× 双対平坦空間とシンプレクティック構造 II

On dually flat spaces and symplectic structures II

○ Hesse 断面曲率一定の Hesse 多様体について

坊向伸隆氏（OCAMI）との共同研究に基づく

野田 知宣 （大阪歯科大学）

統計多様体の幾何学とその周辺 (3) ／ 幾何学と諸科学の連携調査
北海道大学理学部 4号館501
平成23年12月4日（友引）

M : connected C^∞ manifold

g :（pseudo）Riemannian metric

∇ : affine connection, $T^\nabla = 0,\quad R^\nabla = 0$

→ $\{x^1 \ldots, x^n\}$:affine coord.

(M, ∇, g) : Hessian if

（i） $\nabla g \in \mathrm{Sym}^3$

（ii） $(\nabla_X g)(Y, Z) = (\nabla_Y g)(X, Z)$

（iii） $g(\gamma_X Y, Z) = g(Y, \gamma_X Z)$

但し $\gamma_X Y := \nabla^g_X Y - \nabla_X Y$: difference tensor

（iv） $g = \nabla d\varphi$

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j}$$

⋮

Hessian & Kählerian

◎ (M, ∇) flat

$\{x^1, \ldots, x^n\}$:affine

$\pi : TM \to M$

$$\begin{cases} \xi^i := x^i \circ \pi \\ \xi^{n+i} := dx^i \end{cases} \quad \& \quad z^j := \xi^j + \sqrt{-1}\xi^{n+j}$$

$\Rightarrow$ $\{z^1, \ldots, z^n\}$: hol. coord. i.e. $^\exists J$

◎ g:Riemannian metric on M

$$g^T := \sum_{i,j} (g_{ij} \circ \pi) dz^i d\bar{z}^j$$

$\Rightarrow$ (TM, J, g^T) : Hermitian

Fact

(M, ∇) flat, g Riem.

g : Hessian for (M, ∇) $\Leftrightarrow$ g^T : Kähler for (TM, J)

$$H(X,Y)Z = (\nabla\gamma)(Y,Z;X)$$: Hessian curv. tensor

difference tensor

Fact

次は同値：

- $2H(X,Y)Z = c(g(X,Y)Z + g(Z,X)Y)$
- (M, ∇, g) : Hessian sec. curv $= c$
- (TM, J, g^T) : hol. sec. curv. $= -c$

このとき (M, g) は曲率 $-c/4$ の空間形

目標

(M, ∇, g) s.t.

(i) M is simply connected;

(ii) ∇ is **complete** affine conn. s.t. $T^{\nabla}=0$, $R^{\nabla}=0$;

(iii) g is a Riem. metric s.t. $\nabla g \in \mathrm{Sym}^3$,

(∇, g): Hesse 断面曲率 $= c$;

を決定する(up to 統計等長変換)。

cf. [Furuhata-Kurose]

Fact 1.

$^{\exists}f : (M^n, \nabla) \to (\mathbb{R}^n, D)$ affine iso., where

（i）M is simply connected;

（ii）∇ is **complete** affine conn. s.t. $T^{\nabla}=0$, $R^{\nabla}=0$;

（iii）D is the stand. affine conn. on $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ $(\mathbb{R}^n, D)$ に対し

(i) $Dh \in \mathrm{Sym}^3$

(ii) (D, h) : Hessian sec. curv. $= c$

なる Riemann 計量 h を定めれば良い。

Theorem 1. （$c = 0$）

$(\mathbb{R}^n, D)$ に対し Riem. 計量 h が

(i) $Dh \in \mathrm{Sym}^3$

(ii) (D, h) : Hessian sec. curv. $= 0$

$\Rightarrow$ ${}^{\exists}k \in \mathbb{N}$ $(0 \leq k \leq n)$ s.t.

$$h_{ij} = \begin{cases} \alpha_i^2 \delta_{ij} & (1 \leq i \leq n-k) \\ (\alpha_i \exp(\alpha_i x^i + \beta_i))^2 \delta_{ij} & (n-k+1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

where $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \neq 0$

$\{x^1, \ldots, x^n\}$: stand. affine coord.

Theorem 2. （$c > 0$）

M : simply conn.

∇ : **complete** affine conn., $T^{\nabla}=0$, $R^{\nabla}=0$

$\Rightarrow$ $\not\exists g$: Hessian sec. curv $= c > 0$

Ex.（[志磨], 命題 3.2.8）

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ x^n > \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_i^{n-1}(x^i)^2\}$$

$$\varphi = -\tfrac{1}{c}\log(x^n - \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_i^{n-1}(x^i)^2),\ c > 0$$

$$g = \tfrac{1}{2}(d\log f)^2 + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_i^{n-1}(dx^i)^2,\ f = x^n - \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_i^{n-1}(x^i)^2$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathbb{H} = \{(y^1,\ldots,y^n); y^n > 0\} \\ g = \frac{1}{(y^n)^2}(\sum^{n-1}(dy^i)^2 + \frac{4}{c}(dy^n)^2) \end{array} \quad \text{と等長的} \right)$$

Proof of Theorem 1（c＝0）

$$K(X,Y) = D_X Y - \nabla^h_X Y$$ ：ー（差テンソル）

Lemma（[Kurose]）

（1a）$K(X,Y) = K(Y,X)$　$T^{\nabla}=0$

（1b）$h(K(X,Y),Z) = h(Y,K(X,Z))$　$\nabla h \in \mathrm{Sym}^3$

（2’）$K(Y,K(X,Z)) = K(X,K(Y,Z))$　$R^{\nabla}=0$

（3’）$$(\nabla^h K)(X,Y;V) = -K(V,K(X,Y)) + K(K(V,X),Y) + K(X,K(V,Y))$$　$c=0$

$^{\exists}k \in \mathbb{N}\ (0 \le k \le n)$

$^{\exists}(u^1, \ldots, u^n)$: ONB s.t.

$$K\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \begin{cases} 0 & (1 \le i \le n-k) \\ \frac{-1}{u^i}\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial u^j} & (n-k+1 \le i \le n) \end{cases}$$

∵) （1b） ⇒ $K(X,\cdot)$ is symmetric w.r.t. h

（2'） ⇒ $K(X,\cdot)$と$K(Y,\cdot)$ は可換

⇒ $K(X,\cdot)$ は同時対角化可能

（1a） ⇒ $K^i{}_{jk} = c_i \delta_{ijk}$

$$\Gamma^{(h)k}_{ij} = 0 \quad ((u^1, \ldots, u^n) : \text{ONB w.r.t. } h)$$

affine coord. ではない

$\Rightarrow$

$$D_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^j} = \begin{cases} 0 & (1 \le i \le n-k) \\ \frac{-1}{u^i}\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial u^j} & (n-k+1 \le i \le n) \end{cases} \qquad \cdots (*)$$

h の決定:

$(x^1, \ldots, x^n)$: stand. affine coord. on $\mathbb{R}^n$

$h_{ij} := h(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$

$(*)$ & $D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\frac{\partial}{\partial x^j}) = 0$

$$\Rightarrow \quad u^i = \begin{cases} \alpha_i x^i + \beta_i & (1 \le i \le n-k) \\ \exp(\alpha_i x^i + \beta_i) & (n-k+1 \le i \le n) \end{cases}$$

$$h_{ij} = h(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j})$$

$$= h(\sum_a \frac{\partial u^a}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial u^a}, \sum_b \frac{\partial u^b}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial u^b})$$

$$= \sum \frac{\partial u^a}{\partial x^i}\frac{\partial u^a}{\partial x^j}$$

$$= \begin{cases} \alpha_i^2 \delta_{ij} & (1 \leq i \leq n-k) \\ (\alpha_i \exp(\alpha_i x^i + \beta_i))^2 \delta_{ij} & (n-k+1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

$\square$

Proof of Theorem 2（$c > 0$）

Fact

h : $\mathbb{R}^n$ 上の Riem. 計量。次は同値:

(i) $(\mathbb{R}^n, D, h)$: Hessian sec. curv $= c$

(ii) $(T\mathbb{R}^n, J_0, h^T)$: Kähler, hol. sec. curv. $= -c$

Fact 2.

$(\mathbb{C}^n, J_0)$ 上には hol. sec. curv. $c < 0$ の Kähler 計量は存在しない

$f^{-1} : (\mathbb{R}^n, D) \to (M, \nabla)$: affine iso.

g: Hessian metric on M, $c > 0$

$\Rightarrow$ $h = f^{-1*}g$: $(\mathbb{R}^n, \nabla)$ 上の Hesse, $c > 0$

$\Rightarrow$ h^T : $\mathbb{C}^n$ 上の Kähler, hol. sec. curve $-c$ ← 矛盾 □

Fact 2.

$(\mathbb{C}^n, J_0)$ 上には hol. sec. curv. $c < 0$ の Kähler 計量は存在しない

流れ:

一点で $\longrightarrow$ 局所的に $\longrightarrow$ 大域的に $\longrightarrow$ 矛盾

↑ Lemma 2.3 ↑ Lemma 2.4 ↑ $\mathbb{C}^n \to \mathbb{B}^n$: hol.

Lemma 2.3.

$(V, J, \bar{g})$ connected Kähler

f_1, f_2:hol. tot.geod. isom. imm.

$$f_i : (V, J, \bar{g}) \to (\mathbb{B}^n, J_B, g_B)$$

$\Rightarrow$ ${}^{\exists}\phi$: $(\mathbb{B}^n, J_B, g_B)$ の hol. isom. s.t. $\phi \circ f_1 = f_2$.

Lemma 2.4.

$(N, J, \bar{g})$ simply connected Kähler, $x \in N$ fix

${}^{\forall}p \in N$, ${}^{\exists}V_p$: convex

${}^{\exists}f_p : (V_p, J, \bar{g}) \to (\mathbb{B}^n, J_B, g_B)$ hol. tot. geod. isom. imm.

$\Rightarrow$ ${}^{\exists}\tilde{f} : (N, J, \bar{g}) \to (\mathbb{B}^n, J_B, g_B)$ hol. tot. geod. isom. imm.

s.t. $\tilde{f}|_{V_x} = f$.

Proof of Lemma 2.3

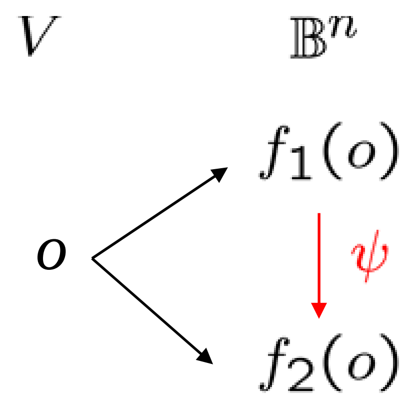
$o \in V$ fix

- $\bar{o} := f_1(o) = f_2(o)$ と仮定

($\because$) G : hol isom. gp. of $(\mathbb{B}^n, J_B, g_B)$

$G \curvearrowright \mathbb{B}^n$: transitive

$\Rightarrow$ $^{\exists}\psi \in G$ s.t. $\psi(f_1(o)) = f_2(o)$)



- $^{\exists}A \in \underline{U(n)_{\bar{o}}}$ s.t. $A \circ (df_1)_o = (df_2)_o$

↑ unitary gp. of $(T_{\bar{o}}\mathbb{B}^n, J_B, g_B)$

◎ $\{\boldsymbol{e}_a, J\boldsymbol{e}_a\}_{a=1}^{k}$: ONB for $(T_o V, \bar{g})$

$\Rightarrow$ $\{df_1(\boldsymbol{e}_a), J_B(df_1(\boldsymbol{e}_a))\}_{a=1}^{k}$: ON $(\because\ f$ hol. isom.)

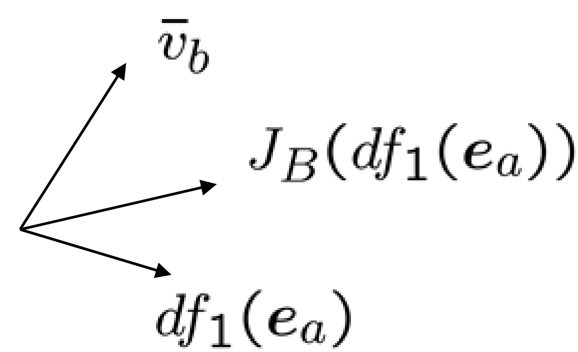
$\Rightarrow$ ${}^{\exists}\{\bar{v}_b\} \subset T_{\bar{o}}\mathbb{B}^n$ s.t. $\{df_1(\boldsymbol{e}_a), J_B(fd_1(\boldsymbol{e}_a))\} \cup \{\bar{v}_b\}$

ONB for $(T_{\bar{o}}\mathbb{B}^n, g_B)$

◎ ${}^{\exists}\{\bar{w}_b\} \subset T_{\bar{o}}\mathbb{B}^n$ s.t. $\{df_2(\boldsymbol{e}_a), J_B(fd_2(\boldsymbol{e}_a))\} \cup \{\bar{w}_b\}$

◎ $A : T_{\bar{o}}\mathbb{B}^n \to T_{\bar{o}}\mathbb{B}^n$ by

$$
\begin{cases}
A(df_1(\boldsymbol{e}_a)) := df_2(\boldsymbol{e}_a) \\
A(\bar{v}_b) := \bar{w}_b \\
A(J_B(df_1(\boldsymbol{e}_a)) := J_B(df_2(\boldsymbol{e}_a)) \\
A(J_B(\bar{v}_b)) := J_B(\bar{w}_b)
\end{cases}
$$



◎ linear isotropy gp. of G at $\overline{o} = \mathrm{U}(n)$

$\Rightarrow$ ${}^{\exists}\phi \in G$ s.t. $\phi(\bar{o}) = \bar{o},\ (d\phi)_{\bar{o}} = A$

$$\therefore \quad \begin{aligned} &\phi(f_1(o)) = \bar{o} = f_2(o), \\ &d(\phi \circ f_1)_0 = A \circ (df_1)_o = (df_2)_o \end{aligned}$$

◎ $V' := \{p \in V \ ;\ \phi(f_1(p)) = f_2(p),\ d(\phi \circ f_1)_p = (df_2)_p\}$

$\Rightarrow$ $V' = V$

(▪ V' : closed
▪ V' : open)

□

Lemma 2.4.

$(N, J, \bar{g})$ simply connected Kähler, $x \in N$ fix

${}^{\forall} p \in N$, ${}^{\exists} V_p$: convex

${}^{\exists} f_p : (V_p, J, \bar{g}) \to (\mathbb{B}^n, J_B, g_B)$ hol. tot. geod. isom. imm.

$\Rightarrow$ ${}^{\exists} \tilde{f} : (N, J, \bar{g}) \to (\mathbb{B}^n, J_B, g_B)$ hol. tot. geod. isom. imm.

s.t. $\tilde{f}|_{V_x} = f$.

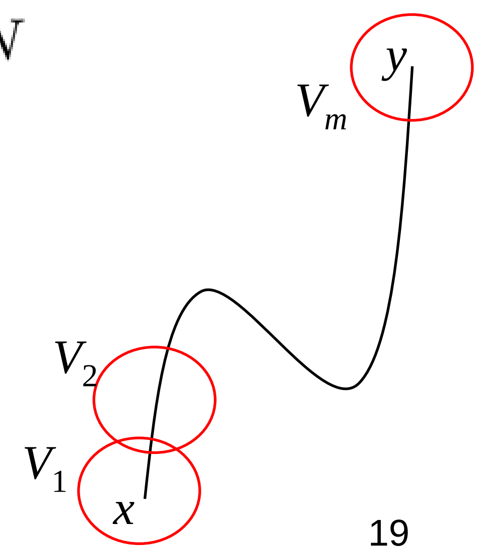
$c(t) : [0, 1] \to N$ s.t. $c(0) = x$, $c(1) = y \in N$

$\{V_i\}_{i=1}^{m}$ s.t. $x \in V_1$, $y \in V_m$, $V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset$

⇓

$V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ ${}^{\exists} \phi \in G$ s.t. $\phi \circ f_{i+1} = f_i$



Fact 2.

$(\mathbb{C}^n, J_0)$ 上には hol. sec. curv. $c < 0$ の Kähler 計量は存在しない

背理法:

$^\exists \bar{g}$: Kähler on $(\mathbb{C}^n, J_0)$, hol. sec. curv. $\bar{c} < 0$

(∗) $^\forall p \in \mathbb{C}^n$,

$p \in {}^\exists V \subset \mathbb{C}^n$, $^\exists U \subset \mathbb{B}^n$ s.t. $^\exists f : (U, J_0, \bar{g}') \to (U, J_B, g_B)$ hol. isom. iso.

where $\bar{g}' = \lambda \bar{g}, \ \lambda = -\frac{\bar{c}(n+1)}{2}$

Lemma 2.4 & (∗)

$\Rightarrow$ $^\exists f : (\mathbb{C}^n, J_0, \bar{g}') \to (\mathbb{B}^n, J_B, g_B)$: hol. tot. geod. isom. imm

s.t. $\tilde{f}|_V = f$. □

Rem.

(i) $\bar{g}'$, g_B : hol. sec. curv. $\frac{-2}{n+1}$

(ii) Fact 2 は複素構造を変えると成立しない。

(iii) $c < 0$ の場合は出来てません。

References

[志磨]
志磨裕彦, ヘッセ幾何学, 裳華房, 2001

[Furuhata-Kusose]
Furuhata H. and Kurose T.;
Hessian manifolds of nonpositive constant Hessian sectional curvature,
preprint.

[Kurose]
黒瀬俊，定曲率ヘッセ多様体の分類，京都大学数理解析研究所講究録
1623(2009), 22-29.