\beta} + \overset{B}{\Gamma}{}^{\delta}_{\beta\gamma}\, g_{\delta\alpha} \tag{216}$$

と，捩率が 0 という条件

$$\overset{\tau}{\nabla} W(V) - \overset{\tau}{\nabla} V(W) = [\,V, W\,] \tag{217}$$

を総合することで導出されるものである．$\overset{S}{\Gamma}{}^{\delta}_{\alpha\gamma}$ と $\overset{B}{\Gamma}{}^{\delta}_{\beta\gamma}$ が登場する理由は，片方だけでは通常のコシュールの恒等式を成立させることができないためである．両方の接続を考えると，τ-アファイン構造に適した形にコシュールの恒等式を拡張することで成立させることができる．これは，$\tau = B = S = \dfrac{1}{2}$ のときを除いて，

$$\left\langle Z\left(X\left(\overset{S}{\ell}\right)\right)\middle| Y\left(\overset{B}{\ell}\right)\right\rangle \neq \left\langle Y\left(\overset{S}{\ell}\right)\middle| Z\left(X\left(\overset{B}{\ell}\right)\right)\right\rangle \tag{218}$$

となるためである[*45]．

ベクトル場 X と Y の点 $\tilde{p}$ における内積が縮約を用いて，

$$g(X,Y) = \left\langle X\left(\overset{S}{\ell}\right)\middle| Y\left(\overset{B}{\ell}\right)\right\rangle = \left\langle Y\left(\overset{S}{\ell}\right)\middle| X\left(\overset{B}{\ell}\right)\right\rangle \tag{219}$$

のように表されることに注意して，拡張されたコシュールの恒等式の両辺を計算してみると，左辺は，

$$\text{左辺} = \left\langle X\left(\overset{S}{\ell}\right) \,\middle|\, \left(\overset{B}{\nabla} W(V)\right)\left(\overset{B}{\ell}\right)\right\rangle + \left\langle \left(\overset{S}{\nabla} W(V)\right)\left(\overset{S}{\ell}\right) \,\middle|\, X\left(\overset{B}{\ell}\right)\right\rangle \tag{220}$$

となる．次に，右辺を計算するために少し準備をする．

$$\begin{aligned}
&\left\langle W\left(\overset{S}{\ell}\right) \,\middle|\, X\left(V\left(\overset{B}{\ell}\right)\right)\right\rangle - \left\langle X\left(V\left(\overset{S}{\ell}\right)\right) \,\middle|\, W\left(\overset{B}{\ell}\right)\right\rangle \\
&\quad + \left\langle W\left(V\left(\overset{S}{\ell}\right)\right) \,\middle|\, X\left(\overset{B}{\ell}\right)\right\rangle - \left\langle X\left(\overset{S}{\ell}\right) \,\middle|\, W\left(V\left(\overset{B}{\ell}\right)\right)\right\rangle \\
&= \int \mathrm{d}x\, W^\alpha X^\beta V^\gamma A_{\alpha\beta\gamma}
\end{aligned} \tag{221}$$

[*45] 例えば，左辺からは $\overset{S}{\ell}$ の 2 階微分の項から s に比例した項が現れ，右辺からは $\overset{B}{\ell}$ の 2 階微分の項から $1-s$ に比例した項が現れる．

とおくと，すべての可能な添字の組 (α, β, γ) について

$$A_{00\gamma} = 0 \tag{222}$$

$$A_{0i0} = -A_{i00} = -(1-2s)\,\check{p}\,t_i \tag{223}$$

$$A_{0ij} = -A_{i0j} = -2\check{p}\,(t_i t_j + t_{ij}) \tag{224}$$

$$A_{ij\gamma} = -A_{ji\gamma} = 0 \tag{225}$$

のようになるため，積分を実行すれば，式 (221) の値は 0 となる．したがって，

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= V\left\langle W\binom{S}{\ell}\middle| X\binom{B}{\ell}\right\rangle + W\left\langle V\binom{S}{\ell}\middle| X\binom{B}{\ell}\right\rangle - X\left\langle V\binom{S}{\ell}\middle| W\binom{B}{\ell}\right\rangle \\
&\quad - \left\langle V\binom{S}{\ell}\middle| [W,X]\binom{B}{\ell}\right\rangle - \left\langle W\binom{S}{\ell}\middle| [V,X]\binom{B}{\ell}\right\rangle + \left\langle X\binom{S}{\ell}\middle| [V,W]\binom{B}{\ell}\right\rangle \\
&= \left\langle X\binom{S}{\ell}\middle| V\left(W\binom{B}{\ell}\right)\right\rangle + \left\langle V\left(W\binom{S}{\ell}\right)\middle| X\binom{B}{\ell}\right\rangle \\
&\quad + \left\langle W\binom{S}{\ell}\middle| X\left(V\binom{B}{\ell}\right)\right\rangle - \left\langle X\left(V\binom{S}{\ell}\right)\middle| W\binom{B}{\ell}\right\rangle \\
&\quad + \left\langle W\left(V\binom{S}{\ell}\right)\middle| X\binom{B}{\ell}\right\rangle - \left\langle X\binom{S}{\ell}\middle| W\left(V\binom{B}{\ell}\right)\right\rangle \\
&= \left\langle X\binom{S}{\ell}\middle| V\left(W\binom{B}{\ell}\right)\right\rangle + \left\langle V\left(W\binom{S}{\ell}\right)\middle| X\binom{B}{\ell}\right\rangle
\end{aligned} \tag{226}$$

となる．

よって，

$$\begin{aligned}
&\left\langle X\binom{S}{\ell} \;\middle|\; \left(\overset{B}{\nabla} W(V)\right)\binom{B}{\ell}\right\rangle + \left\langle \left(\overset{S}{\nabla} W(V)\right)\binom{S}{\ell} \;\middle|\; X\binom{B}{\ell}\right\rangle \\
&= \left\langle X\binom{S}{\ell}\middle| V\left(W\binom{B}{\ell}\right)\right\rangle + \left\langle V\left(W\binom{S}{\ell}\right)\middle| X\binom{B}{\ell}\right\rangle
\end{aligned} \tag{227}$$

である．この関係式が任意のベクトル場 X に対して成り立つことから，

$$\left(\overset{B}{\nabla} W(V)\right)\binom{B}{\ell} = V\left(W\binom{B}{\ell}\right) \tag{228}$$

$$\left(\overset{S}{\nabla} W(V)\right)\binom{S}{\ell} = V\left(W\binom{S}{\ell}\right) \tag{229}$$

を得る．つまり，$\tau = B$ または $\tau = S$ として，

$$\left(\overset{\tau}{\nabla} W(V)\right)\left(\overset{\tau}{\ell}\right) = V\left(W\left(\overset{\tau}{\ell}\right)\right) \tag{230}$$

である．これでコシュール接続が得られた．

この式の，左辺は先に計算したように

$$\begin{aligned}\overset{\tau}{\nabla} W(V)\left(\overset{\tau}{\ell}\right) &= \mathrm{d}W(V)\left(\overset{\tau}{\ell}\right) + W^{\gamma}\overset{\tau}{\nabla}\frac{\partial}{\partial\theta^{\gamma}}(V)\left(\overset{\tau}{\ell}\right) \\ &= V^{\alpha}\frac{\partial W^{\gamma}}{\partial\theta^{\alpha}}\overset{\tau}{\ell}_{\gamma} + W^{\beta}V^{\alpha}\overset{\tau}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}\overset{\tau}{\ell}_{\gamma}\end{aligned} \tag{231}$$

となり，右辺は

$$V\left(W\left(\overset{\tau}{\ell}\right)\right) = \mathrm{d}V(W)\left(\overset{\tau}{\ell}\right) + V^{\alpha}W^{\beta}\overset{\tau}{\ell}_{\beta\alpha} \tag{232}$$

となるので，

$$\overset{\tau}{\ell}_{\beta\alpha} = \overset{\tau}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}\overset{\tau}{\ell}_{\gamma} \tag{233}$$

であることがわかる．これは，$\overset{\tau}{\ell}_{\beta\alpha}$ が接空間 $T_{\check{p}}U^{r+1}_{\Omega}$ の元であることを示している．

この関係式を用いて，すべての添字が下付きの $\overset{\tau}{\Gamma}_{\alpha\beta,\gamma}$ を次のように定義する：

$$\overset{B}{\Gamma}_{\alpha\beta,\gamma} = \left\langle \overset{S}{\ell}_{\gamma} \middle| \overset{B}{\ell}_{\alpha\beta} \right\rangle_{p} = \overset{B}{\Gamma}{}^{\delta}_{\alpha\beta}\, g_{\delta\gamma} \tag{234}$$

$$\overset{S}{\Gamma}_{\alpha\beta,\gamma} = \left\langle \overset{S}{\ell}_{\alpha\beta} \middle| \overset{B}{\ell}_{\gamma} \right\rangle_{p} = \overset{S}{\Gamma}{}^{\delta}_{\alpha\beta}\, g_{\delta\gamma} \tag{235}$$

これらの量に関する添字が (i, j, k) の場合については，すでに計算済みであり，そのときにコシュール接続を予想させることを述べたが，実際，コシュール接続になっていることが確かめられた．

ここで，計量の第 $(0,0)$-成分 g_{00} の微分についてまとめておく：

$$g_{00} = -\left(1-(1-s)\,\theta^{0}\right)^{\frac{2s-1}{1-s}}\Bigg|_{\theta^0=0} = -1 \tag{236}$$

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial\theta^{0}} = (2s-1)\left(1-(1-s)\,\theta^{0}\right)^{\frac{3s-2}{1-s}}\Bigg|_{\theta^0=0} = 2s-1 \tag{237}$$

$$\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial\theta^{0}\partial\theta^{0}} = -(2s-1)(3s-2)\left(1-(1-s)\,\theta^{0}\right)^{\frac{4s-3}{1-s}}\Bigg|_{\theta^0=0} = -(2s-1)(3s-2) \tag{238}$$

注意すべき点は，接空間 $T_{\check{p}}V_\Omega^r$ 上で評価したいので $\theta^0 = 0$ と計算の最後でおくことである．

以下に，第 1 種クリストッフェル記号についてまとめておく：

まず，$\tau = B$ のとき，

$$\begin{aligned} s\,C^{1-s}\,\overset{B}{\Gamma}_{ij,k} &= s\,C^{1-s}\left\{(1-s)\int \mathrm{d}x\,\check{p}\frac{\partial \log \check{p}}{\partial \theta^i}\frac{\partial \log \check{p}}{\partial \theta^j}\frac{\partial \log \check{p}}{\partial \theta^k} + \int \mathrm{d}x\,\check{p}\frac{\partial^2 \log \check{p}}{\partial \theta^i \partial \theta^j}\frac{\partial \log \check{p}}{\partial \theta^k}\right\} \\ &= -\,(1-s)\,C^{-(1-s)}\left(\frac{\partial \psi_B}{\partial \theta^i}\frac{\partial^2 \psi_B}{\partial \theta^j \partial \theta^k} + \frac{\partial \psi_B}{\partial \theta^j}\frac{\partial^2 \psi_B}{\partial \theta^k \partial \theta^i}\right) \end{aligned} \tag{239}$$

$$s\,C^{1-s}\,\overset{B}{\Gamma}_{0i,j} = s\,C^{1-s}\,\overset{B}{\Gamma}_{i0,j} = (1-s)\,s\,C^{1-s}\,g_{ij} = (1-s)\,\frac{\partial^2 \psi_B}{\partial \theta^i \partial \theta^j} \tag{240}$$

$$s\,C^{1-s}\,\overset{B}{\Gamma}_{00,i} = 0 \tag{241}$$

$$s\,C^{1-s}\,\overset{B}{\Gamma}_{ij,0} = s^2\,C^{1-s}\,g_{ij} = s\,\frac{\partial^2 \psi_B}{\partial \theta^i \partial \theta^j} \tag{242}$$

$$s\,C^{1-s}\,\overset{B}{\Gamma}_{0i,0} = s\,C^{1-s}\,\overset{B}{\Gamma}_{i0,0} = 0 \tag{243}$$

$$s\,C^{1-s}\,\overset{B}{\Gamma}_{00,0} = 0 \tag{244}$$

次に，$\tau = S$ のとき，

$$\begin{aligned} s\,C^{1-s}\,\overset{S}{\Gamma}_{ij,k} &= s\,C^{1-s}\left\{s\int \mathrm{d}x\,\check{p}\frac{\partial \log \check{p}}{\partial \theta^i}\frac{\partial \log \check{p}}{\partial \theta^j}\frac{\partial \log \check{p}}{\partial \theta^k} + \int \mathrm{d}x\,\check{p}\frac{\partial^2 \log \check{p}}{\partial \theta^i \partial \theta^j}\frac{\partial \log \check{p}}{\partial \theta^k}\right\} \\ &= \frac{\partial^3 \psi_B}{\partial \theta^i \partial \theta^j \partial \theta^k} + (1-s)\,C^{-(1-s)}\frac{\partial \psi_B}{\partial \theta^k}\frac{\partial^2 \psi_B}{\partial \theta^i \partial \theta^j} \end{aligned} \tag{245}$$

$$s\,C^{1-s}\,\overset{S}{\Gamma}_{0i,j} = s\,C^{1-s}\,\overset{S}{\Gamma}_{i0,j} = -s^2\,C^{1-s}\,g_{ij} = -s\,\frac{\partial^2 \psi_B}{\partial \theta^i \partial \theta^j} \tag{246}$$

$$s\,C^{1-s}\,\overset{S}{\Gamma}_{00,k} = 0 \tag{247}$$

$$s\,C^{1-s}\,\overset{S}{\Gamma}_{ij,0} = -\,(1-s)\,s\,C^{1-s}\,g_{ij} = -\,(1-s)\,\frac{\partial^2 \psi_B}{\partial \theta^i \partial \theta^j} \tag{248}$$

$$s\,C^{1-s}\,\overset{S}{\Gamma}_{0i,0} = s\,C^{1-s}\,\overset{S}{\Gamma}_{i0,0} = 0, \tag{249}$$

$$s\,C^{1-s}\,\overset{S}{\Gamma}_{00,0} = (2s-1)\,s\,C^{1-s} \tag{250}$$

次に，第 2 種クリストッフェル記号についてまとめておく：
まず，$\tau = B$ のとき，

$$\begin{aligned}\overset{B}{\Gamma}{}^{k}_{ij} &= \overset{B}{\Gamma}_{ij,\delta}\,g^{\delta k} \\ &= g^{km}\left\{(1-s)\int \mathrm{d}x\,\check{p}\,\frac{\partial\log\check{p}}{\partial\theta^i}\frac{\partial\log\check{p}}{\partial\theta^j}\frac{\partial\log\check{p}}{\partial\theta^m} + \int \mathrm{d}x\,\check{p}\,\frac{\partial^2\log\check{p}}{\partial\theta^i\partial\theta^j}\frac{\partial\log\check{p}}{\partial\theta^m}\right\}\end{aligned} \tag{251}$$

$$\overset{B}{\Gamma}{}^{k}_{0i} = \overset{B}{\Gamma}{}^{k}_{i0} = \overset{B}{\Gamma}_{0i,\delta}\,g^{\delta k} = (1-s)\,\delta^k_i \tag{252}$$

$$\overset{B}{\Gamma}{}^{k}_{00} = \overset{B}{\Gamma}_{00,\delta}\,g^{\delta k} = 0 \tag{253}$$

$$\overset{B}{\Gamma}{}^{0}_{ij} = \overset{B}{\Gamma}_{ij,\delta}\,g^{\delta 0} = -s\,g_{ij} \tag{254}$$

$$\overset{B}{\Gamma}{}^{0}_{0i} = \overset{B}{\Gamma}{}^{0}_{i0} = \overset{B}{\Gamma}_{0i,\delta}\,g^{\delta 0} = 0 \tag{255}$$

$$\overset{B}{\Gamma}{}^{0}_{00} = \overset{B}{\Gamma}_{00,\delta}\,g^{\delta 0} = 0 \tag{256}$$

次に，$\tau = S$ のとき，

$$\begin{aligned}\overset{S}{\Gamma}{}^{k}_{ij} &= \overset{S}{\Gamma}_{ij,\delta}\,g^{\delta k} \\ &= g^{km}\left\{s\int \mathrm{d}x\,\check{p}\,\frac{\partial\log\check{p}}{\partial\theta^i}\frac{\partial\log\check{p}}{\partial\theta^j}\frac{\partial\log\check{p}}{\partial\theta^m} + \int \mathrm{d}x\,\check{p}\,\frac{\partial^2\log\check{p}}{\partial\theta^i\partial\theta^j}\frac{\partial\log\check{p}}{\partial\theta^m}\right\}\end{aligned} \tag{257}$$

$$\overset{S}{\Gamma}{}^{k}_{0i} = \overset{S}{\Gamma}{}^{k}_{i0} = \overset{S}{\Gamma}_{0j,\delta}\,g^{\delta k} = -s\,\delta^k_i \tag{258}$$

$$\overset{S}{\Gamma}{}^{k}_{00} = \overset{S}{\Gamma}_{00,\delta}\, g^{\delta k} = 0 \tag{259}$$

$$\overset{S}{\Gamma}{}^{0}_{ij} = \overset{S}{\Gamma}_{ij,\delta}\, g^{\delta 0} = (1-s)\, g_{ij} \tag{260}$$

$$\overset{S}{\Gamma}{}^{0}_{0i} = \overset{S}{\Gamma}{}^{0}_{i0} = \overset{S}{\Gamma}_{0i,\delta}\, g^{\delta 0} = 0 \tag{261}$$

$$\overset{S}{\Gamma}{}^{0}_{00} = \overset{S}{\Gamma}_{00,\delta}\, g^{\delta 0} = -\,(2s-1) \tag{262}$$

さて，以下の式において，左辺で $\tau = B$ のときは，右辺では $\tau = s$ とし，左辺で $\tau = S$ のときは，右辺では $\tau = 1 - s$ とすることで，3 階の完全対称テンソル $\overset{\tau}{T}_{ijk}$ を定義する：

$$\overset{\tau}{T}_{ijk} = (2\tau - 1) \int \mathrm{d}x\, \check{p}\, \frac{\partial \log \check{p}}{\partial \theta^i} \frac{\partial \log \check{p}}{\partial \theta^j} \frac{\partial \log \check{p}}{\partial \theta^k} \tag{263}$$

このとき，下付き添字の組みが (i, j, k) のとき，以下のような関係式が成り立つことがわかる：

$$\overset{B}{\Gamma}_{ij,k} = \overset{S}{\Gamma}_{ij,k} + \overset{S}{T}_{ijk} \tag{264}$$

$$\overset{S}{\Gamma}_{ij,k} = \overset{B}{\Gamma}_{ij,k} + \overset{B}{T}_{ijk} \tag{265}$$

これらの関係式は，$\left(\check{\mathcal{P}}, V^{\tau}_{\Omega}, e_{\tau}\right)$ を余次元 1 のフィッシャー部分多様体とよべば，余次元 1 のフィッシャー部分多様体上に与えたコシュール接続 $\overset{\tau}{\nabla}$ が等積接続[*46]になっていることを示唆している．

[*46] an equiaffine connection のこと．

ここで，計量 g のベクトル場 Z 方向の変化率について考えてみると[*47]，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}g(X,Y)\,(Z)\\
&= Z(g(X,Y))\\
&= Z\left\langle X\left(\overset{S}{\ell}\right)\middle| Y\left(\overset{B}{\ell}\right)\right\rangle\\
&= \left\langle Z\left(X\left(\overset{S}{\ell}\right)\right)\middle| Y\left(\overset{B}{\ell}\right)\right\rangle + \left\langle X\left(\overset{S}{\ell}\right)\middle| Z\left(Y\left(\overset{B}{\ell}\right)\right)\right\rangle\\
&= \left\langle \left(\overset{S}{\nabla}X(Z)\right)\left(\overset{S}{\ell}\right)\middle| Y\left(\overset{B}{\ell}\right)\right\rangle + \left\langle X\left(\overset{S}{\ell}\right)\middle| \left(\overset{B}{\nabla}Y(Z)\right)\left(\overset{B}{\ell}\right)\right\rangle\\
&= g\left(\overset{S}{\nabla}X(Z)\,,Y\right) + g\left(X,\overset{B}{\nabla}Y(Z)\right)
\end{aligned}
\tag{266}
$$

となるので，τ-アファイン共役でもある双対接続 $\overset{B}{\nabla}$ と $\overset{S}{\nabla}$ は，計量的であるといえる．すなわち，

$$
\mathrm{d}g(X,Y)\,(Z) = g\left(\overset{S}{\nabla}X(Z)\,,Y\right) + g\left(X,\overset{B}{\nabla}Y(Z)\right) \tag{267}
$$

である．成分で表せば，

$$
\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial\theta^{\gamma}} = \overset{S}{\Gamma}{}^{\delta}_{\alpha\gamma}\,g_{\delta\beta} + \overset{B}{\Gamma}{}^{\delta}_{\beta\gamma}\,g_{\delta\alpha} = \overset{S}{\Gamma}_{\alpha\gamma,\beta} + \overset{B}{\Gamma}_{\beta\gamma,\alpha} \tag{268}
$$

のようになる．以下に，具体的な計算により，この成分による関係式が成立することを示す：

$$
\frac{\partial g_{00}}{\partial\theta^{0}} = \overset{S}{\Gamma}{}^{\delta}_{00}\,g_{\delta 0} + \overset{B}{\Gamma}{}^{\delta}_{00}\,g_{\delta 0} = 2s-1 \tag{269}
$$

$$
\frac{\partial g_{00}}{\partial\theta^{i}} = \overset{S}{\Gamma}{}^{\delta}_{0i}\,g_{\delta 0} + \overset{B}{\Gamma}{}^{\delta}_{0i}\,g_{\delta 0} = 0 \tag{270}
$$

$$
\frac{\partial g_{0i}}{\partial\theta^{0}} = \overset{S}{\Gamma}{}^{\delta}_{00}\,g_{\delta i} + \overset{B}{\Gamma}{}^{\delta}_{i0}\,g_{\delta 0} = 0 \tag{271}
$$

$$
\frac{\partial g_{0i}}{\partial\theta^{j}} = \overset{S}{\Gamma}{}^{\delta}_{0j}\,g_{\delta i} + \overset{B}{\Gamma}{}^{\delta}_{ij}\,g_{\delta 0} = 0 \tag{272}
$$

[*47] $\mathrm{d}f(V) = V(f)$ であることに注意する．

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \theta^0} = \overset{S}{\Gamma}{}^{\delta}_{i0}\, g_{\delta j} + \overset{B}{\Gamma}{}^{\delta}_{j0}\, g_{\delta i} = -\left(2s-1\right) g_{ij} \tag{273}$$

ここで，

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \left\langle \left(1-\left(1-s\right)\theta^0\right)^{\frac{s}{1-s}} \check{p}^s t_j \middle| \left(1+\left(1-s\right)\theta^0\right) \check{p}^{1-s} t_i \right\rangle \Big|_{\theta^0=0} \\ &= \left(1-\left(1-s\right)\theta^0\right)^{\frac{s}{1-s}} \left(1+\left(1-s\right)\theta^0\right) \Big|_{\theta^0=0} \left(g^{Fisher}\right)_{ij} \\ &= \left(g^{Fisher}\right)_{ij} \end{aligned} \tag{274}$$

なので，

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial \theta^0} &= -\left\{\left(2s-1\right)+\left(1-s\right)\theta^0\right\} \left(1-\left(1-s\right)\theta^0\right)^{\frac{2s-1}{1-s}} \Big|_{\theta^0=0} \left(g^{Fisher}\right)_{ij} \\ &= -\left(2s-1\right) g_{ij} \end{aligned} \tag{275}$$

と確認できる．また，

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial \theta^0 \partial \theta^0} &= s\left\{\left(4s-3\right)+\left(1-s\right)\theta^0\right\} \left(1-\left(1-s\right)\theta^0\right)^{\frac{3s-2}{1-s}} \Big|_{\theta^0=0} \left(g^{Fisher}\right)_{ij} \\ &= s\left(4s-3\right) g_{ij} \end{aligned} \tag{276}$$

である．

最後に，これは計量の定義から成立することがわかる：

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \theta^k} = \overset{S}{\Gamma}{}^{\delta}_{ik}\, g_{\delta j} + \overset{B}{\Gamma}{}^{\delta}_{jk}\, g_{\delta i} = \overset{S}{\Gamma}_{ik,j} + \overset{B}{\Gamma}_{jk,i} \tag{277}$$

3.2 τ-リーマンテンソル

ここでは，τ-アファイン接続 $\overset{\tau}{\nabla}$ を用いて τ-リーマンテンソルを定義し，その性質について考えていく．以後，$\tau = B$ または $\tau = S$ であり，場合によっては $\tau = B$ のときには τ に値 s を代入し，$\tau = S$ のときには τ に値 $1-s$ を代入して考えていくものとする．これらは，基本的には，ある文字の上部に τ が在る場合には，B または S とし，それ以外のときには s または $1-s$ の値を代入すればよいが，そうでない場合には，その都度指摘する．

まず，接続 1-形式 $\overset{\tau}{A}{}^{\gamma}_{\alpha}$ を導入する．τ-アファイン接続 $\overset{\tau}{\nabla}$ が，次のように与えられていることに注目して，

$$\overset{\tau}{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\right)=\overset{\tau}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\gamma} \tag{278}$$

接続 1-形式 $\overset{\tau}{A}{}^{\gamma}_{\alpha}$ を，以下のように定義する：

$$\overset{\tau}{\nabla}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}=\overset{\tau}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}\theta^\beta\otimes\frac{\partial}{\partial\theta^\gamma}=\overset{\tau}{A}{}^{\gamma}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^\gamma} \tag{279}$$

つまり，接続 1-形式 $\overset{\tau}{A}{}^{\gamma}_{\alpha}$ とは，

$$\overset{\tau}{A}{}^{\gamma}_{\alpha}=\overset{\tau}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}\theta^\beta \tag{280}$$

のことである．

さて，ベクトル場 $W=W^\alpha\dfrac{\partial}{\partial\theta^\alpha}$ が与えられたとき，共変微分は次のようになる：

$$\begin{aligned}\overset{\tau}{\nabla}W&=\mathrm{d}W^\alpha\otimes\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}+W^\beta\overset{\tau}{\nabla}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\\&=\left\{\frac{\partial W^\alpha}{\partial\theta^\gamma}+W^\beta\overset{\tau}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}\right\}\mathrm{d}\theta^\gamma\otimes\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\end{aligned} \tag{281}$$

これはベクトル場 W の変化率を表しているが，さらに，この量の共変微分を考えると，

$$\begin{aligned}&\overset{\tau}{\nabla}\left(\overset{\tau}{\nabla}W\right)\\&=\overset{\tau}{\nabla}\left(\left\{\frac{\partial W^\alpha}{\partial\theta^\delta}+W^\beta\overset{\tau}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\delta}\right\}\mathrm{d}\theta^\delta\otimes\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\right)\\&=\mathrm{d}\left\{\frac{\partial W^\alpha}{\partial\theta^\delta}+W^\beta\overset{\tau}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\delta}\right\}\wedge\mathrm{d}\theta^\delta\otimes\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}-\left\{\frac{\partial W^\alpha}{\partial\theta^\delta}+W^\beta\overset{\tau}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\delta}\right\}\mathrm{d}\theta^\delta\wedge\overset{\tau}{\nabla}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\\&=\mathrm{d}\left\{\frac{\partial W^\alpha}{\partial\theta^\delta}+W^\beta\overset{\tau}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\delta}\right\}\wedge\mathrm{d}\theta^\delta\otimes\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}-\left\{\frac{\partial W^\alpha}{\partial\theta^\gamma}+W^\beta\overset{\tau}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}\right\}\mathrm{d}\theta^\gamma\wedge\overset{\tau}{\Gamma}{}^{\rho}_{\alpha\delta}\,\mathrm{d}\theta^\delta\otimes\frac{\partial}{\partial\theta^\rho}\\&=\left\{\frac{\partial^2W^\alpha}{\partial\theta^\gamma\partial\theta^\delta}+\frac{\partial W^\beta}{\partial\theta^\gamma}\overset{\tau}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\delta}+W^\beta\frac{\partial\overset{\tau}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\delta}}{\partial\theta^\gamma}\right\}\mathrm{d}\theta^\gamma\wedge\mathrm{d}\theta^\delta\otimes\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\\&\qquad-\left\{\frac{\partial W^\beta}{\partial\theta^\gamma}\overset{\tau}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\delta}+W^\beta\overset{\tau}{\Gamma}{}^{\rho}_{\beta\gamma}\overset{\tau}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\rho\delta}\right\}\mathrm{d}\theta^\gamma\wedge\mathrm{d}\theta^\delta\otimes\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\\&=W^\beta\left\{\frac{\partial\overset{\tau}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\delta}}{\partial\theta^\gamma}-\overset{\tau}{\Gamma}{}^{\rho}_{\beta\gamma}\overset{\tau}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\rho\delta}\right\}\mathrm{d}\theta^\gamma\wedge\mathrm{d}\theta^\delta\otimes\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\end{aligned} \tag{282}$$

のようになる．

ベクトル場 U と V が与えられたとき，ベクトル場 W の 2 階共変微分は

$$
\begin{aligned}
&\overset{\tau}{\nabla}\left(\overset{\tau}{\nabla}W\right)(U,V)\\
&= W^\beta U^\gamma V^\delta \left\{ \frac{\partial \overset{\tau}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\delta}}{\partial\theta^\gamma} - \overset{\tau}{\Gamma}{}^\rho_{\beta\gamma}\overset{\tau}{\Gamma}{}^\alpha_{\rho\delta} \right\} \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - W^\beta U^\gamma V^\delta \left\{ \frac{\partial \overset{\tau}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial\theta^\delta} - \overset{\tau}{\Gamma}{}^\rho_{\beta\delta}\overset{\tau}{\Gamma}{}^\alpha_{\rho\gamma} \right\} \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\\
&= W^\beta U^\gamma V^\delta \left\{ \frac{\partial \overset{\tau}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\delta}}{\partial\theta^\gamma} - \overset{\tau}{\Gamma}{}^\rho_{\beta\gamma}\overset{\tau}{\Gamma}{}^\alpha_{\rho\delta} - \frac{\partial \overset{\tau}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial\theta^\delta} + \overset{\tau}{\Gamma}{}^\rho_{\beta\delta}\overset{\tau}{\Gamma}{}^\alpha_{\rho\gamma} \right\} \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\\
&= W^\beta U^\gamma V^\delta \overset{\tau}{R}{}^\alpha_{\beta\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}
\end{aligned}
\tag{283}
$$

のようになる．ただし，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\theta^\gamma \wedge \mathrm{d}\theta^\delta(U,V) &= \mathrm{d}\theta^\gamma(U)\,\mathrm{d}\theta^\delta(V) - \mathrm{d}\theta^\gamma(V)\,\mathrm{d}\theta^\delta(U)\\
&= U^\gamma V^\delta - V^\gamma U^\delta
\end{aligned}
\tag{284}
$$

であり，

$$
\overset{\tau}{R}{}^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \overset{\tau}{\Gamma}{}^\alpha_{\delta\beta}}{\partial\theta^\gamma} - \frac{\partial \overset{\tau}{\Gamma}{}^\alpha_{\gamma\beta}}{\partial\theta^\delta} + \overset{\tau}{\Gamma}{}^\alpha_{\gamma\rho}\overset{\tau}{\Gamma}{}^\rho_{\delta\beta} - \overset{\tau}{\Gamma}{}^\alpha_{\delta\rho}\overset{\tau}{\Gamma}{}^\rho_{\gamma\beta}
\tag{285}
$$

である[*48]．このとき，τ-リーマンテンソルを次のように定義する[*49]：

$$
\overset{\tau}{R}(W)(U,V) = \overset{\tau}{\nabla}\left(\overset{\tau}{\nabla}W\right)(U,V) = W^\beta U^\gamma V^\delta \overset{\tau}{R}{}^\alpha_{\beta\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}
\tag{286}
$$

ここで，τ-リーマンテンソルの対称性を明らかにするために，すべての添字が下付きであるような τ-リーマンテンソル $\overset{\tau}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ を定義する[*50]：

$$
\begin{aligned}
&\overset{\tau}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\rho}\overset{\tau}{R}{}^\rho_{\beta\gamma\delta}\\
&= \frac{\partial \overset{\tau}{\Gamma}_{\delta\beta,\alpha}}{\partial\theta^\gamma} - \frac{\partial \overset{\tau}{\Gamma}_{\gamma\beta,\alpha}}{\partial\theta^\delta} + g^{\rho\sigma}\left\{ \left(\frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial\theta^\delta} - \overset{\tau}{\Gamma}_{\delta\rho,\alpha} \right)\overset{\tau}{\Gamma}_{\gamma\beta,\sigma} - \left(\frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial\theta^\gamma} - \overset{\tau}{\Gamma}_{\gamma\rho,\alpha} \right)\overset{\tau}{\Gamma}_{\delta\beta,\sigma} \right\}\\
&= \frac{\partial \overset{\tau}{\Gamma}_{\delta\beta,\alpha}}{\partial\theta^\gamma} - \frac{\partial \overset{\tau}{\Gamma}_{\gamma\beta,\alpha}}{\partial\theta^\delta} + g^{\rho\sigma}\left(\overset{1-\tau}{\Gamma}_{\delta\alpha,\rho}\overset{\tau}{\Gamma}_{\gamma\beta,\sigma} - \overset{1-\tau}{\Gamma}_{\gamma\alpha,\rho}\overset{\tau}{\Gamma}_{\delta\beta,\sigma} \right)
\end{aligned}
\tag{287}
$$

---

*48 $\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ であることを利用している．

*49 甘利の定義とは符号が異なっているので注意すること．

*50 式 (268) を利用して整理すると得られる．また，Γ の上にある $1-\tau$ は τ の τ-アファイン共役を表している．つまり，$\tau = B$ ならば $1-\tau = S$ であり，$\tau = S$ ならば $1-\tau = B$ である．

このとき，τ-リーマンテンソルの定義より，下付き添字 γ と δ に関する反対称性を確認できる．また，実際に計算することでヤコビ恒等式も以下のように得ることができる：

$$\overset{\tau}{R}(W)(U,V) = -\overset{\tau}{R}(W)(V,U) \Longleftrightarrow R^{\overset{\tau}{\alpha}}_{\beta\gamma\delta} = -R^{\overset{\tau}{\alpha}}_{\beta\delta\gamma} \tag{288}$$

$$\overset{\tau}{R}(W)(U,V) + \overset{\tau}{R}(U)(V,W) + \overset{\tau}{R}(V)(W,U) = 0 \Longleftrightarrow R^{\overset{\tau}{\alpha}}_{\beta\gamma\delta} + R^{\overset{\tau}{\alpha}}_{\gamma\delta\beta} + R^{\overset{\tau}{\alpha}}_{\delta\beta\gamma} = 0 \tag{289}$$

さらに，ベクトル場の共変微分は,

$$\overset{\tau}{\nabla} X = \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial \theta^\gamma} + X^\beta \Gamma^{\overset{\tau}{\alpha}}_{\beta\gamma}\right) \mathrm{d}\theta^\gamma \otimes \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \tag{290}$$

となるので，1-形式を含んでいる．つまり，$\overset{\tau}{\nabla}$ は外微分形式を生成する．このことに注意すれば[*51],

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}^2 g(X,Y) \\
&= \mathrm{d}\left\{\mathrm{d}g(X,Y)\right\} \\
&= \mathrm{d}\left\{g\left(\overset{S}{\nabla}X, Y\right) + g\left(X, \overset{B}{\nabla}Y\right)\right\} \\
&= \mathrm{d}g\left(\overset{S}{\nabla}X, Y\right) + \mathrm{d}g\left(X, \overset{B}{\nabla}Y\right) \\
&= g\left(\overset{S}{\nabla}\left(\overset{S}{\nabla}X\right), Y\right) - g\left(\overset{S}{\nabla}X, \overset{B}{\nabla}Y\right) + g\left(\overset{S}{\nabla}X, \overset{B}{\nabla}Y\right) + g\left(X, \overset{S}{\nabla}\left(\overset{S}{\nabla}Y\right)\right) \\
&= g\left(\overset{S}{\nabla}\left(\overset{S}{\nabla}X\right), Y\right) + g\left(X, \overset{S}{\nabla}\left(\overset{S}{\nabla}Y\right)\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{291}$$

が得られるので,

$$g\left(W, \overset{B}{R}(Z)(U,V)\right) = -g\left(\overset{S}{R}(W)(U,V), Z\right) \Longleftrightarrow \overset{B}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\overset{S}{R}_{\beta\alpha\gamma\delta} \tag{292}$$

[*51] p-形式 ω と q-形式 η に対して，$\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^p\, \omega \wedge \mathrm{d}\eta$ なので，1-形式 $f_\alpha \mathrm{d}\theta^\alpha$ と 0-形式 g（関数）に対して，$\mathrm{d}(f_\alpha \mathrm{d}\theta^\alpha \wedge g) = \mathrm{d}(f_\alpha \mathrm{d}\theta^\alpha) \wedge g + (-1)^1\, f_\alpha \mathrm{d}\theta^\alpha \wedge \mathrm{d}g = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta^\beta} \mathrm{d}\theta^\beta \wedge \mathrm{d}\theta^\alpha\right) \wedge g - f_\alpha \mathrm{d}\theta^\alpha \wedge \frac{\partial g}{\partial \theta^\beta} \mathrm{d}\theta^\beta = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta^\beta} g + f_\alpha \frac{\partial g}{\partial \theta^\beta}\right) \mathrm{d}\theta^\beta \wedge \mathrm{d}\theta^\alpha = \frac{\partial\,(f_\alpha g)}{\partial \theta^\beta} \mathrm{d}\theta^\beta \wedge \mathrm{d}\theta^\alpha = \mathrm{d}\,(f_\alpha g) \wedge \mathrm{d}\theta^\alpha$ となる．つまり，関数との積を敢えて $\wedge$ 積を用いて表すことで，計量の第 1 スロットと第 2 スロットに対する共変微分 $\overset{\tau}{\nabla}$ の作用を，1-形式と 0-形式の $\wedge$ 積に対する作用としてみることができる．

のような前 2 つの下付き添字 α と β に関する反対称性が存在することがわかる．これを，τ-リーマンテンソルの τ-反対称性とよぶことにする．

これらの τ-リーマンテンソルがもつ反対称性と τ-反対称性を利用すれば，以下のような前 2 つの下付き添字と後ろ 2 つの下付き添字に関する対称性を導くことができる：

$$\begin{aligned} & g\left(W, \overset{B}{R}(Z)(U,V)\right) + g\left(\overset{S}{R}(Z)(U,V)\,, W\right) \\ & \qquad = g\left(U, \overset{B}{R}(V)(W,Z)\right) + g\left(\overset{S}{R}(V)(W,Z)\,, U\right) \\ \Longleftrightarrow \quad & \overset{B}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \overset{S}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \overset{B}{R}_{\gamma\delta\alpha\beta} + \overset{S}{R}_{\gamma\delta\alpha\beta} \end{aligned} \tag{293}$$

τ-リーマンテンソルのもつこのような対称性を τ-対称性とよぶことにする．この性質を

τ-リーマンテンソルがもつことは，次のように直接計算で確かめることができる：

$$\begin{aligned}
& g\Big(W, \overset{B}{R}(Z)(U,V)\Big) \\
&= -g\Big(\overset{S}{R}(W)(U,V)\,, Z\Big) \\
&= g\Big(\overset{S}{R}(U)(V,W)\,, Z\Big) + g\Big(\overset{S}{R}(V)(W,U)\,, Z\Big) \\
&= -g\Big(U, \overset{B}{R}(Z)(V,W)\Big) - g\Big(V, \overset{B}{R}(Z)(W,U)\Big) \\
&= g\Big(U, \overset{B}{R}(V)(W,Z)\Big) + g\Big(U, \overset{B}{R}(W)(Z,V)\Big) \\
&\qquad + g\Big(V, \overset{B}{R}(W)(U,Z)\Big) + g\Big(V, \overset{B}{R}(U)(Z,W)\Big) \\
&= g\Big(U, \overset{B}{R}(V)(W,Z)\Big) - g\Big(\overset{S}{R}(U)(Z,V)\,, W\Big) \\
&\qquad + g\Big(V, \overset{B}{R}(W)(U,Z)\Big) + g\Big(\overset{S}{R}(V)(W,Z)\,, U\Big) \\
&= g\Big(U, \overset{B}{R}(V)(W,Z)\Big) + g\Big(\overset{S}{R}(V)(W,Z)\,, U\Big) + g\Big(V, \overset{B}{R}(W)(U,Z)\Big) \\
&\qquad + g\Big(\overset{S}{R}(Z)(V,U)\,, W\Big) + g\Big(\overset{S}{R}(V)(U,Z)\,, W\Big) \\
&= g\Big(U, \overset{B}{R}(V)(W,Z)\Big) + g\Big(\overset{S}{R}(V)(W,Z)\,, U\Big) - g\Big(\overset{S}{R}(Z)(U,V)\,, W\Big) \qquad (294)
\end{aligned}$$

これらの τ-リーマンテンソルのもつ添字の入れ替えに関する性質を成分表示でまとめると，以下のようになる：

後ろ 2 つの添字に関する反対称性について，

$$\overset{\tau}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = -\overset{\tau}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta\delta\gamma} \tag{295}$$

前 2 つの添字に関する τ-反対称性について，

$$\overset{B}{R}{}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\overset{S}{R}{}_{\beta\alpha\gamma\delta} \tag{296}$$

下付きの 3 つの添字に関するヤコビ恒等式について，

$$\overset{\tau}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} + \overset{\tau}{R}{}^{\alpha}{}_{\gamma\delta\beta} + \overset{\tau}{R}{}^{\alpha}{}_{\delta\beta\gamma} = 0 \tag{297}$$

前 2 つの添字と後ろ 2 つの添字に関する τ-対称性について,

$$\overset{B}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \overset{S}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \overset{B}{R}_{\gamma\delta\alpha\beta} + \overset{S}{R}_{\gamma\delta\alpha\beta} \tag{298}$$

ところで,前 2 つの添字に関する τ-反対称性を表している式 (296) は,測度の大きさに関する方向の τ-アファイン共役を

$$\overset{B}{p} = \exp_s\left(\theta^0\, \check{p}^{1-s}\right) \otimes_s \check{p} = \exp_s\left(\theta^0\right) \check{p} \tag{299}$$

$$\overset{S}{p} = \exp_{1-s}\left(\check{p}^s \ln_{1-s}\left(\exp_s\left(-\theta^0\right)\right)\right) \otimes_{1-s} \check{p} = \exp_s\left(-\theta^0\right) \check{p} \tag{300}$$

のように定めたから出てきたものである.このとき,計量が $g_{00} = g^{00} = -1$ となることが τ-反対称性が成立するためのポイントである.仮に,$\overset{S}{p}$ の θ^0 の符号をプラスにしたならば,τ-リーマンテンソルの前 2 つの添字は対称性をもつようになってしまう.実は,τ-リーマンテンソルの前 2 つの添字が反対称性をもつようにするためには,$Body$ 世界と $Soul$ 世界を同時に考えなければならず,測度の大きさに関する方向の τ-アファイン共役を上の式のように定義しなければならないのである[*52].

以下に,τ-リーマンテンソルの成分表示したものをまとめておく.ただし,TU_Ω^{r+1} はアファイン部分空間なので平坦であるため,すべての τ-リーマンテンソルの値は TU_Ω^{r+1} 上では 0 になる.このことを具体的な成分計算で示すためには,添字に 0 を含むものに関して,

$$\frac{\partial \overset{B}{\Gamma}_{i0,j}}{\partial \theta^0} = -s\,(1-s)\left(1-(1-s)\,\theta^0\right)^{\frac{2s-1}{1-s}} g_{ij}\Big|_{\theta^0=0} = -s\,(1-s)\,g_{ij} \tag{301}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overset{B}{\Gamma}_{ij,0}}{\partial \theta^0} &= -s\left(1-(1-s)\,\theta^0\right)^{\frac{3s-2}{1-s}} \left\{(3s-2) + s\,(1-s)\,\theta^0\right\} g_{ij}\Big|_{\theta^0=0} \\ &= -s\,(3s-2)\,g_{ij}\end{aligned} \tag{302}$$

[*52] 最初は,τ-アファイン共役を単に $\tau = s$ を $\tau = 1-s$ に置き換えるだけで考えていたが,τ-リーマンテンソルの前 2 つの添字が反対称性をもたず,対称性をもってしまうことがわかった.そこで,τ-リーマンテンソルの前 2 つの添字に反対称性をもたせるにはどうしたらよいかと逆算して求めた結果得られたものが,ここで展開しているものである.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \overset{B}{\Gamma}_{ij,k}}{\partial \theta^0} &= -\left(1-(1-s)\,\theta^0\right)^{\frac{2s-1}{1-s}} \left\{(2s-1)+(1-s)\,\theta^0\right\} \overset{B}{\Gamma}_{ij,k}\bigg|_{\theta^0=0} \\
&= -\,(2s-1)\,\overset{B}{\Gamma}_{ij,k}
\end{aligned}
\tag{303}
$$

であり，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \overset{S}{\Gamma}_{i0,j}}{\partial \theta^0} &= s\left(1-(1-s)\,\theta^0\right)^{\frac{3s-2}{1-s}} \left\{(3s-2)+s\,(1-s)\,\theta^0\right\} g_{ij}\bigg|_{\theta^0=0} \\
&= s\,(3s-2)\,g_{ij}
\end{aligned}
\tag{304}
$$

$$
\frac{\partial \overset{S}{\Gamma}_{ij,0}}{\partial \theta^0} = s\,(1-s)\left(1-(1-s)\,\theta^0\right)^{\frac{2s-1}{1-s}}\bigg|_{\theta^0=0} = s\,(1-s)\,g_{ij}
\tag{305}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \overset{S}{\Gamma}_{ij,k}}{\partial \theta^0} &= -\left(1-(1-s)\,\theta^0\right)^{\frac{2s-1}{1-s}} \left\{(2s-1)+(1-s)\,\theta^0\right\} \overset{S}{\Gamma}_{ij,k}\bigg|_{\theta^0=0} \\
&= -\,(2s-1)\,\overset{S}{\Gamma}_{ij,k}
\end{aligned}
\tag{306}
$$

であることに注意するとよい．

ところで，接空間 TV_Ω^τ は一般には平坦ではなく，平行移動は測度の大きさの変化を伴うので，TV_Ω^τ 上では τ-リーマンテンソルは，以下のように一般には 0 以外の値をもつようになる．

まず，$\tau = B$ のとき，

$$
\overset{B}{R}_{ijk\ell} = s\,(1-s)\,(g_{ik}\,g_{j\ell} - g_{i\ell}\,g_{jk})
\tag{307}
$$

となる．

次に，$\tau = S$ のとき，

$$
\overset{S}{R}_{ijk\ell} = s\,(1-s)\,(g_{ik}\,g_{j\ell} - g_{i\ell}\,g_{jk})
\tag{308}
$$

となる．

3.3　τ-リッチテンソル

ここでは，接空間 TV_{Ω}^{τ} 上での τ-リッチテンソルについて考えていく．まず，τ-リッチテンソルを，通常のリッチテンソルの定義に従って導入する．$(-)$ を空欄のスロットを表すものとして，τ-リーマンテンソルが，

$$\overset{\tau}{R}(W)(-,V) = \overset{\tau}{\nabla}\left(\overset{\tau}{\nabla}W\right)(-,V) = W^{\beta}\overset{\tau}{R^{\alpha}}_{\beta\gamma\delta}V^{\delta}\,\mathrm{d}\theta^{\gamma}\otimes\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} \tag{309}$$

のように定義されているので，τ-リッチテンソルは，次のように定義される：

$$\overset{\tau}{Ric}(W,V) = \mathrm{Tr}\left[U \mapsto \overset{\tau}{R}(W)(U,V)\right] = \overset{\tau}{R}_{\beta\delta}W^{\beta}V^{\delta} \tag{310}$$

成分表示すれば，

$$\overset{\tau}{R}_{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta}\overset{\tau}{R}_{\gamma\alpha\delta\beta} = \overset{\tau}{R^{\gamma}}_{\alpha\gamma\beta} \tag{311}$$

のように与えられる．

ヤコビ恒等式[*53]から，τ-リッチテンソルは添字に関して対称性をもつことがわかる：

$$\overset{\tau}{R}_{\alpha\beta} = \overset{\tau}{R}_{\beta\alpha} \tag{312}$$

以下に，τ-リッチテンソルの成分表示したものをまとめておく．

まず，$\tau = B$ のとき，

$$\overset{B}{R}_{ij} = s\,(1-s)\,(r-1)\,g_{ij} \tag{313}$$

となる．

次に，$\tau = S$ のとき，

$$\overset{S}{R}_{ij} = s\,(1-s)\,(r-1)\,g_{ij} \tag{314}$$

となる．

3.4　τ-リッチスカラー

τ-リッチスカラーは，τ-リッチテンソルから通常の手続きで得られる．つまり，

$$\overset{\tau}{R} = g^{\alpha\beta}\overset{\tau}{R}_{\beta\alpha} \tag{315}$$

[*53] ビアンキの第 1 恒等式ともいう．

のように定義される．

以下に，接空間 TV_{Ω}^{r} 上での τ-リッチスカラーをまとめておく．

まず，$\tau = B$ のとき，

$$\overset{B}{R} = s\,(1-s)\,r\,(r-1) \tag{316}$$

となる．

次に，$\tau = S$ のとき，

$$\overset{S}{R} = s\,(1-s)\,r\,(r-1) \tag{317}$$

となる．

したがって，

$$\overset{B}{R} = \overset{S}{R} \tag{318}$$

が成立している．

このことは，以下のように示すことができる．まず，τ-リーマンテンソルのもつ前 2 つの添字に関する τ-反対称性 (296) とヤコビ恒等式 (297) を用いると，

$$\overset{B}{R}_{ijk\ell} = -\overset{S}{R}_{jik\ell} = \overset{S}{R}_{jk\ell i} + \overset{S}{R}_{j\ell ik} \tag{319}$$

であることがわかる．この関係式から，

$$\overset{B}{R} = g^{j\ell} g^{ik} \overset{B}{R}_{ijk\ell} = g^{j\ell} g^{ik} \left(\overset{S}{R}_{jk\ell i} + \overset{S}{R}_{j\ell ik} \right) = g^{j\ell} g^{ik} \overset{S}{R}_{jk\ell i} = \overset{S}{R} \tag{320}$$

が得られる．つまり，

$$\overset{B}{R} = \overset{S}{R} \tag{321}$$

が成立する．

4 エントロピー

まず，ここで必要な範囲で，簡単に設定を復習する．アファイン部分空間 $\left(\check{\mathcal{P}}, V_{\Omega}^{r}, e_s\right)$ の元 $\check{p}_0(x)$ から平行移動 e_s により，アファイン部分空間 $\left(\check{\mathcal{P}}, V_{B}^{r}, e_s\right)$ の元 $\check{p}(x)$ を作る：（$Body$ 世界での表現）

$$\check{p}(x) = \exp_s \left(C^{-(1-s)} \left(\sum_{i=1}^{r} \theta^i x^i - \psi_B + \ln_s \check{p}_0(x) \right) \right) \tag{322}$$

ただし，$\check{p}(x) = \overset{B}{\check{p}}(x) = \overset{S}{\check{p}}(x)$ である．

これに続いて，θ^0 方向の平行移動を行うと，

$$\begin{aligned} \overset{B}{p}(x) &= \exp_s\Big(\theta^0 \check{p}(x)^{1-s}\Big) \otimes_s \check{p}(x) \in \big(\check{\mathcal{P}} \times \mathbb{R}_+, U_B^{r+1}, e_s\big) \\ &= \big(1 + (1-s)\,\theta^0\big)^{\frac{1}{1-s}}\, \check{p}(x) \end{aligned} \tag{323}$$

さらに，$\overset{B}{p}(x)$ の τ-アファイン共役をとると，

$$\begin{aligned} \overset{S}{p}(x) &= \exp_{1-s}\big(\check{p}(x)^s \ln_{1-s}\big(\exp_s\big(-\theta^0\big)\big)\big) \otimes_{1-s} \check{p}(x) \\ &= \big(1 - (1-s)\,\theta^0\big)^{\frac{1}{1-s}}\, \check{p}(x) \end{aligned} \tag{324}$$

である．

このとき，τ-対数尤度は，それぞれ次のようになる：

$$\begin{aligned} \overset{B}{\ell} &= \theta^0 \check{p}(x)^{1-s} + \ln_s \check{p}(x) \\ &= \theta^0 \check{p}^{1-s} + C^{-(1-s)} \left(\sum_{i=1}^{r} \theta^i x^i - \psi_B + \ln_s \check{p}_0 \right) \end{aligned} \tag{325}$$

$$\begin{aligned} \overset{S}{\ell} &= \check{p}(x)^s \ln_{1-s}\big(\exp_s\big(-\theta^0\big)\big) + \ln_{1-s} \check{p}(x) \\ &= \check{p}^s \ln_{1-s}\big(\exp_s\big(-\theta^0\big)\big) + \ln_{1-s}\left(\exp_s\left(C^{-(1-s)} \left(\sum_{i=1}^{r} \theta^i x^i - \psi_B + \ln_s \check{p}_0 \right)\right)\right) \end{aligned} \tag{326}$$

4.1 素朴なエントロピー（発散）

通常，エントロピーは，負の対数尤度の期待値として定義されている．しかし，計量や接続の定義でみてきたように，ここでは期待値をとる操作はまだ導入されておらず，すべて *Body* 世界と *Soul* 世界の量の縮約を通して定義されている．したがって，ここでの対応物は，次のようなものになるだろう．まずは，$\theta^0 = 0$ として，

$$\begin{aligned} S_{bare} &= \left\langle \overset{S}{\ell} \,\middle|\, - \overset{B}{\ell} \right\rangle \\ &= -\int \mathrm{d}x\, \frac{1}{s}\,(\check{p}^s - 1)\, \frac{1}{1-s}\,\big(\check{p}^{1-s} - 1\big) \\ &= \frac{1}{s\,(1-s)} \int \mathrm{d}x\ (\check{p}^s - \check{p}) + \frac{1}{s\,(1-s)} \int \mathrm{d}x\, \check{p}^{1-s} - \frac{1}{s\,(1-s)} \int \mathrm{d}x\, 1 \end{aligned} \tag{327}$$

のように定義できる．

しかし，このエントロピー S_{bare} は

$$\int \mathrm{d}x\, 1 \tag{328}$$

という項を含んでおり，他の項が収束した場合でも，この項だけは発散してしまう．

このままでは，$-\infty$ を基準にエントロピーを測っていることになるので，エントロピーの原点を 0 に移動させることを考える．元々，エントロピーは，その値そのものが意味をもっているのではなく，確率分布が変化した際のエントロピーの変化量，すなわち，その差が重要な意味をもっているので，S_{bare} の定義から発散に対応する量をあらかじめ引いておくことができれば，有限の量となり扱いやすくなる[*54]．次の節では，このことについて考えていくことにする．

4.2 くり込み

さて，素朴なエントロピー S_{bare} から，どのようにして発散する量を取り除くことができるのか考える．まず，発散の出処は，τ-対数尤度 $\overset{S}{\ell}$ に含まれている 1 である[*55]ということに注目する．もし，この 1 を τ-対数尤度 $\overset{S}{\ell}$ から取り除くことができれば，発散する項は出てこないので，有限なエントロピーを定義することができる．

そこで，以下のような τ-商の性質を思い出そう：

$$f \oslash_\tau 0 = \left(f^{1-\tau} + 1\right)^{\frac{1}{1-\tau}} \tag{330}$$

ここで $\tau = 1 - s$ として，f に $\check{p}(x)$ を代入してみると，

$$\check{p}(x) \oslash_{1-s} 0 = \left(\check{p}(x)^s + 1\right)^{\frac{1}{s}} \tag{331}$$

[*54] 信号理論においては，離散信号の場合のエントロピーは有限の値をとるように定義できるが，この離散信号の場合に定義されたエントロピーを連続信号の場合には極限移行により定義すれば，無意味な発散項

$$-\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = -\infty \tag{329}$$

が登場する．通常は，この発散は確率分布 $\check{p}$ とは無関係であり，信号が連続であるということにのみ起因して生じるものであるため，この発散項を除外することで連続信号に対するエントロピーが定義される．このため，連続信号の場合のエントロピーは，正にも負にもなり得るので，その値自体にはあまり意味はない．しかし，2 つのエントロピーの差で定義される情報量には明確な意味付けを行うことができる．

[*55] これは，$\lim_{s \to 1} \overset{B}{\ell} = \log \check{p}$ となるので，$\overset{B}{\ell}$ の部分はそのままにしておきたいからである．

となる．この関係式の左辺を $\check{p}_*(x)$ と表すことにする．この $\check{p}_*(x)$ の τ-対数尤度をとると

$$\ln_{1-s}\check{p}_*(x)=\frac{1}{s}\,\check{p}(x)^s \tag{332}$$

となることがわかる．

これは，まさに τ-対数尤度 $\overset{S}{\ell}$ に含まれている 1 を取り除いたことになっている．このような発散の除去の仕方は，物理で知られている "くり込み" に相当している．今の場合は，波動関数のくり込みに特に類似している．そこで，τ-商を用いて 0 で割ることにより発散を取り除くことを，"くり込み" とよぶことにする．つまり，$\check{p}_*(x)$ は，確率分布 $\check{p}(x)$ にくり込みを適用したものである．さらに，くり込まれた確率分布 $\check{p}_*(x)$ から得られる τ-対数尤度も，くり込まれた τ-対数尤度とよぶことにし，

$$\overset{S}{\ell}_*=\ln_{1-s}\check{p}_*(x)=\frac{1}{s}\,\check{p}(x)^s \tag{333}$$

のように表すことにする．もちろん，τ-アファイン共役なくり込まれた τ-対数尤度 $\overset{B}{\ell}_*$ も，同様にして

$$\overset{B}{\ell}_*=\ln_s\check{p}_*(x)=\frac{1}{1-s}\,\check{p}(x)^{1-s} \tag{334}$$

で与えられる．

一方，θ^0 方向の基底ベクトルである $\overset{\tau}{\ell}_0$ は，$\theta^0=0$ では，くり込まれた τ-対数尤度と次のような関係にある：

$$\overset{S}{\ell}_0=-s\,\overset{S}{\ell}_* \tag{335}$$

$$\overset{B}{\ell}_0=(1-s)\,\overset{B}{\ell}_* \tag{336}$$

しかし，$\theta^0\neq 0$ では，くり込まれた τ-対数尤度は,

$$\overset{S}{\ell}_*=\frac{1}{s}\,\overset{S}{p}{}^s=\frac{1}{s}\left(1-(1-s)\,\theta^0\right)^{\frac{s}{1-s}}\check{p}^s \tag{337}$$

$$\overset{B}{\ell}_*=\frac{1}{1-s}\,\overset{B}{p}{}^{1-s}=\frac{1}{1-s}\left(1+(1-s)\,\theta^0\right)\check{p}^{1-s} \tag{338}$$

のようになり，θ^0 方向の基底ベクトル $\overset{\tau}{\ell}_0$ は，$\theta^0\neq 0$ で評価すると,

$$\overset{S}{\ell}_0=-\check{p}^s\left(1-(1-s)\,\theta^0\right)^{\frac{2s-1}{1-s}}=-s\left(1-(1-s)\,\theta^0\right)^{-1}\overset{S}{\ell}_* \tag{339}$$

$$\overset{B}{\ell}_0=\check{p}^{1-s}=(1-s)\left(1+(1-s)\,\theta^0\right)^{-1}\overset{B}{\ell}_* \tag{340}$$

のようになる．

これらの関係式を用いれば，くり込まれた τ-対数尤度との縮約は，基底ベクトル $\overset{\tau}{\ell}_0$ 方向への重み付き射影と考えることもできる．このような捉え方は，τ-情報幾何学でベイズ推定を取扱う際には，$\check{\mathcal{P}}$ ではなく $\check{\mathcal{P}} \times \mathbb{R}_+$ で考える必要があるので重要になってくる．

4.3　エントロピー（有限）

さて，くり込まれた τ-対数尤度 $\overset{S}{\ell}_*$ との縮約を用いて，$\theta^0 = 0$ のときのエントロピーを次のように定義する：

$$
\begin{aligned}
\overset{B}{S}(\check{p}) &= \left\langle \overset{S}{\ell}_* \middle| -\overset{B}{\ell} \right\rangle \\
&= \frac{1}{s\,(1-s)} \int \mathrm{d}x \ (\check{p}^s - \check{p}) \\
&= -\frac{1}{s} \int \mathrm{d}x \, \check{p}^s \ \ln_s \check{p} \\
&= -\frac{1}{s} \int \mathrm{d}x \, \check{p} \ \ln_{2-s} \check{p}
\end{aligned} \tag{341}
$$

例として，離散的な場合について考えてみる．まず，次のような離散的確率分布が与えられたものとする：

$$
\check{p} = \overset{B}{\check{p}} = \sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta(x-i) \tag{342}
$$

ただし，$\delta(x-i)$ はディラックのデルタ測度であり，

$$
\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \tag{343}
$$

である．また，平行移動量 u_B は

$$
u_B = \ln_s \check{p} - \ln_s \check{p}_0 = \frac{1}{1-s} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^{1-s} \, \delta(x-i) - 1 \right) - \ln_s \check{p}_0 \tag{344}
$$

のように表される．

このとき，くり込まれた τ-対数尤度 $\overset{S}{\ell}_*$ は，

$$
\overset{S}{\ell}_* = \frac{1}{s} \check{p}^s = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{n} p_i^s \, \delta(x-i) \tag{345}
$$

となり，

$$\overset{B}{\ell} = \frac{1}{1-s}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^{1-s}\,\delta(x-i) - 1\right) \tag{346}$$

なので，エントロピーは次のように求められる：

$$\begin{aligned}
\overset{B}{S}(\check{p}) &= \left\langle \overset{S}{\ell}_* \middle| -\overset{B}{\ell} \right\rangle \\
&= -\frac{1}{s\,(1-s)}\int \mathrm{d}x\,\sum_{i=1}^{n} p_i^s\,\delta(x-i)\left(\sum_{j=1}^{n} p_j^{1-s}\,\delta(x-j) - 1\right) \\
&= \frac{1}{s\,(1-s)}\int \mathrm{d}x\,\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^s\,\delta(x-i) - \sum_{i,j=1}^{n} p_i^s\,p_j^{1-s}\,\delta(x-i)\,\delta(x-j)\right) \\
&= \frac{1}{s\,(1-s)}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^s - \sum_{i,j=1}^{n} p_i^s\,p_j^{1-s}\,\delta_{ij}\right) \\
&= \frac{1}{s\,(1-s)}\sum_{i=1}^{n}(p_i^s - p_i)
\end{aligned} \tag{347}$$

ここで，$s=1$ の極限をとってみると，

$$\lim_{s\to 1}\overset{B}{S} = \lim_{s\to 1}\frac{1}{s\,(1-s)}\sum_{i=1}^{n}(p_i^s - p_i) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \tag{348}$$

となる．このことから，くり込まれた τ-対数尤度との縮約によるエントロピーの定義は，正確に離散の場合のエントロピーを再現できることがわかる．

次に，このエントロピーのもつ性質について調べていく．まず，互いに独立な確率分布 $\check{p}_1(x)$ と $\check{p}_2(x)$ が与えられたとき，以下の 2 種類の恒等式が成立することに注目する：

$$\ln_s(\check{p}_1\check{p}_2) = \check{p}_2^{1-s}\ln_s\check{p}_1 + \check{p}_1^{1-s}\ln_s\check{p}_2 - (1-s)\ln_s\check{p}_1\cdot\ln_s\check{p}_2 \tag{349}$$

$$\ln_s(\check{p}_1\check{p}_2) = \ln_s\check{p}_1 + \ln_s\check{p}_2 + (1-s)\ln_s\check{p}_1\cdot\ln_s\check{p}_2 \tag{350}$$

左辺は，どちらも共通であるが右辺が異なっている．この相違が，以下でみるように，エントロピーのもつ性質に決定的な違いを与えることになる．

このとき，エントロピーは

$$\overset{B}{S}(\check{p}_1\check{p}_2) = \left\langle \overset{S}{\ell}_* \middle| -\overset{B}{\ell} \right\rangle = \frac{1}{s}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (\check{p}_1\check{p}_2)^s\,(-\ln_s(\check{p}_1\check{p}_2)) \tag{351}$$

で与えられるが，式 (349) を用いたときには,

$$\begin{aligned}
&\overset{B}{S}(\check{p}_1\check{p}_2) \\
&= \frac{1}{s}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (\check{p}_1\check{p}_2)^s \left(-\check{p}_2^{1-s}\ln_s \check{p}_1 - \check{p}_1^{1-s}\ln_s \check{p}_2 + (1-s)\ln_s \check{p}_1 \cdot \ln_s \check{p}_2\right) \\
&= \frac{1}{s}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (-\check{p}_2\check{p}_1^s \ln_s \check{p}_1 - \check{p}_1\check{p}_2^s \ln_s \check{p}_2 + (1-s)\,\check{p}_1^s \ln_s \check{p}_1 \cdot \check{p}_2^s \ln_s \check{p}_2) \\
&= \overset{B}{S}(\check{p}_1) + \overset{B}{S}(\check{p}_2) + s\,(1-s)\,\overset{B}{S}(\check{p}_1)\,\overset{B}{S}(\check{p}_2)
\end{aligned} \tag{352}$$

となる．したがって，エントロピー $\overset{B}{S}(\check{p})$ は次のような非加法性をもつことになる：

$$\overset{B}{S}(\check{p}_1\check{p}_2) = \overset{B}{S}(\check{p}_1) + \overset{B}{S}(\check{p}_2) + s\,(1-s)\,\overset{B}{S}(\check{p}_1)\,\overset{B}{S}(\check{p}_2) \tag{353}$$

実は，ここでのエントロピーとツァリスエントロピーとは,

$$S^{Tsallis}(\check{p}) = s\,\overset{B}{S}(\check{p}) \tag{354}$$

のように関係しており，ツァリスエントロピーの満たす非加法性は式 (353) で与えられているものと同様になる：

$$S^{Tsallis}(\check{p}_1\check{p}_2) = S^{Tsallis}(\check{p}_1) + S^{Tsallis}(\check{p}_2) + (1-s)\,S^{Tsallis}(\check{p}_1)\,S^{Tsallis}(\check{p}_2) \tag{355}$$

また，式 (350) を用いたときには,

$$\begin{aligned}
&\overset{B}{S}(\check{p}_1\check{p}_2) \\
&= \frac{1}{s}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (\check{p}_1\check{p}_2)^s\,(-\ln_s \check{p}_1 - \ln_s \check{p}_2 - (1-s)\ln_s \check{p}_1 \cdot \ln_s \check{p}_2) \\
&= \frac{1}{s}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (-\check{p}_2^s\check{p}_1^s \ln_s \check{p}_1 - \check{p}_1^s\check{p}_2^s \ln_s \check{p}_2 - (1-s)\,\check{p}_1^s \ln_s \check{p}_1 \cdot \check{p}_2^s \ln_s \check{p}_2) \\
&= \Xi_1\Xi_2\left(\Xi_1^{-1}\overset{B}{S}(\check{p}_1) + \Xi_2^{-1}\overset{B}{S}(\check{p}_2) - s\,(1-s)\,\Xi_1^{-1}\overset{B}{S}(\check{p}_1)\,\Xi_2^{-1}\overset{B}{S}(\check{p}_2)\right)
\end{aligned} \tag{356}$$

のようになる．ただし,

$$\Xi_1 = \int \mathrm{d}x\,\check{p}_1^s \tag{357}$$

$$\Xi_2 = \int \mathrm{d}y\,\check{p}_2^s \tag{358}$$

である．

そこで，共形エントロピーを，$\Xi = \displaystyle\int \mathrm{d}x\, \check{p}^s$ として

$$S_B(\check{p}) = \frac{s}{\Xi} \overset{B}{S}(\check{p}) \tag{359}$$

のように定義すれば[*56]，共形エントロピー $S_B(\check{p})$ は次のような非加法性をもつことになる：

$$S_B(\check{p}_1\check{p}_2) = S_B(\check{p}_1) + S_B(\check{p}_2) - (1-s)\, S_B(\check{p}_1)\, S_B(\check{p}_2) \tag{360}$$

ツァリスエントロピーは，この共形性とは両立せず，非加法性を表す項の符号が逆転していることに注意する．どちらの符号を選択するかは，考える問題に依存して決められることになる．

さて，ここで $s=0$ の場合について考える．このとき，$\overset{S}{\ell}_*$ は発散するので役に立たなくなってしまう．しかし，元の素朴なエントロピーの定義に戻ると，

$$\begin{aligned} S_{bare}(\check{p}) &= \left\langle \overset{S}{\ell} \middle| -\overset{B}{\ell} \right\rangle \Bigg|_{s=0} \\ &= \int \mathrm{d}x \left\{ \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \left(\check{p}^s - 1\right) \right\} \left(-\left(\check{p} - 1\right)\right) \\ &= -\int \mathrm{d}x\, \check{p} \log \check{p} + \int \mathrm{d}x\, \log \check{p} \end{aligned} \tag{361}$$

となるので，今度は，τ-対数尤度 $\overset{B}{\ell}$ のくり込みを考える．まず，

$$\check{p} \oslash_s 0 = \left(\check{p}^{1-s} + 1\right)^{\frac{1}{1-s}} \tag{362}$$

なので，くり込まれた τ-対数尤度 $\overset{B}{\ell}_*$ は

$$\overset{B}{\ell}_* = \frac{1}{1-s}\, \check{p}^{1-s} \tag{363}$$

のようになる．これを用いれば，$s=0$ のときのエントロピー $\overset{S}{S}(\check{p})\Big|_{s=0}$ は，

$$\left\langle \overset{S}{\ell} \middle| -\overset{B}{\ell}_* \right\rangle \Bigg|_{s=0} = \left\langle -\overset{S}{\ell} \middle| \overset{B}{\ell}_* \right\rangle \Bigg|_{s=0} \tag{364}$$

[*56] 確率変数 X と Y の同時分布 $\check{p}_1\check{p}_2$ のエントロピーを考えているので，$(\Xi_1\Xi_2) = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (\check{p}_1\check{p}_2)^s$ より，$S_B(\check{p}_1\check{p}_2) = \dfrac{s}{(\Xi_1\Xi_2)} \overset{B}{S}(\check{p}_1\check{p}_2)$ となる．

なので，$s=0$ のときのエントロピーの定義を次のように変更すると

$$\overset{S}{S}(\check{p})\Big|_{s=0} = \left\langle -\overset{S}{\ell}\middle|\overset{B}{\ell}_*\right\rangle\Big|_{s=0} = \int \mathrm{d}x\,(-\log\check{p})\,\check{p} = -\int \mathrm{d}x\,\check{p}\log\check{p} \tag{365}$$

のようになり，お馴染の型のエントロピーを導くことができる．

4.4 縮約と期待値

通常，エントロピーは負の対数尤度の期待値として定義されることを考慮し，くり込まれた τ-対数尤度を用いて期待値をとる操作を以下のように定義する：

$$\mathrm{E}_s[f(x)] = \frac{s}{\Xi}\left\langle \overset{S}{\ell}_*\middle| f(x)\right\rangle = \frac{1}{\Xi}\int \mathrm{d}x\,\check{p}^s f(x) \tag{366}$$

また，$\dfrac{1}{\Xi}\check{p}^s$ をエスコート分布とよぶこともある．

さらに，$\theta^0=0$ における τ-対数尤度 $\overset{S}{\ell}_0$ を用いれば，$\overset{S}{\ell}_0 = -s\,\overset{S}{\ell}_*$ であり，$g^{00}=-1$ なので，

$$\mathrm{E}_s[f(x)] = \frac{1}{\Xi}g^{00}\left\langle \overset{S}{\ell}_0\middle| f(x)\right\rangle\Big|_{\theta^0=0} \tag{367}$$

のように期待値を定義することもできる．つまり，期待値とは，θ^0 方向への射影を規格化したものである．

さて，$s=0$ の場合は，やはり期待値の定義を変更する必要があり，エントロピーのときと同様に

$$\mathrm{E}_0[f(x)] = \left\langle f(x)\middle|\overset{B}{\ell}_*\right\rangle\Big|_{s=0} = -g^{00}\left\langle f(x)\middle|\overset{B}{\ell}_0\right\rangle\Big|_{s=0} = \int \mathrm{d}x\,\check{p}\,f(x) \tag{368}$$

で定義する．

この期待値を用いてエントロピーを表してみると，

$$\mathrm{E}_s\left[-\overset{B}{\ell}\right] = \frac{s}{\Xi}\left\langle \overset{S}{\ell}_*\middle| -\overset{B}{\ell}\right\rangle = \frac{s}{\Xi}\overset{B}{S}(\check{p}) = S_B(\check{p}) \tag{369}$$

となり，共形エントロピーが得られる．

また，$s=0$ の場合には，

$$\mathrm{E}_0\left[-\overset{S}{\ell}\right] = \left\langle -\overset{S}{\ell}\middle|\overset{B}{\ell}_*\right\rangle\Big|_{s=0} = \overset{S}{S}(\check{p})\Big|_{s=0} = -\int \mathrm{d}x\,\check{p}\log\check{p} \tag{370}$$

のようになり，ボルツマン・シャノン・エントロピーが得られる．

4.5 ツァリス・エントロピーとレニー・エントロピー

ここでは，有名な一般化エントロピーであるツァリス・エントロピーとレニー・エントロピーに対して，エントロピーと共形エントロピーがどのような位置付けになっているのかを具体的に示す.

まず，ツァリス・エントロピーの定義は，

$$S^{Tsallis} = \frac{1}{1-s}\sum_{i=1}^{n}\left(\check{p}_i^s - \check{p}_i\right) \tag{371}$$

であり，レニー・エントロピーの定義は，

$$S^{Rényi} = \frac{1}{1-s}\log\left(\sum_{i=1}^{n}\check{p}_i^s\right) \tag{372}$$

である.

また，エントロピーと共形エントロピーの関係は

$$\frac{s}{\Xi}\overset{B}{S}(\check{p}) = S_B(\check{p}) = \frac{1}{\Xi}\frac{1}{1-s}\sum_{i=1}^{n}\left(\check{p}_i^s - \check{p}_i\right) \tag{373}$$

のようなものである.

そこで，$\sum_{i=1}^{n}\check{p}_i^s$ を，それぞれのエントロピーを用いて表してみると

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\check{p}_i^s &= \exp\bigl((1-s)\,S^{Rényi}\bigr) && (374)\\ &= \left\{\exp_s\bigl(S^{Tsallis}\bigr)\right\}^{1-s} && (375)\\ &= \left\{\exp_s\left(s\,\overset{B}{S}(\check{p})\right)\right\}^{1-s} && (376)\\ &= \left\{\exp_s(\Xi\,S_B(\check{p}))\right\}^{1-s} && (377)\end{aligned}$$

のようになるので，次のような関係式をえることができる：

$$\exp\bigl(S^{Rényi}\bigr) = \exp_s\bigl(S^{Tsallis}\bigr) = \exp_s\left(s\,\overset{B}{S}(\check{p})\right) = \exp_s(\Xi\,S_B(\check{p})) \tag{378}$$

ただし，レニー・エントロピーは加法的なエントロピーであるのに対して，ツァリス・エントロピーとエントロピーおよび共形エントロピーは非加法的なエントロピーであるこ

とに注意する必要がある．さらに，ツァリス・エントロピーの満たす非加法性は，エントロピーと共形エントロピーの満たす非加法性とは異なるものであることにも注意する必要がある．

5 ダイバージェンス

まず，$Body$ 世界で考える．

$$\begin{aligned}
\check{p}_2 &= \exp_s(\check{u}) \otimes_s \check{p}_1 \\
&= \left(\check{p}_1^{1-s} + (1-s)\,\check{u}\right)^{\frac{1}{1-s}} \\
&= \check{p}_1 + \check{p}_1^s \check{u} + \frac{1}{2}\check{p}_1^{2s-1}\check{u}^2 s + \frac{1}{6}\check{p}_1^{3s-2}\check{u}^3 s\,(2s-1) \\
&\qquad + \frac{1}{24}\check{p}_1^{4s-3}\check{u}^4 s\,(2s-1)\,(3s-2) + \cdots \\
&= \check{p}_1 + \overset{B}{F}_1(\check{p}_1;\check{u}) \\
&= \check{p}_1 + \check{p}_1^s \check{u} + \overset{B}{F}_2(\check{p}_1;\check{u})
\end{aligned} \tag{379}$$

ただし，

$$\overset{B}{F}_a(\check{p}_1;\check{u}) = \sum_{m=a}^{\infty} \frac{1}{m!}\,\check{p}_1^{ms-(m-1)}\check{u}^m \left(\prod_{k=0}^{m-1}(ks-(k-1))\right) \tag{380}$$

である．

今後，確率分布が複数登場するときには，以下のような表記を用いて，どの確率分布に関する量なのかを明確にする：

$$\overset{B}{\ell}(\check{p}_i) = \ln_s \check{p}_i \tag{381}$$

さて，平行移動量 $\check{u}$ が

$$\check{u} = \overset{B}{\ell}(\check{p}_2) - \overset{B}{\ell}(\check{p}_1) \tag{382}$$

により厳密に与えられることに注意して，$\overset{B}{F}_2(\check{p}_1;\check{u})$ を確率分布 $\check{p}_1$ と $\check{p}_2$ を用いて表すと，

$$
\begin{aligned}
\overset{B}{F}_2(\check{p}_1;\check{u}) &= -\check{p}_1^s\left\{\check{u}-\check{p}_1^{-s}\left(\check{p}_2-\check{p}_1\right)\right\} \\
&= -\check{p}_1^s\left\{\overset{B}{\ell}(\check{p}_2)-\overset{B}{\ell}(\check{p}_1)-\check{p}_1^{-s}\left(\check{p}_2-\check{p}_1\right)\right\} \\
&= \frac{1}{1-s}\left\{s\,\check{p}_1+(1-s)\,\check{p}_2-\check{p}_1^s\,\check{p}_2^{1-s}\right\}
\end{aligned}
\tag{383}
$$

のようになる．

このとき，次の式により確率分布 $\check{p}_1$ と $\check{p}_2$ の $Body$ 世界でのダイバージェンス[*57]を定義する：

$$
\begin{aligned}
&\overset{B}{D}\big(\check{p}_1\big\|\check{p}_2\big) \\
&= \left\langle \overset{S}{\ell}_*(\check{p}_1)\,\middle|\, -\left\{\overset{B}{\ell}(\check{p}_2)-\overset{B}{\ell}(\check{p}_1)-\check{p}_1^{-s}\left(\check{p}_2-\check{p}_1\right)\right\}\right\rangle \\
&= \left\langle \overset{S}{\ell}_*(\check{p}_1)\,\middle|\,\check{p}_1^{-s}\overset{B}{F}_2(\check{p}_1;\check{u})\right\rangle \\
&= \frac{1}{s}\int \mathrm{d}x\,\overset{B}{F}_2(\check{p}_1;\check{u}) \\
&= \frac{1}{s\,(1-s)}\int \mathrm{d}x\left\{s\,\check{p}_1+(1-s)\,\check{p}_2-\check{p}_1^s\,\check{p}_2^{1-s}\right\}
\end{aligned}
\tag{384}
$$

ダイバージェンスの表示または定義に用いられたものが $\overset{B}{F}_2(\check{p}_1;\check{u})$ であることから，ここで定義されたダイバージェンスがブレグマンダイバージェンス[*58]の一種であることもわかる．

[*57] チェンツォフのよれば，測る向きにより値が変化するので，偏差 (deviation) を使う方が望ましいということである．ここでの定義からもわかるように，ダイバージェンスは確率分布 $\check{p}_2$ を，$\check{p}_1$ からのズレを τ-対数尤度で測った偏差 $\check{u}$ で 1 次近似したときの誤差 $\overset{B}{F}_2(\check{p}_1;\check{u})$ を測っているので，元となる確率分布 $\check{p}_1$ に対する偏差と考える方が自然である．

[*58] ブレグマンダイバージェンスは，$\check{p}_2$ の負の対数尤度 $F(\check{p}_2)$ を $\check{p}_1$ で 1 次のオーダーまでで近似した際の，近似誤差

$$
F(\check{p}_2)-\left\{F(\check{p}_1)+\nabla F(\check{p}_1)\left(\check{p}_2-\check{p}_1\right)\right\} \tag{385}
$$

の期待値として定義されるので，正にここでのダイバージェンスの定義と一致するが，ここでの定義の方が，2 次以上の近似誤差の期待値であることをより強調したものとなっている．

また，$Soul$ 世界では，

$$
\begin{aligned}
\check{p}_2 &= \exp_{1-s}(\check{u}) \otimes_{1-s} \check{p}_1 \\
&= \left(\check{p}_1^s + s\,\check{u}\right)^{\frac{1}{s}} \\
&= \check{p}_1 + \check{p}_1^{1-s}\check{u} + \frac{1}{2}\check{p}_1^{1-2s}\check{u}^2\,(1-s) + \frac{1}{6}\check{p}_1^{1-3s}\check{u}^3\,(1-s)\,(1-2s) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{24}\check{p}_1^{1-4s}\check{u}^4\,(1-s)\,(1-2s)\,(1-3s) + \cdots \\
&= \check{p}_1 + \overset{S}{F}_1(\check{p}_1;\check{u}) \\
&= \check{p}_1 + \check{p}_1^{1-s}\check{u} + \overset{S}{F}_2(\check{u}) \qquad (386)
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
\overset{S}{F}_a(\check{p}_1;\check{u}) = \sum_{m=a}^{\infty} \frac{1}{m!}\,\check{p}_1^{1-ms}\check{u}^m \left(\prod_{k=0}^{m-1}(1-ks)\right) \qquad (387)
$$

である．

平行移動量 $\check{u}$ は，

$$
\check{u} = \overset{S}{\ell}(\check{p}_2) - \overset{S}{\ell}(\check{p}_1) \qquad (388)
$$

により厳密に与えられるので，$\overset{S}{F}_2(\check{p}_1;\check{u})$ を確率分布 $\check{p}_1$ と $\check{p}_2$ を用いて表すと，

$$
\begin{aligned}
\overset{S}{F}_2(\check{p}_1;\check{u}) &= -\check{p}_1^{1-s}\left\{\check{u} - \check{p}_1^{s-1}\,(\check{p}_2 - \check{p}_1)\right\} \\
&= -\check{p}_1^{1-s}\left\{\overset{S}{\ell}(\check{p}_2) - \overset{S}{\ell}(\check{p}_1) - \check{p}_1^{s-1}\,(\check{p}_2 - \check{p}_1)\right\} \\
&= \frac{1}{s}\left\{s\,\check{p}_2 + (1-s)\,\check{p}_1 - \check{p}_2^s\,\check{p}_1^{1-s}\right\} \qquad (389)
\end{aligned}
$$

のようになる．

そこで，次の式により確率分布 $\check{p}_1$ と $\check{p}_2$ の $Soul$ 世界でのダイバージェンスを定義する：

$$\begin{aligned}&\overset{S}{D}\big(\check{p}_1\big\|\check{p}_2\big)\\&=\left\langle -\left\{\overset{S}{\ell}(\check{p}_2)-\overset{S}{\ell}(\check{p}_1)-\check{p}_1^{s-1}\left(\check{p}_2-\check{p}_1\right)\right\}\middle|\overset{B}{\ell}_*(\check{p}_1)\right\rangle\\&=\left\langle \check{p}_1^{s-1}\overset{S}{F}_2(\check{p}_1;\check{u})\middle|\overset{B}{\ell}_*(\check{p}_1)\right\rangle\\&=\frac{1}{1-s}\int\mathrm{d}x\,\overset{S}{F}_2(\check{p}_1;\check{u})\\&=\frac{1}{s\left(1-s\right)}\int\mathrm{d}x\left\{s\,\check{p}_2+\left(1-s\right)\check{p}_1-\check{p}_2^s\,\check{p}_1^{1-s}\right\}\end{aligned}\tag{390}$$

ところで，$Body$ 世界のダイバージェンスと $Soul$ 世界のダイバージェンスは，次のような関係にあることがわかる：

$$\overset{B}{D}\big(\check{p}_1\big\|\check{p}_2\big)=\overset{S}{D}\big(\check{p}_2\big\|\check{p}_1\big)\tag{391}$$

また，ダイバージェンスは，エントロピーのときと同様に θ^0 方向への射影として考えることもできる．

さて，ダイバージェンスの定義を，$\big(\check{\mathcal{P}}\times\mathbb{R}_+,U_\Omega^{r+1}\big(\check{\mathcal{P}}\big),e_\tau\big)$ の元 p_1 と p_2 に対しても適用できるようにするために，τ-対数尤度を通して測った可測関数 p_1 と p_2 の差を表す関数を一般化した $\overset{\tau}{F}_a(p_1;\Delta)$ を，

$$\overset{\tau}{F}_a(p_1;\Delta)=\sum_{m=a}^{\infty}\frac{1}{m!}\,p_1^{1-m(1-\tau)}\Delta^m\left(\prod_{k=0}^{m-1}\left(1-k\left(1-\tau\right)\right)\right)\tag{392}$$

のように定義すると，

$$\overset{\tau}{F}_2(p_1;\Delta)=\frac{1}{1-\tau}\left\{\tau\,p_1+\left(1-\tau\right)p_2-p_1^\tau\,p_2^{1-\tau}\right\}\tag{393}$$

となる．ただし，

$$p_2=\left(p_1^{1-\tau}+\left(1-s\right)\Delta\right)^{\frac{1}{1-\tau}}\tag{394}$$

であり，この Δ は p_1 と p_2 を何に選ぶかで変化する：

$$\Delta=\ln_\tau p_2-\ln_\tau p_1\tag{395}$$

このとき，可測関数 p_1 に対する p_2 のダイバージェンス（偏差）は，$\check{u}=\ln_\tau \check{p}_2-\ln_\tau \check{p}_1$ として，

$$\overset{\tau}{D}\big(p_1\big\|p_2\big)=\frac{1}{\tau}\int \mathrm{d}x\,\overset{\tau}{F}_2\bigg(p_1;\bigg(1+\frac{2\tau-1}{2s-1}\,(1-s)\,\theta^0(p_2)\bigg)\,\check{u}\bigg)$$
$$=\frac{1}{\tau\,(1-\tau)}\int \mathrm{d}x\,\big\{\tau\,p_1+(1-\tau)\,p_2-p_1^\tau\,p_2^{1-\tau}\big\} \tag{396}$$

で与えられる．したがって，τ-アファイン共役をとるとき，θ^0 方向の座標 $\theta^0(p_1)$ と $\theta^0(p_2)$ の符号も同時に反転させることに注意すれば，

$$\overset{B}{D}\big(p_1\big\|p_2\big)=\overset{S}{D}\big(p_2\big\|p_1\big) \tag{397}$$

が成立する．

特に，p_1 として $\check{p}_1$ を選び，p_2 として p_1 を選んだ場合には，$\check{u}=\ln_s \check{p}_2-\ln_s \check{p}_1=0$ であり，

$$\overset{B}{D}\big(\check{p}_1\big\|p_1\big)=\frac{1}{s}\int \mathrm{d}x\,\overset{B}{F}_2\big(\check{p}_1;\theta^0\check{p}_1^{1-s}\big)$$
$$=\frac{1}{s}\Big\{\big(1+(1-s)\,\theta^0\big)^{\frac{1}{1-s}}-\big(1+\theta^0\big)\Big\} \tag{398}$$

のようになる．

まとめると，

$$\overset{B}{D}\big(\rho_1\big\|\rho_2\big)=\frac{1}{s}\int \mathrm{d}x\,\overset{B}{F}_2(\rho_1;\Delta) \tag{399}$$

であり，

$$\Delta=\begin{cases}\check{u} & \text{for } \rho_1=\check{p}_1,\ \rho_2=\check{p}_2\\ \big(1+(1-s)\,\theta^0(p_2)\big)\,\check{u} & \text{for } \rho_1=p_1,\ \rho_2=p_2\\ \theta^0\,\check{p}_1^{1-s} & \text{for } \rho_1=\check{p}_1,\ \rho_2=p_1\end{cases} \tag{400}$$

である．ただし，

$$\check{u}=\ln_s \check{p}_2-\ln_s \check{p}_1 \tag{401}$$

である．

次に，ダイバージェンスを具体的に評価してみる．まず，

$$\frac{\partial \check{p}}{\partial \theta^i}=C^{-2(1-s)}\check{p}^s$$
$$\times\left[(1+(1-s)\,\psi_B)\,x^i-\frac{\partial \psi_B}{\partial \theta^i}\left\{1+(1-s)\left(\sum_{j=1}^r \theta^j x^j+\ln_s \check{p}_0\right)\right\}\right] \tag{402}$$

であることを利用して，

$$\int \mathrm{d}x\, \check{p}^s \ln_s \check{p}_0 = \psi_B - \theta^i \frac{\partial \psi_B}{\partial \theta^i} + \frac{1}{1-s}(1-\Xi) \tag{403}$$

を得る[*59]．そして，スペースの都合により，$\theta^0(p_i)$ を θ^0_i，$\theta^i(p_j)$ を θ^i_j，$\Xi(p_i)$ を Ξ_i，$\psi_B(p_i)$ を $\psi_{B,i}$ と書くことにし，θ^0 方向のスケール因子を

$$\overset{\tau}{r}_i = \left(1 + \frac{2\tau-1}{2s-1}(1-s)\,\theta^0_i\right)^{\frac{1}{1-s}} \tag{404}$$

のように定義する．

このとき，*Body* 世界のダイバージェンスは，

$$\begin{aligned}\overset{B}{D}(p_1\|p_2) &= \frac{1}{s(1-s)}\left\{s\,\overset{B}{r}_1 + (1-s)\,\overset{B}{r}_2 - \overset{B}{r}{}^s_1\,\overset{B}{r}{}^{1-s}_2\right\}\\ &\quad + \frac{1}{s}\,\overset{B}{r}{}^s_1\,\overset{B}{r}{}^{1-s}_2 C_2^{-(1-s)}\left\{\psi_{B,2} - \psi_{B,1} - \left(\theta^i_2 - \theta^i_1\right)\frac{\partial \psi_{B,1}}{\partial \theta^i_1}\right\}\end{aligned} \tag{405}$$

のように求めることができ，*Soul* 世界のダイバージェンスは，

$$\begin{aligned}\overset{S}{D}(p_1\|p_2) &= \frac{1}{s(1-s)}\left\{(1-s)\,\overset{S}{r}_1 + s\,\overset{S}{r}_2 - \overset{S}{r}{}^{1-s}_1\,\overset{S}{r}{}^s_2\right\}\\ &\quad + \frac{1}{s}\,\overset{S}{r}{}^{1-s}_1\,\overset{S}{r}{}^s_2 C_1^{-(1-s)}\left\{\psi_{B,1} - \psi_{B,2} - \left(\theta^i_1 - \theta^i_2\right)\frac{\partial \psi_{B,2}}{\partial \theta^i_2}\right\}\end{aligned} \tag{406}$$

のように求めることができる．

さて，任意の可測関数 p_i, p_j, p_k の間には，

$$\begin{aligned}&\left\{\tau\,p_i + (1-\tau)\,p_j - p_i^\tau\,p_j^{1-\tau}\right\} + \left\{\tau\,p_j + (1-\tau)\,p_k - p_j^\tau\,p_k^{1-\tau}\right\}\\ &= \left\{\tau\,p_i + (1-\tau)\,p_k - p_i^\tau\,p_k^{1-\tau}\right\} + p_i^\tau\,p_k^{1-\tau} + p_j - p_i^\tau\,p_j^{1-\tau} - p_j^\tau\,p_k^{1-\tau}\\ &= \left\{\tau\,p_i + (1-\tau)\,p_k - p_i^\tau\,p_k^{1-\tau}\right\} + \left(p_i^\tau - p_j^\tau\right)\left(p_k^{1-\tau} - p_j^{1-\tau}\right)\end{aligned} \tag{407}$$

のような関係式が成り立つので，

$$\begin{aligned}\overset{\tau}{D}(p_1\|p_2) + \overset{\tau}{D}(p_2\|p_3) &= \overset{\tau}{D}(p_1\|p_3) + \frac{1}{\tau(1-\tau)}\int \mathrm{d}x\,\left(p_1^\tau - p_2^\tau\right)\left(p_3^{1-\tau} - p_2^{1-\tau}\right)\\ &= \overset{\tau}{D}(p_1\|p_3) + \int \mathrm{d}x\ \ln_{1-\tau}(p_1 \oslash_{1-\tau} p_2)\ln_\tau(p_3 \oslash_\tau p_2)\end{aligned} \tag{408}$$

[*59] $\int \mathrm{d}x\, \frac{\partial \check{p}}{\partial \theta^i} = 0$ より，得ることができる．

が成立する．もし，右辺の第 2 項が 0 になれば，一般化ピタゴラスの定理[*60]が成り立つことになる．

ここで，右辺の第 2 項を $\tau = B$ の場合で評価すると，

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}x \, \ln_{1-s}(p_1 \oslash_{1-s} p_2) \ln_s(p_3 \oslash_s p_2) \\
&= \frac{1}{s\,(1-s)} \left(\overset{B}{r}{}_3^{1-s} C_3^{-(1-s)} - \overset{B}{r}{}_2^{1-s} C_2^{-(1-s)} \right) \\
&\quad \times \left\{ \left(\overset{B}{r}{}_1^{s} - \overset{B}{r}{}_2^{s} \right) + (1-s)\, \overset{B}{r}{}_2^{s} \left(\theta_2^i \frac{\partial \psi_{B,2}}{\partial \theta_2^i} - \psi_{B,2} \right) - (1-s)\, \overset{B}{r}{}_1^{s} \left(\theta_1^i \frac{\partial \psi_{B,1}}{\partial \theta_1^i} - \psi_{B,1} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{s} \left(\overset{B}{r}{}_3^{1-s} C_3^{-(1-s)} \theta_3^i - \overset{B}{r}{}_2^{1-s} C_2^{-(1-s)} \theta_2^i \right) \left(\overset{B}{r}{}_1^{s} \frac{\partial \psi_{B,1}}{\partial \theta_1^i} - \overset{B}{r}{}_2^{s} \frac{\partial \psi_{B,2}}{\partial \theta_2^i} \right)
\end{aligned} \tag{409}$$

のようになる．

さて，ここで原点に選んでいた確率分布 $\check{p}_0$ と $\check{p}$ とのダイバージェンスを評価してみると，

$$\begin{aligned}
\overset{B}{D}\left(\check{p} \middle\| \check{p}_0\right) = \overset{S}{D}\left(\check{p}_0 \middle\| \check{p}\right)
&= \frac{1}{s\,(1-s)} \left\{ 1 - \int \mathrm{d}x \, \check{p}^s \left(1 + (1-s) \ln_s \check{p}_0 \right) \right\} \\
&= -\frac{1}{s} \int \mathrm{d}x \, \check{p}^s \ln_s \check{p}_0 - \frac{1}{s\,(1-s)} \left(\Xi - 1 \right) \\
&= -\frac{1}{s} \left(\psi_B - \theta^i \frac{\partial \psi_B}{\partial \theta^i} - \frac{1}{1-s} \left(\Xi - 1 \right) \right) - \frac{1}{s\,(1-s)} \left(\Xi - 1 \right) \\
&= \frac{1}{s} \left(\theta^i \frac{\partial \psi_B}{\partial \theta^i} - \psi_B \right)
\end{aligned} \tag{410}$$

のようになるので，関数 $\psi_B(\theta)$ のルジャンドル変換として新たに関数 $\varphi_S(\eta)$ を以下のように定義する：

$$\varphi_S(\eta) = \theta^i \frac{\partial \psi_B(\theta)}{\partial \theta^i} - \psi_B(\theta) = \theta^i \eta_i - \psi_B(\theta) = s \, \overset{S}{D}\left(\check{p}_0 \middle\| \check{p}\right) \tag{411}$$

ただし，

$$\eta_i = \frac{\partial \psi_B(\theta)}{\partial \theta^i} \tag{412}$$

[*60] a generalized Pythagorean theorem

である．また，

$$\frac{\partial \varphi_S(\eta)}{\partial \eta_i} = \frac{\partial \theta^j}{\partial \eta_i}\eta_j + \theta^j \delta^i_j - \frac{\partial \theta^j}{\partial \eta_i}\frac{\partial \psi_B(\theta)}{\partial \theta^j} = \theta^i \tag{413}$$

なので，

$$\theta^i = \frac{\partial \varphi_S(\eta)}{\partial \eta_i} \tag{414}$$

であることもわかる．このとき，

$$\frac{\partial^2 \varphi_S(\eta)}{\partial \eta_i \partial \eta_j}\,\frac{\partial^2 \psi_B(\theta)}{\partial \theta^j \partial \theta^k} = \frac{\partial \theta^i}{\partial \eta_j}\,\frac{\partial \eta_j}{\partial \theta^k} = \delta^i_k \tag{415}$$

が導かれるので，

$$\frac{\partial^2 \psi_B(\theta)}{\partial \theta^i \partial \theta^j} = s\,C^{1-s} g_{ij} \tag{416}$$

より，

$$\frac{\partial^2 \varphi_S(\eta)}{\partial \eta^i \partial \eta^j} = \frac{1}{s}\,C^{-(1-s)} g^{ij} \tag{417}$$

を得ることができる．

これまでに登場してきた統計的量や幾何学的量は，関数 $\psi_B(\theta)$ と $\varphi_S(\eta)$ および変数 θ^i と η_i を用いて表すことができるので，今後は関数 $\psi_B(\theta)$ と $\varphi_S(\eta)$ をプロービング関数[*61]とよぶことにする．

プロービング関数を用いると，*Body* 世界のダイバージェンスは

$$\begin{aligned}\overset{B}{D}\big(p_1 \big\| p_2\big) &= \frac{1}{s\,(1-s)}\left\{ s\,\overset{B}{r_1} + (1-s)\,\overset{B}{r_2} - \overset{B}{r_1^{s}}\,\overset{B}{r_2^{1-s}} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{s}\,\overset{B}{r_1^{s}}\,\overset{B}{r_2^{1-s}} C_2^{-(1-s)} \left\{ \psi_{B,2} + \varphi_{S,1} - \theta^i_2 \eta_{i,1} \right\}\end{aligned} \tag{418}$$

[*61] probing functions

のように表すことができる．また，一般化ピタゴラスの定理が成り立つためには，

$$
\begin{aligned}
0 &= \int \mathrm{d}x \ \ln_{1-s}(p_1 \oslash_{1-s} p_2) \ln_s(p_3 \oslash_s p_2) \\
&= \frac{1}{s\,(1-s)} \left(\overset{B}{r}{}_3^{1-s} C_3^{-(1-s)} - \overset{B}{r}{}_2^{1-s} C_2^{-(1-s)} \right) \\
&\qquad\qquad \times \left\{ \left(\overset{B}{r}{}_1^{s} - \overset{B}{r}{}_2^{s} \right) - (1-s) \left(\overset{B}{r}{}_1^{s}\, \varphi_{S,1} - \overset{B}{r}{}_2^{s}\, \varphi_{S,2} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{s} \left(\overset{B}{r}{}_3^{1-s} C_3^{-(1-s)} \theta_3^i - \overset{B}{r}{}_2^{1-s} C_2^{-(1-s)} \theta_2^i \right) \left(\overset{B}{r}{}_1^{s}\, \eta_{i,1} - \overset{B}{r}{}_2^{s}\, \eta_{i,2} \right)
\end{aligned}
\tag{419}
$$

が成立する必要がある．さらに，プロービング関数 $\varphi_S(\eta)$ とエントロピー $\overset{B}{S}(\check{p})$ の関係は，

$$
\overset{B}{S}(\check{p}) = -\frac{1}{s} \left(\varphi_S(\eta) + \int \mathrm{d}x\, \check{p}^s \ln_s \check{p}_0 \right) \tag{420}
$$

のようになる．

ここで，規格化された平均を得るために，以下のような規格化された量について考える：

$$
\check{\eta}_i = \Xi^{-1}\, \eta_i = \Xi^{-1} \frac{\partial \psi_B}{\partial \theta^i} = \Xi^{-1} \int \mathrm{d}x\, \check{p}^s x^i \tag{421}
$$

$$
\check{\psi}_B = \Xi^{-1}\, \psi_B \tag{422}
$$

$$
\check{\varphi}_S = \Xi^{-1}\, \varphi_S \tag{423}
$$

このとき，

$$
\check{\varphi}_S = \theta^i \check{\eta}_i - \check{\psi}_B \tag{424}
$$

が成立する．ここで，θ^i はそのままであり，規格化されないことに注意する．

また，一種の共変微分[*62]としてみることが可能な次のような微分演算子を定義する[*63]：

$$\overset{B}{D}_i = \frac{\partial}{\partial\theta^i} + \Xi^{-1}\frac{\partial\Xi}{\partial\theta^i} \tag{425}$$

$$\overset{S}{D}{}^i = \Xi\left(\frac{\partial}{\partial\eta_i} + \Xi^{-1}\frac{\partial\Xi}{\partial\eta_i}\right) = \check{g}^{ij}\left(\frac{\partial}{\partial\theta^j} + \Xi^{-1}\frac{\partial\Xi}{\partial\theta^j}\right) = \check{g}^{ij}\overset{B}{D}_j \tag{426}$$

$$\overset{S}{D}{}^i_* = \Xi\frac{\partial}{\partial\eta_i} \tag{427}$$

ただし，

$$\check{g}_{ij} = \Xi^{-1} s\, C^{1-s} g_{ij} = \Xi^{-1}\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\theta^i\partial\theta^j} \tag{428}$$

$$\check{g}^{ij} = \Xi\,\frac{1}{s}\, C^{-(1-s)} g^{ij} = \Xi\frac{\partial^2\varphi_S}{\partial\eta_i\partial\eta_j} \tag{429}$$

である．これらの微分演算子は

$$\overset{B}{D}_i\overset{B}{D}_j - \overset{B}{D}_j\overset{B}{D}_i = 0 \tag{430}$$

$$\overset{S}{D}{}^i_*\overset{S}{D}{}^j - \overset{S}{D}{}^j_*\overset{S}{D}{}^i = 0 \tag{431}$$

のような関係を満たし，

$$\overset{B}{D}_i\,\check{\psi}_B = \check{\eta}_i \tag{432}$$

$$\overset{B}{D}_i\overset{B}{D}_j\,\check{\psi}_B = \check{g}_{ij} \tag{433}$$

$$\overset{S}{D}{}^i\,\check{\varphi}_S = \theta^i \tag{434}$$

$$\overset{S}{D}{}^i_*\overset{S}{D}{}^j\check{\varphi}_S = \check{g}^{ij} \tag{435}$$

[*62] これは，物理でいうところのゲージ変換に対する共変微分とみることができる．つまり，元の関数 F が関数 G 倍されて GF になったとき（この変換をゲージ変換という），元の関数の微分 $\dfrac{\partial F}{\partial\theta^i}$ も同様に関数 G 倍になるように，つまり，$D_i\,(GF) = G\dfrac{\partial F}{\partial\theta^i}$ となるように微分演算子 D_i を定義し，それを共変微分とよぶのである．この場合は，$D_i = \dfrac{\partial}{\partial\theta^i} - G^{-1}\dfrac{\partial G}{\partial\theta^i}$ とすればよい．

[*63] $\check{\eta}_i$ での微分を直接考えることは大変なので，それを避けるためと θ^i にはチェックの付いた対応物は存在しないことにより，微分演算子を三種類用意する必要がでてきた．

を満たすので，通常の確率分布による期待値を考えるときには使いやすいものになっている．

ところで，$Body$ 世界のダイバージェンスは，

$$\overset{B}{D}\big(\check{p}_1\big\|\check{p}_2\big) = \frac{1}{s}\, C_2^{-(1-s)} \left\{ \psi_{B,2} - \psi_{B,1} - \big(\theta_2^i - \theta_1^i\big) \frac{\partial \psi_{B,1}}{\partial \theta_1^i} \right\} \tag{436}$$

なので，これは以下のように表現することもできる：

$$\begin{aligned} & s\, C_2^{1-s} \overset{B}{D}\big(\check{p}_1\big\|\check{p}_2\big) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\{ (1-t)\,\psi_B(\theta_1) + t\,\psi_B(\theta_2) - \psi_B((1-t)\,\theta_1 + t\,\theta_2) \right\} \Big|_{t=0} \end{aligned} \tag{437}$$

ただし，

$$\psi_B(\theta_a) = \psi_{B,a} \tag{438}$$

のことであり，パラメータ t は平行移動を表すパラメータ s とは無関係であることに注意する．これはプロービング関数 $\psi_B(\theta)$ の凸性に依存したダイバージェンスの表現になっている．これから，共形ダイバージェンス $s\, C_2^{1-s} \overset{B}{D}\big(\check{p}_1\big\|\check{p}_2\big)$ は平行移動の仕方に依らず決まることがわかる．

ここで，ダイバージェンスを表す式 (437) の右辺に現れたプロービング関数の凸性を表す式がどのように導かれるのかを以下に示す．まず，平行移動のパラメータ τ の値を $s = 1$ に設定する．次に，規格化を考慮する前の元々の τ-対数尤度 $\overset{B}{\ell}(p)$ を，$\overset{B}{\ell}(\theta)$ のように表すことにすると，

$$\overset{B}{\ell}(\theta_a) = \sum_{i=1}^{r} \theta_a^i x^i + \log \check{p} \tag{439}$$

なので，τ-対数尤度 $\overset{B}{\ell}(\theta_1)$ と $\overset{B}{\ell}(\theta_2)$ の線形結合は，

$$\begin{aligned} (1-t)\,\overset{B}{\ell}(\theta_1) + t\,\overset{B}{\ell}(\theta_2) &= \sum_{i=1}^{r} \big((1-t)\,\theta_1^i + t\,\theta_2^i\big)\, x^i + \log \check{p} \\ &= \overset{B}{\ell}((1-t)\,\theta_1 + t\,\theta_2) \end{aligned} \tag{440}$$

で与えられる．これを規格化を考慮した確率密度関数に対する τ-対数尤度に戻してやると

$$\overset{B}{\ell}((1-t)\,\theta_1 + t\,\theta_2) = \sum_{i=1}^{r} \big((1-t)\,\theta_1^i + t\,\theta_2^i\big)\, x^i - \psi_B((1-t)\,\theta_1 + t\,\theta_2) + \log \check{p} \tag{441}$$

のようになる．したがって，

$$
\begin{aligned}
&\overset{B}{\ell}((1-t)\,\theta_1+t\,\theta_2)-(1-t)\,\overset{B}{\ell}(\theta_1)-t\,\overset{B}{\ell}(\theta_2)\\
&=(1-t)\,\psi_B(\theta_1)+t\,\psi_B(\theta_2)-\psi_B((1-t)\,\theta_1+t\,\theta_2)
\end{aligned}
\tag{442}
$$

のような関係式が導かれ，共形ダイバージェンスを表す式 (437) の右辺が得られる．

6 η-座標系

通常の情報幾何学と違い，ここまでは特に η-座標系を必要とはしてこなかったし単なる期待値としての役割しかなかったが，ここでは *Soul* 世界での可測関数の空間 $U_S^{r+1}\bigl(\check{P}\bigr)$ をフォック空間として見直すことにより η-座標系を導入する．

まず，$r+1$ 次元の Fock 空間を次のように定義する：

$$
F_\eta^r=\mathrm{Span}\bigl\{1,x,x^2,\dots,x^r\bigr\}\subset U_S^{r+1}\bigl(\check{P}\bigr)
\tag{443}
$$

このとき，$r+1$ 次元の Fock 空間 F_η^r 上での内積を

$$
(x^m\,,\,x^n)_\eta=\frac{1}{n!}\hat{\mathrm{d}}(x^m)\,x^n\bigg|_{x=0}=\delta^{mn}
\tag{444}
$$

のように定義する．ただし，$\hat{\mathrm{d}}(x^m)$ は，

$$
\hat{\mathrm{d}}(x^m)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m=\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}
\tag{445}
$$

のことである．これは，いわゆる有限次元のベクトル空間における Fock 内積であり，物理ではよく知られているものである．また，多変数化も簡単で以下のように与えられる：確率変数 $x_1,\dots,x_s$ に対して，Fock 内積は

$$
\begin{aligned}
&(x_1^{m_1}\cdots x_s^{m_s}\,,\,x_1^{n_1}\cdots x_s^{n_s})_\eta\\
&=\frac{1}{n_1!}\cdots\frac{1}{n_s!}\,\hat{\partial}(x_1^{m_1}\cdots x_s^{m_s})\,x_1^{n_1}\cdots x_s^{n_s}\bigg|_{x_1=0,\dots,x_s=0}\\
&=\delta^{m_1n_1}\cdots\delta^{m_sn_s}
\end{aligned}
\tag{446}
$$

で与えられる．ただし，

$$
\hat{\partial}(x_1^{m_1}\cdots x_s^{m_s})=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{m_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_s}\right)^{m_s}=\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_s}}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_s^{m_s}}
\tag{447}
$$

である．

さて，くり込まれた τ-対数尤度 $\overset{S}{\ell}_*$ から構成されるアファイン部分空間を

$$\mathcal{L}_*^S = \left\{ \overset{S}{\ell}_* \,\middle|\, \overset{S}{\ell}_* = \ln_{1-s} \check{p}_* = \frac{1}{s} \check{p}^s \right\} \subset \mathcal{R}_\Omega \tag{448}$$

のように定義し，この $\mathcal{L}_*^S$ から $r+1$ 次元の Fock 空間 F_η^r への写像 ζ^r を

$$\zeta^r : \mathcal{L}_*^S \to F_\eta^r : \overset{S}{\ell}_* \mapsto \zeta^r \left(\overset{S}{\ell}_* \right) = \frac{1}{s} \sum_{\alpha=0}^{r} \eta_\alpha x^\alpha \tag{449}$$

のように定義する．ただし，

$$\eta_i = s \left\langle \overset{S}{\ell}_* \middle| x^i \right\rangle = \int \mathrm{d}x \, \check{p}^s x^i \tag{450}$$

$$\eta_0 = s \left\langle \overset{S}{\ell}_* \middle| 1 \right\rangle = \int \mathrm{d}x \, \check{p}^s = \Xi \tag{451}$$

である．

ここで，Fock 空間 F_η^r の元 x^β と $\zeta^r \left(\overset{S}{\ell}_* \right)$ との Fock 内積をとると，

$$\begin{aligned} \left(\zeta^r \left(\overset{S}{\ell}_* \right), x^\beta \right)_\eta &= \frac{1}{s} \sum_{\alpha=0}^{r} \eta_\alpha \left(x^\alpha, x^\beta \right)_\eta \\ &= \frac{1}{s} \sum_{\alpha=0}^{r} \eta_\alpha \, \delta^{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{s} \, \eta_\beta \\ &= \left\langle \overset{S}{\ell}_* \middle| x^\beta \right\rangle \end{aligned} \tag{452}$$

のようになるので，$\mathcal{L}_*^S$ から $r+1$ 次元の Fock 空間 F_η^r への写像 ζ^r は，Fock 内積の下でくり込まれた τ-対数尤度を Fock 空間 F_η^r の基底ベクトル x^α で展開したものとみなすことができる．このとき，η_α は展開係数として現れてくる．

つまり，

$$\zeta^r \left(\overset{S}{\ell}_* \right) = \sum_{\alpha=0}^{r} \left(\zeta^r \left(\overset{S}{\ell}_* \right), x^\alpha \right)_\eta x^\alpha = \sum_{\alpha=0}^{r} \left\langle \overset{S}{\ell}_* \middle| x^\alpha \right\rangle x^\alpha = \frac{1}{s} \sum_{\alpha=0}^{r} \eta_\alpha x^\alpha \in F_\eta^r \tag{453}$$

が成立する．

まとめると，η-座標は，くり込まれた τ-対数尤度 $\overset{S}{\ell}_*$ を Fock 空間 F^r_η の基底ベクトル $\{1, x, x^2, \ldots, x^r\}$ で Fock 内積を用いて展開したときの展開係数として与えられ，θ-座標とは独立に定義される[*64]．また，ここで登場した η_α は，規格化された $\check{\eta}_\alpha = \dfrac{1}{\Xi}\eta_\alpha$ ではないことに注意すること．

7 モーメントとキュムラント

ここでは，正規化されたモーメント（つまり通常のモーメント）とキュムラントの関係を与えることにする．まず，第 i 次の正規化されたモーメントは，くり込まれた τ-対数尤度との縮約を通じて

$$\check{\eta}_i = \frac{s}{\Xi}\left\langle \overset{S}{\ell}_* \middle| x^i \right\rangle = \frac{1}{\Xi}\int \mathrm{d}x\, \check{p}^s x^i \tag{454}$$

のように与えられ，第 0 次の正規化されたモーメントは

$$\check{\eta}_0 = \frac{s}{\Xi}\left\langle \overset{S}{\ell}_* \middle| 1 \right\rangle = \frac{1}{\Xi}\int \mathrm{d}x\, \check{p}^s = 1 \tag{455}$$

のように与えられる．

くり込まれた τ-対数尤度は，スケール方向のスコア関数と

$$s\,\overset{S}{\ell}_* = -\ell_0 \tag{456}$$

のような関係にあることを思い出せば，縮約はスケール方向への射影を行っていることになる．いずれにしろ，期待値をとる操作を定義したというよりも，単に縮約という操作が導入されただけであり，今の所，その $Soul$ 世界の量がくり込まれた τ-対数尤度であると見るか，スケール方向のスコア関数であると見るかという視点に違いがあるだけである．ベイズ統計などをこの枠組みで考える際には，スケール方向のスコア関数との縮約と見る方がより有効であると思われるが，これについてはまた別の機会に述べることとする．

[*64] もちろん，η_α は $\check{p}$ を通して θ^α には依存している．θ^α をベースポイントと思えば，Fock 空間 F^r_η の基底ベクトルによる Fock 内積を用いた展開は r-jet の類似物とみなすことができるのだろうか？

さて，第 k 次のキュミュラントを $\check{\kappa}_k$ とすれば，通常通りに

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \check{\kappa}_k \frac{t^k}{k!} &= \log\left(\frac{s}{\Xi} \left\langle \begin{matrix} S \\ \ell_* \end{matrix} \middle| e^{tx} \right\rangle \right) \\
&= \log\left(\frac{s}{\Xi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left\langle \begin{matrix} S \\ \ell_* \end{matrix} \middle| x^k \right\rangle \right) \\
&= \log\left(\frac{s}{\Xi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left(\zeta^{\infty} \begin{pmatrix} S \\ \ell_* \end{pmatrix}, x^k \right)_{\eta} \right) \\
&= \log\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \check{\eta}_k \right)
\end{aligned}
\tag{457}
$$

により，各次数のキュミュラントは与えられる．ただし，第 k 次モーメント $\check{\eta}_k$ と第 k 次キュミュラント $\check{\kappa}_k$ のどちらも平行移動のパラメータ s に依存していることに注意する必要がある．また，$\psi_B(\theta)$ がキュミュラント母関数になるのは $B=1$ のときに限られることに注意すること．

以下に，具体的に第 4 次までのキュミュラントをモーメントを用いた表示で与える[*65]：

$$\check{\kappa}_0 = \log \check{\eta}_0 = \log 1 = 0 \tag{458}$$

$$\check{\kappa}_1 = \check{\eta}_1 \tag{459}$$

$$\check{\kappa}_2 = \check{\eta}_2 - \check{\eta}_1^2 \tag{460}$$

$$\check{\kappa}_3 = \check{\eta}_3 - 3\check{\eta}_2\check{\eta}_1 + 2\check{\eta}_1^3 \tag{461}$$

$$\check{\kappa}_4 = \check{\eta}_4 - 4\check{\eta}_3\check{\eta}_1 - 3\check{\eta}_2^2 + 12\check{\eta}_2\check{\eta}_1^2 - 6\check{\eta}_1^4 \tag{462}$$

また，一般に次のようなキュミュラントとモーメントの関係が知られている：

$$\check{\kappa}_m = \check{\eta}_m - \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m-1}{k-1} \check{\kappa}_k \check{\eta}_{m-k} \tag{463}$$

これにより，低次のキュミュラントとモーメントを用いて高次のキュミュラントを求めることができる．

[*65] 通常，第 0 次のキュミュラントは考えないが，ここでは $\check{\eta}_0$ を与えているので，敢えて定義することにした．

8 τ-平均

ここでは，Cooper[8], Hardy-Littlewood-Pólya[9], Lin[10] と Itô-Nara[11] 等により考察された一般化平均[*66]の拡張である τ-平均について考えていく．

まず，τ-平均 $\overset{B}{\mu}_m$ の定義は，縮約を用いた期待値を利用して，次のように与えられる：

$$\overset{B=s}{\mu}_m = \begin{cases} \left(\dfrac{s}{\Xi_s} \left\langle \overset{\tau=1-s}{\ell_*} \middle| x^m \right\rangle \right)^{\frac{1}{m}} = \left(\dfrac{1}{\Xi_s} \left\langle \check{p}^s \,\middle|\, x^m \right\rangle \right)^{\frac{1}{m}} & (s > 0) \\ \left(\dfrac{-s}{\Xi_{-s}} \left\langle \overset{\tau=1+s}{\ell_*} \middle| x^{-m} \right\rangle \right)^{-\frac{1}{m}} = \left(\dfrac{1}{\Xi_{-s}} \left\langle \check{p}^{-s} \,\middle|\, x^{-m} \right\rangle \right)^{-\frac{1}{m}} & (s < 0) \end{cases} \tag{464}$$

ただし，$s < 0$ のとき，

$$\overset{\tau=1+s}{\ell_*} = \frac{\check{p}^{-s}}{-s} \tag{465}$$

であり，

$$\Xi_{-s} = \int \mathrm{d}x \, \check{p}^{-s} \tag{466}$$

である．ここでは，$s = 0$ の場合は考えないことにする．

また，同値な表現として

$$\overset{B=s}{\mu}_m = \left(\frac{1}{\Xi_{|s|}} \int \mathrm{d}x \, p^{|s|} \, x^{\mathrm{sgn}(s)\, m} \right)^{\mathrm{sgn}(s)\, \frac{1}{m}} \tag{467}$$

のようにも表すことができる．ただし，$\mathrm{sgn}(s)$ は

$$\mathrm{sgn}(s) = \begin{cases} +1 & (s > 0) \\ -1 & (s < 0) \end{cases} \tag{468}$$

のような符号関数である．

$s > 0$ の場合には，τ-平均 $\overset{B}{\mu}_m$ と m 次のモーメント $\check{\eta}_m$ との間には，以下のような関係が成立している：

$$\overset{B=s}{\mu}_m = \left(\frac{s}{\Xi_s} \left\langle \overset{\tau=1-s}{\ell_*} \middle| x^m \right\rangle \right)^{\frac{1}{m}} = (\check{\eta}_m)^{\frac{1}{m}} \tag{469}$$

[*66] Cooper[8] による一般化平均と，Hardy-Littlewood-Pólya[9] による一般化平均の 2 種類があり，Lin[10] と Itô-Nara[11] はそれらについてさらに考察を深めている．

以下では，具体的に次のような確率密度関数

$$\check{p} = p_1 \delta(x - x_1) + p_2 \delta(x - x_2) \tag{470}$$

が与えられた場合について考えていくことにする．ただし，$p_1 + p_2 = 1$ であり，$\Xi_{-(-1)} = \Xi_1 = 1$ が成立することに注意する．

まず，$B = -1$ で $m = 1$ のときには，τ-平均 $\overset{B=-1}{\mu_1}$ は，

$$\begin{aligned}
\overset{B=-1}{\mu_1} &= \left\langle \overset{\tau=1+(-1)}{\ell_*} \middle| x^{-1} \right\rangle^{-1} = \left\langle \check{p} \,\middle|\, x^{-1} \right\rangle^{-1} = \left(\int \mathrm{d}x \, \check{p} \, \frac{1}{x} \right)^{-1} \\
&= \left\{ \int \mathrm{d}x \, \frac{1}{x} \left(p_1 \delta(x - x_1) + p_2 \delta(x - x_2) \right) \right\}^{-1} \\
&= \left(\frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2} \right)^{-1} = \frac{x_1 x_2}{p_1 x_2 + p_2 x_1}
\end{aligned} \tag{471}$$

のように与えられる．この τ-平均 $\overset{B=-1}{\mu_1}$ は，調和平均を与えていることがわかる．

また，$s = 1$ とし，$p_1 = p_2$ とすれば，Cooper の定理 [8] が以下のように得られることがわかる：

$B = 1$ で $m > 0$ とする．このとき，$\Xi_1 = 1$ なので，τ-平均 $\overset{B=1}{\mu}$ は，

$$\overset{B=1}{\mu_m} = \left\langle \overset{\tau=1-1}{\ell_*} \middle| x^m \right\rangle^{\frac{1}{m}} = \left\langle \check{p} \,\middle|\, x^m \right\rangle^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{x_1^m + x_2^m}{2} \right)^{\frac{1}{m}} \tag{472}$$

となり，τ-平均 $\overset{B=1}{\mu}$ が算術平均を与えていることがわかる．

次に，$B = 1$ で $m = 0$ とする．このとき，極限 $m \to 0$ をとって考えることにして，$\Xi_1 = 1$ であることに注意すると，τ-平均 $\overset{B=1}{\mu_0}$ は，

$$\overset{B=1}{\mu_0} = \lim_{m \to 0} \left\langle \overset{\tau=1-1}{\ell_*} \middle| x^m \right\rangle^{\frac{1}{m}} = \lim_{m \to 0} \left(\frac{x_1^m + x_2^m}{2} \right)^{\frac{1}{m}} = \sqrt{x_1 x_2} \tag{473}$$

となり，τ-平均 $\overset{B=1}{\mu_0}$ が幾何平均を与えていることがわかる．

さらに，$B = 1$ で $m = -1$ とする．このとき，$\Xi_1 = 1$ に注意すれば，τ-平均 $\overset{B=1}{\mu_{-1}}$ は，

$$\overset{B=1}{\mu_{-1}} = \left\langle \overset{\tau=1-1}{\ell_*} \middle| x^{-1} \right\rangle^{-1} = \left\langle \check{p} \,\middle|\, x^{-1} \right\rangle^{-1} = \frac{2 x_1 x_2}{x_1 + x_2} \tag{474}$$

となり，τ-平均 $\overset{B=1}{\mu_{-1}}$ が調和平均[*67]を与えていることがわかる．

これらの具体例からも，τ-平均 $\overset{B=s}{\mu_m}$ は，Cooper と Hardy-Littlewood-Pólya 等により考察された 2 種類の一般化平均を含んでいることがわかる．

すなわち，τ-平均は，どのような平均を実現するのかを制御するための 2 種類のパラメータをもっている．一つは，x の指数 m であり，このパラメータは Cooper により与えられた一般化平均を制御するパラメータと同様の効果をもっている．もう一つは，τ の値であり，このパラメータは様々なタイプの平均を得るために必要なくり込まれた τ-対数尤度の型を制御するものであり，Hardy-Littlewood-Pólya により考察され Lin と Itô-Nara により拡張された一般化平均を制御するパラメータと同様の効果をもっている．

ここで，τ-平均を定義するために，確率密度関数やいわゆるエスコート分布が用いられたのではなく，くり込まれた τ-対数尤度 $\overset{S}{\ell_*}$ が用いられたということに注意する．つまり，期待値とは，くり込まれた τ-対数尤度もしくはスケール方向のスコア関数への射影として定義されるものである．

ところで，τ-情報幾何学には，たった一つだけ，すべてを制御する自由パラメータ τ が存在している．これは，τ-アファイン構造を決定し，τ-平均を決定するなど，重要な役割を担っている．一方，一般に甘利による情報幾何学では，α-接続と α-ダイバージェンスなどに登場するパラメータ α は独立に異なる値をとることができる．最近では，凸関数を一つ与えて，ダイバージェンスを決めてから α-接続を導出するスタイルが主流になりつつあるが，この状況においてもダイバージェンスを特徴付けるパラメータと接続を制御するパラメータは同一である必要はない（同一であると考えることもできる）．

統計に関連する様々な分野において，与えられたデータに対して，まず最初に考察されるのは平均である．その平均にも，ここで見たように様々な種類があり，どのタイプの平均を用いるのが，与えられたデータに対してより適切であるかを判断することが重要になってくる．

このことは，τ-平均における制御パラメータ τ の値をどのような値にするべきかを判断することと密接に関連している．与えられたデータに対して適切な平均を選択することは，τ の値を決定することになり，このとこは τ-情報幾何学から自由パラメータを排除することになる．つまり，自由に値を決められるパラメータは存在せず，すべての量が一意に決定されることになる[*68]．この点においても，τ-情報幾何学は，甘利による情報幾何学

[*67] ここでわかるように, 同じ平均を異なる (B, m) の値の組が与えることがある．つまり, $(B, m) = (-1, 1)$ のときと $(B, m) = (1, -1)$ のとき，同じ調和平均を与えている．

[*68] もちろん，どのような確率分布族を考えるのかという選択の自由度は残っている．

と大きく異なっている．

9　原点の選択

これまでは，アフィン部分空間 $\left(\check{\mathcal{P}}\times\mathbb{R}_+, U_\Omega^{r+1}\left(\check{\mathcal{P}}\right), e_\tau\right)$ の原点を $\check{p}_0\left(x\right)\in\check{\mathcal{P}}$ としてきたが，原点を $p_0(x)=\chi_\Omega(x)\in\check{\mathcal{P}}\times\mathbb{R}_+$ に取り直してみる．ただし，$\chi_A(x)$ は指示関数[*69]である．このとき，Ω 上で

$$\ln_s p_0(x)=\ln_s 1=0 \tag{475}$$

となり，これまで $\ln_s\check{p}_0$ として登場していた項は現れなくなる．すなわち，Ω 上では

$$\begin{aligned}\check{p}&=\exp_s\left(C^{-(1-s)}\left(\sum_{i=1}^{r}\theta^i x^i-\psi_B+\ln_s p_0\right)\right)\\&=\exp_s\left(C^{-(1-s)}\left(\sum_{i=1}^{r}\theta^i x^i-\psi_B\right)\right)\end{aligned} \tag{476}$$

が成立することになる．ここで，原点を $\check{p}_0(x)$ にした場合には，C または ψ_B は $\check{p}_0(x)$ にも依存していることに注意する必要があるが，原点を $p_0(x)=\chi_\Omega(x)$ にした場合には，C または ψ_B は $p_0(x)$ には依存しないようになっている．

ところで，この $p_0(x)=\chi_\Omega(x)$ は，積分すると

$$\int_\Omega \mathrm{d}x\, p_0(x)=\int_\Omega \mathrm{d}x\chi_\Omega(x)=|\Omega|=\infty \tag{477}$$

のように発散する[*70]．これは素朴なエントロピーのところで出てきた発散を引き起こす項に対応している．エントロピーに対してはくり込みを実行することでこの発散を除去したが，確率密度関数に対しては原点として選択することで規格化に関わる量から原点の影響を排除することができる．つまり，原点を $p_0(x)=\chi_\Omega(x)$ にすることは，規格化を表す

[*69] 指示関数（an indicator function）は，次のように定義される：$A\subset\Omega$ のとき，

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & (x\in A)\\ 0 & (x\notin A)\end{cases}$$

また，Ω 上で，任意の可測関数 $f(x)$ に対して，

$$f(x)\,\chi_\Omega(x)=f(x)$$

が成立する．

[*70] これまで同様 $\Omega=\mathbb{R}$ である．

量である C または ψ_B から，原点からの寄与を排除することになっている．これを実現するためには，確率分布の空間 $\check{\mathcal{P}}$ の中だけで考えていては不可能であり，より広い測度空間 $\check{\mathcal{P}} \times \mathbb{R}_+$ で考える必要がある．これを利用すれば，これまでに登場してきた量はより簡単な表示になり扱いやすくなる．この点において，$p_0(x) = \chi_\Omega(x)$ は他の密度関数よりも原点としてふさわしいということになるが，これまで見てきた通り，原点に $\check{p}_0(x)$ を選んでもなんとかなる．しかし，この優位性は記述を簡素化し計算を楽にしてくれるので，今後は，アファイン部分空間の原点として $p_0(x) = \chi_\Omega(x)$ を選択することにする．

10　共形構造

記法の統一中

共形構造

11　条件付き確率

記法の統一中

条件付き確

参考文献

[1] S. Amari, “*Differential-Geometrical Methods in Statistics*,” Lecture Notes in Statistics, Springer New York, (Softcover reprint of the original 1st ed. 1985), 1990.

[2] R. M. Dudley, “*Real Analysis and Probability*,” Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2002.

[3] M.K. Murray and J.W. Rice, “*Differential Geometry and Statistics*,” Chapman & Hall/CRC, 1993.

[4] 田中 勝, “q-正規分布族に関する考察,” 電子情報通信学会論文誌, D-II, J85-D-II(2), 2002, pp.161–173.

[5] C. Tsallis, “*Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World*,” Springer, 2009.

[6] A. Rényi, “On measures of entropy and information,” in Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability, Berkeley, CA,

USA, 20 June – 30 July 1960, pp.547-561.

[7] M. Tanaka, "Meaning of an escort distribution and τ-transformation," Journal of Physics: Conference Series 2010, 201, 012007.

[8] R. Cooper, "Notes on certain inequalities II," J. London Math. Soc., 2, 1927, pp.159–163.

[9] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, and G. Pólya, "*Inequalities*," Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934, 2nd ed., 1951.

[10] T.P. Lin, "The power mean and the logarithmic mean," Amer. Math. Monthly, 81, 1974, pp.879–883.

[11] T. Itô and C. Nara, "Quasi-arithmetic means of continuous functions," J. Math. Soc. Japan, 38, 1986, pp.607–720.

[12] M.S. Bartlett, "Approximate Confidence Intervals, " Biometrika, Vol. 40, No. 1/2, Jun., 1953, pp.12–19.

[13] M.S. Bartlett, "Approximate Confidence Intervals: II. More than one Unknown Parameter, " Biometrika, Vol. 40, No. 3/4, Dec., 1953, pp.306–317.

[14] M.S. Bartlett, "Approximate Confidence Intervals: III. A Bias Correction, " Biometrika, Vol. 42, No. 1/2, Jun., 1955, pp.201–204.

[15] 渡辺 澄夫, "**ベイズ統計の理論と方法**," コロナ社, 2012.