# 等質錐上のヘッセ幾何と数理統計への応用

伊師英之（名古屋大学　多元数理）

直線を含まない凸錐で, 或る線型リー群が推移的に作用するものを等質錐とよぶ. 等質錐は, 等質ヘッセ領域の重要かつ扱いやすいクラスをなす. (等質ヘッセ構造をもつ) 等質錐は, コンパクト正規左対称代数（clan）を用いて詳しく構造を記述できる. 本講演では clan の表現を考えることにより任意の等質錐を実対称正定値行列の集合として実現し, その上のヘッセ構造も見通し良く扱えることを示す. とくにヘッセ構造のルジャンドル変換の記述は, 数理統計におけるウィシャート分布の研究に応用をもつ ([25]).

## 歴史と現状

実正定値対称行列の集合を $\mathcal{S}_r^+$ と書くものとすると次の積分公式が成り立つ (Wishart [52], Ingham [17], Siegel [45], Gårding [8]):

$$\int_{\mathcal{S}_r^+} e^{-\mathrm{tr}\, xy} (\det x)^{\alpha-(r+1)/2}\, dx$$
$$= \pi^{r(r-1)/4}\Gamma(\alpha)\Gamma\Big(\alpha-\frac{1}{2}\Big)\cdots\Gamma\Big(\alpha-\frac{r-1}{2}\Big)(\det y)^{-\alpha} \qquad \Big(\Re\alpha > \frac{r-1}{2},\ y\in\mathcal{S}_r^+\Big). \tag{1}$$

他方, いわゆるローレンツ錐 $\Lambda_n := \Big\{\, x\in\mathbb{R}^n\,;\, x_1 > \sqrt{x_2^2+\cdots+x_n^2}\,\Big\}$ については次が成り立つ (M. Riesz [39]):

$$\int_{\Lambda_n} e^{-2\langle x,y\rangle}(x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2)^{\alpha-n/2}\, dx$$
$$= \pi^{(n-2)/2}\Gamma(\alpha)\Gamma\Big(\alpha-\frac{n-2}{2}\Big)(y_1^2-y_2^2-\cdots-y_n^2)^{-\alpha} \qquad \Big(\Re\alpha > \frac{n-2}{2},\ y\in\Lambda_n\Big). \tag{2}$$

これら二つの等式の他にも $\mathcal{S}_r^+$ と $\Lambda_n$ 上の幾何と解析には類似点が多くあり, それらを統合するものとして対称錐の理論が産まれた (Köcher [31], Faraut-Korányi [7]). 対称錐についての結果を, より広いクラスである等質錐について拡張するということは一般に興味深い問題である. 一例として, 上の積分公式の類似が等質錐について考えられる. たとえば $\mathcal{V} := \{\, x\in\mathrm{Sym}(3,\mathbb{R})\,;\, x_{12}=x_{21}=0\,\}\simeq\mathbb{R}^5$ とし,

$$\Omega_{Vin} := \mathcal{V}\cap\mathcal{S}_3^+, \qquad \Omega_{Vin}^* := \big\{\, y\in\mathcal{V}\,;\, y_{33}>0,\ y_{22}y_{33}-y_{32}^2>0,\ y_{11}y_{33}-y_{31}^2>0\,\big\}$$

2014 年 1 月 10 日–11 日, ミニワークショップ「統計多様体の幾何学とその周辺 (5)」

とおくと

$$\begin{aligned}&\int_\Omega e^{-\operatorname{tr} xy}\sqrt{x_{11}x_{22}}(\det x)^{\alpha-2}\,dx\\&=\pi\Gamma(\alpha)^2\Gamma(\alpha-1)\,y_{33}^{\alpha}\,(y_{22}y_{33}-y_{32}^2)^{-\alpha}(y_{11}y_{33}-y_{31}^2)^{-\alpha}\qquad(\Re\alpha>1,\ \ y\in\Omega^*)\end{aligned}\tag{3}$$

および

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega^*} e^{-\operatorname{tr} xy}y_{33}^{-\alpha+1}(y_{22}y_{33}-y_{32}^2)^{\alpha-3/2}(y_{11}y_{33}-y_{31}^2)^{\alpha-3/2}\,dy\\&=\pi\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-1/2)^2\,(\det x)^{-\alpha}\qquad(\Re\alpha>1/2,\ \ x\in\Omega)\end{aligned}\tag{4}$$

が成り立つ. こういった等質錐上の解析学は Gindikin [10, 12] によって確立されたが, 結果の一部は統計学においても独立に発見された ([1, 33]. [13, 25, 26] も参照).

等質錐 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ を底とするチューブ領域 $\mathbb{R}^n+i\Omega\subset\mathbb{C}^n$ はケイリー変換によって有界等質領域と双正則同値となる ([37, 38]). 上半平面の一般化としての $\mathbb{R}^n+i\Omega$ 上の複素幾何と保型函数論が, 等質錐の研究の元々の動機づけである. 領域 $\mathbb{R}^n+i\Omega$ 上の正則函数からなる函数空間の解析は現在も進展しており ([35]), ユニタリ表現論にも応用される ([18, 40]). この方面の研究の最終的な目標は, 等質ケーラー多様体上の幾何と解析 ([6, 51]) であると私は考えている.

等質錐の理論の最も重要な基礎文献は Vinberg [49] である. これの第二章において導入された左対称代数は現在も様々な分野との関連において活発に研究されている ([2]). そして第三章で展開された $T$ 代数の理論については, あえて「功罪半ば」と評したい. 私は $T$ 代数に替わる道具として「等質錐の行列実現」を提案する. これは [53] の理論を大幅に簡略化したもので, 左対称代数の表現から導出されるものである ([23, 24, 27]). 本講演では此の道具に基づき, ヘッセ幾何との関連において等質錐を論じる ([22, 43, 44] も参照). このヘッセ構造に付随するルジャンドル変換は, 上述のケーリー変換の研究に現れた擬逆元写像に他ならない ([28, 29, 37]). この擬逆元写像のウィシャート分布（の一般化）の研究への応用についても説明したい ([13, 25]).

等質錐の理論は凸計画法においても発展している ([14, 32, 46, 48]). これに対して行列実現の方法がどのように応用できるかは今後の課題である. 一般の正則凸錐についての微分幾何 ([5]) と凸計画法 ([36]) の関連も考えていきたい ([16]).

## 等質錐の行列実現

整数 $N$ の分割 $N=n_1+n_2+\cdots+n_r$ をとり, 次の条件をみたすベクトル空間 $\mathcal{V}_{lk}\subset\mathrm{Mat}(n_l,n_k;\mathbb{R})$ $(1\le k<l\le r)$ の系を考える：

(V1) $A\in\mathcal{V}_{lk},\ B\in\mathcal{V}_{kj}\Rightarrow AB\in\mathcal{V}_{lj}\quad(1\le j<k<l\le r)$,

(V2) $A\in\mathcal{V}_{lj},\ B\in\mathcal{V}_{kj}\Rightarrow A\,{}^{\mathrm{t}}B\in\mathcal{V}_{lk}\quad(1\le j<k<l\le r)$,

(V3) $A\in\mathcal{V}_{lk}\Rightarrow A\,{}^{\mathrm{t}}A\in\mathbb{R}I_{n_l}\quad(1\le k<l\le r)$.

ベクトル空間 $\mathcal{V} \subset \mathrm{Sym}(N, \mathbb{R})$ を次のように定義する：

$$\mathcal{V} := \left\{ X = \begin{pmatrix} X_{11} & {}^{\mathsf{t}}X_{21} & \cdots & {}^{\mathsf{t}}X_{r1} \\ X_{21} & X_{22} & & {}^{\mathsf{t}}X_{r2} \\ \vdots & & \ddots & \\ X_{r1} & X_{r2} & \cdots & X_{rr} \end{pmatrix} ; \begin{array}{l} X_{kk} = x_{kk} I_{n_k},\ x_{kk} \in \mathbb{R}\ \ (k = 1, \ldots, r) \\ X_{lk} \in \mathcal{V}_{lk}\ \ (1 \leq k < l \leq r) \end{array} \right\}.$$

ここで

$$H_{\mathcal{V}} := \left\{ T = \begin{pmatrix} T_{11} & & & \\ T_{21} & T_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ T_{r1} & T_{r2} & \cdots & T_{rr} \end{pmatrix} ; \begin{array}{l} T_{kk} = t_{kk} I_{n_k},\ t_{kk} > 0\ \ (k = 1, \ldots, r) \\ T_{lk} \in \mathcal{V}_{lk}\ \ (1 \leq k < l \leq r) \end{array} \right\}.$$

とおくと, 線型リー群 $H_{\mathcal{V}} \subset GL(N, \mathbb{R})$ は $\mathcal{V} \subset \mathrm{Sym}(N, \mathbb{R})$ に $\rho(T) : \mathcal{V} \ni X \mapsto TX{}^{\mathsf{t}}T \in \mathcal{V} \quad (T \in H_{\mathcal{V}})$ によって作用している. しかも, この作用によって $H_{\mathcal{V}}$ は正則凸錐 $\Omega_{\mathcal{V}} := \mathcal{V}_{\mathcal{V}} \cap \mathcal{S}_N^+$. に単純推移的に作用する. したがって $\Omega_{\mathcal{V}}$ は等質錐であり, **全ての等質錐は, このようにして得られる $\Omega_{\mathcal{V}}$ と線型同値である**([3]).

例えばローレンツ錐 $\Lambda_n$ については

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & & & x_3 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & x_1 - x_2 & x_n \\ x_3 & \cdots & x_n & x_1 - x_2 \end{pmatrix} ; x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{Sym}(n-1, \mathbb{R}),$$

$\Omega_{Vin}^*$ については

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} y_{33} & 0 & y_{32} & 0 \\ 0 & y_{33} & 0 & y_{31} \\ y_{32} & 0 & y_{22} & 0 \\ 0 & y_{31} & 0 & y_{11} \end{pmatrix} ; y_{11}, y_{22}, y_{31}, y_{32}, y_{33} \in \mathbb{R} \right\}$$

とすればよい. Kaneyuki-Tsuji [30] で構成された 11 次元の互いに同値でない等質錐の 1 パラメータ族は, $0 \leq \theta \leq \pi/4$ について

$$\mathcal{V}_\theta := \left\{ \begin{pmatrix} x_0 & 0 & 0 & 0 & x_1\cos\theta & -x_2\cos\theta & x_4 \\ 0 & x_0 & 0 & 0 & x_2\cos\theta & x_3\cos\theta & x_5 \\ 0 & 0 & x_0 & 0 & x_1\sin\theta & x_2\sin\theta & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & x_0 & x_2\sin\theta & -x_1\sin\theta & x_7 \\ x_1\cos\theta & x_2\cos\theta & x_1\sin\theta & x_2\sin\theta & x_3 & 0 & x_8 \\ -x_2\cos\theta & x_1\cos\theta & x_2\sin\theta & -x_1\sin\theta & 0 & x_3 & x_9 \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \end{pmatrix} ; x_0,\, x_1, \ldots, x_{10} \in \mathbb{R} \right\}$$

とおくことによって得られる.

## References


[1] S. A. Andersson and G. G. Wojnar, *Wishart distributions on homogeneous cones*, J. Theoret. Probab. **17** (2004), 781–818.

[2] D. Burde, *Left-symmetric algebras, or pre-Lie algebras in geometry and physics*, Cent. Eur. J. Math. **4** (2006), 323–357.

[3] C. B. Chua, *Relating homogeneous cones and positive definite cones via $T$-algebras*, SIAM J. Optim. **14** (2003), 500–506.

[4] J. Dorfmeister, *Inductive construction of homogeneous cones*, Trans. Amer. Math. Soc. **252** (1979), 321–349.

[5] J. Dorfmeister and M. Köcher, *Reguläre Kegel*, Jahresber. Deutsch. Math. -Verein. **81** (1979), 109–151.

[6] J. Dorfmeister and K. Nakajima, *The fundamental conjecture for homogeneous Kähler Manifolds*, Acta. Math. **161** (1988), 23–70.

[7] J. Faraut and A. Korányi, “Analysis on symmetric cones,” Clarendon Press, Oxford, 1994.

[8] L. Gårding, *The solution of Cauchy's problem for two totally hyperbolic linear differential equations by means of Riesz integrals*, Ann. of Math. **48** (1947), 785–826.

[9] L. Geatti, *Holomorphic automorphisms of some tube domains over nonselfadjoint cones*, Rend. Circ. Mat. Palermo **36** (1987), 281–331.

[10] S. G. Gindikin, *Analysis in homogeneous domains*, Russian Math. Surveys **19** (1964), 1–89.

[11] —, *Invariant generalized functions in homogeneous domains*, Funct. Anal. Appl. **9** (1975), 50–52.

[12] —, “Tube domains and the Cauchy problem,” Transl. Math. Monogr. **11**, Amer. Math. Soc., 1992.

[13] P. Graczyk and H. Ishi, *Riesz measures and Wishart laws associated to quadratic maps*, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[14] O. Güler and L. Tunçel, *Characterization of the barrier parameter of homogeneous convex cones*, Math. Program. A **81** (1998), 55–76.

[15] A. Hassairi and S. Lajmi, *Riesz exponential families on symmetric cones*, J. Theoret. Probab. **14** (2001), 927–948.

[16] R. Hildebrand, *Einstein-Hessian barriers on convex cones*, preprint.

`http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2012/05/3474.pdf`

[17] A. E. Ingham, *An integral which occurs in statistics*, Proc. Cambr. Philos. Soc. **29** (1933), 271–276.

[18] H. Ishi, *Representations of the affine transformation groups acting simply transitively on Siegel domains*, J. Funct. Anal. **167** (1999), 425–462.

[19] —, *Positive Riesz distributions on homogeneous cones*, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 161–186.

[20] —, *Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications*, J. Lie Theory **11** (2001), 155–171.

[21] —, *The gradient maps associated to certain non-homogeneous cones*, Proc. Japan Acad. **81** (2005), 44-46.

[22] —, 等質ヘッセ領域の双対について, 数理解析研究所講究録 **1467** (2006), 141–151.

[23] —, *On symplectic representations of normal $j$-algebras and their application to Xu's realizations of Siegel domains*, Differ. Geom. Appl. **24** (2006), 588–612.

[24] —, *Representation of clans and homogeneous cones*, Vestnik Tambov University **16** (2011), 1669–1675.

[25] —, *Homogeneous cones and their applications to statistics*, Lecture Notes of CIMPA summer school "Analytical and algebraic tools of modern multivariate analysis and graphical models", Hammamet, 2011.

`http://www.cimpa-icpam.org/IMG/pdf/Cours_Ishi_Hammamet.pdf`

[26] —, *On a class of homogeneous cones consisting of real symmetric matrices*, Josai Mathematical Monograph **6** (2013), 71–80.

[27] H. Ishi and T. Nomura, *Tube domain and an orbit of a complex triangular group*, Math. Z. **259** (2008), 697–711.

[28] C. Kai, *A characterization of symmetric cones by an order-reversing property of the pseudoinverse maps*, J. Math. Soc. Japan **60** (2008), 1107–1134.

[29] C. Kai and T. Nomura, *A characterization of symmetric cones through pseudoinverse maps*, J. Math. Soc. Japan **57** (2005), 195–215.

[30] S. Kaneyuki and T. Tsuji, *Classification of homogeneous bounded domains of lower dimension*, Nagoya Math. J. **53** (1974), 1–46.

[31] M. Köcher, “Jordan algebras and their applications”, Lecture notes, Univ. Minnesota, Minneapolis, 1962.

[32] 小島政和, 土谷隆, 水野眞治, 矢部博, “内点法”, 東京, 朝倉書店, 2001.

[33] G. Letac and H. Massam, *Wishart distributions for decomposable graphs*, The Annals of Statistics **35** (2007), 1278–1323.

[34] H. Nakashima and T. Nomura, *Clans defined by representations of Euclidean Jordan algebras and the associated basic relative invariants*, Kyushu J. Math. **67** (2013), 163–202.

[35] C. Nana and B. Trojan, *$L^p$-boundedness of Bergman projections in tube domains over homogeneous cones*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. **10** (2011), 477–511.

[36] Y. Nesterov and A. Nemirovskii, “Interior-point polynomial algorithms in convex programming,” SIAM Studies in Applied Mathematics **13**, SIAM, Philadelphia, 1994.

[37] T. Nomura, *Family of Cayley transforms of a homogeneous Siegel domain parametrized by admissible linear forms*, Diff. Geom. Appl. **18** (2003), 55–78.

[38] I. I. Piatetskii-Shapiro, “Automorphic functions and the geometry of classical domains,” Gordon and Breach, New York, 1969.

[39] M. Riesz, *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, Acta Math. **81** (1949), 1–223.

[40] H. Rossi and M. Vergne, *Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group*, J. Funct. Anal. **13** (1973), 324–389.

[41] O. S. Rothaus, *The construction of homogeneous convex cones*, Ann. of Math. **83** , 358–376, Correction: ibid **87** (1968), 399.

[42] I. Satake, *Linear imbeddings of self-dual homogeneous cones*, Nagoya Math. J. **46** (1972), 121–145.

[43] H. Shima, *Homogeneous Hessian martifolls*, Ann. Jnst. Fourier, Grenoble **30** (1980), 91–128.

[44] —, "ヘッセ幾何学", 裳華房, 東京, 2001.

[45] G. L. Siegel, *Über die analytische tehorie der quadratische Formen*, Ann. of Math. **36** (1935), 527–606.

[46] V. A. Truong and L. Tunçel, *Geometry of homogeneous convex cones, duality mapping, and optimal self-concordant barriers*, Math. Program. **100** (2004), 295–316.

[47] 土屋隆, 笹川卓, ２次錐計画問題による磁気シールドのロバスト最適化, 統計数理 **53** (2005), 297–315.

[48] L. Tunçe and S. Xu, *On homogeneous convex cones, the Caratheodory number, and the duality mapping* Math. Oper. Res. **26** (2001), 234–247.

[49] E. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc. **12** (1963), 340–403.

[50] —, *The structure of the group of automorphisms of a homogeneous convex cone*, Trans. Moscow Math. Soc. **13** (1965), 63–93.

[51] E. B. Vinberg and S. G. Gindikin, *Kaehlerian manifolds admiting a transitive solvable automorphism group*, Math. USSR, Sb. **3** (1967), 333–351.

[52] J. Wishart, *The generalized product monent distribution in samples from a normal multivariate population*, Biometrika **20A** (1928), 32–52.

[53] Y. C. Xu, "Theory of complex homogeneous bounded domains," Kluwer, Dordrecht, 2005.

[54] J. Q. Zhong and Q. K. Lu, *The realization of affine homogeneous cones*, Acta Math. Sinica **24** (1981), 116–142.