ミニワークショップ 統計多様体の幾何学とその周辺 (2)
北海道大学理学部，平成 22 年 10 月 29 日〜 30 日

幾何学的構造をもつ統計多様体について

信州大学全学教育機構
高野　嘉寿彦

1　はじめに

情報幾何学における統計的モデルは，期待値から構成される Fisher 計量，α–接続とよばれる捩れのないアファイン接続 $\nabla^{(\alpha)}$ を許容します。ここで α は実数です。Fisher 計量に関して α–接続と $(-\alpha)$–接続は互いに共役（双対）であり，0–接続は Levi–Civita 接続です。特に，$\nabla^{(1)}$ 及び $\nabla^{(-1)}$ はそれぞれ指数型接続及び混合型接続，または簡単に e–接続及び m–接続と呼ばれ $\nabla^{(\mathrm{e})}$ 及び $\nabla^{(\mathrm{m})}$ で表します。これらは情報幾何学において重要な概念です ([1], [2], [13])。

今回，負の定曲率空間である Poincaré の上半平面（上半空間）と幾何学構造が大変良く似ている指数型分布の代表格である正規分布（共分散行列が特別な多次元正規分布）を例に取り上げながら，それらの空間が偶数次元のとき，e–接続や m–接続に関して平行となる概複素構造をもつことを見ていきます。これより偶数次元の Poincaré の上半空間は e–接続や m–接続に関して平行となる概複素構造をもつため Kähler-like 統計多様体になります。

第 2 回目では，複素局所座標系を用いて Kähler-like 統計多様体の幾何学量を考え，Kähler 多様体との違いを見たいと思います。

2　統計多様体と指数型分布族

多様体 M の計量を g，アファイン接続を ∇ で表します。M 上のベクトル場 X, Y, Z に対して

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z) \tag{2.1}$$

によりもう一つのアファイン接続 ∇^* を定義します。この ∇^* を g に関する ∇ の**共役接続**又は**双対接続**といいます。$(\nabla^*)^* = \nabla$ を満たします。∇ と ∇^* の捩れがないとき，(M, g, ∇) を**統計多様体**といいます ([4])。また，(M, g, ∇^*) も統計多様体になります。アファイン接続 ∇ 及び ∇^* に関する曲率テンソルをそれぞれ R 及び R^* で表します。このとき，M 上のベクトル場 X, Y, Z, W に対して

$$g(R(X,Y)Z, W) = -g(Z, R^*(X,Y)W) \tag{2.2}$$

が成り立ちます。ここで，$R(X,Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z$ です。アファイン接続 ∇ に関する曲率テンソルが

$$R(X,Y)Z = k\{\, g(Y,Z)X - g(X,Z)Y \,\} \tag{2.3}$$

を満たすとき，(M, g, ∇) を定曲率 k の**定曲率空間**といいます。

次に，統計的モデルから Riemann 多様体 (M, g) を構成します。確率密度関数 $p(x;\xi)$ に対して n 次元**統計的モデル** $M = \{\, p(x;\xi) \,|\, \xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \Xi \subset \mathbb{R}^n \,\}$ は $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ を局所座標系として n 次元 Riemann 多様体と考えることができます。また，$\ell = \ell(x;\xi) = \log p(x;\xi)$ 及び $\partial_i = \partial/\partial\xi^i$ とおき，$p(x;\xi)$ に関する期待値 E を用いて M 上の計量 g の成分を

$$g_{ij} = E[\,\partial_i \ell \cdot \partial_j \ell\,] \tag{2.4}$$

で定義します。この計量は局所座標系 $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ の取り方に依存しません。また正定値と仮定します。この g を **Fisher 計量**といいます。また，微分と積分の順序交換が可能と仮定すると $E[\,\partial_i \ell\,] = 0$ から Fisher 計量は

$$g_{ij} = -E[\,\partial_i \partial_j \ell\,] \tag{2.5}$$

と表すこともできます。また，$\alpha \in \mathbb{R}$ に対して関数を

$$\Gamma^{(\alpha)}_{ij,k} = E\left[\left(\partial_i\partial_j\ell + \frac{1-\alpha}{2}\partial_i\ell\cdot\partial_j\ell\right)\partial_k\ell\right] \tag{2.6}$$

と定めます。これを用いて α–**接続** $\nabla^{(\alpha)}$ を

$$g(\nabla^{(\alpha)}_{\partial_i}\partial_j, \partial_k) = \Gamma^{(\alpha)}_{ij,k} \tag{2.7}$$

で定義します。このとき α–接続は捩れがなく，Fisher 計量に関して $\nabla^{(-\alpha)}$ は $\nabla^{(\alpha)}$ の共役接続になります。これより $(M, g, \nabla^{(\alpha)})$ は統計多様体です。また，$\nabla^{(0)}$ は Fisher 計量に関する Levi–Civita 接続です。α–接続に関する曲率テンソルが恒等的に零のとき $(M, g, \nabla^{(\alpha)})$ は α–**平坦**といいます。

また，確率密度関数が集合 χ 上の関数 C と恒等的に零でない関数 $F_1, \ldots, F_n$，$\mathbb{R}^n$ の部分集合 Θ 上の関数 φ を用いて

$$p(x;\theta) = \exp\left[C(x) + \sum_{s=1}^n \theta^s F_s(x) - \varphi(\theta)\right] \tag{2.8}$$

と表せるとき，n 次元統計的モデルを**指数型分布族**といい，$\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^n)$ をその**自然パラメータ**といいます。指数型分布族は統計多様体になります。離散型分布である多項分布や負の多項分布，連続型分布である多次元正規分布や Dirichlet 分布は指数型分布の重要な例です。指数型でない例として指数分布，Cauchy 分布や Weibull 分布があります。

指数型分布族の確率密度関数 (2.8) において，正規化条件 $\int_\chi p(x;\theta)\,dx = 1$（離散型の場合，積分 $\int$ は和 $\sum$ になります。）より

$$\exp\varphi(\theta) = \int_\chi \exp\left[C(x) + \sum_{s=1}^n \theta^s F_s(x)\right] dx. \tag{2.9}$$

微分と積分の順序交換が可能と仮定して，θ^i で微分すると $\partial_i\varphi \cdot \exp\varphi = \exp\varphi \cdot E[\,F_i\,]$ が得られるので

$$E[\,F_i\,] = \partial_i\varphi \tag{2.10}$$

が分かります。ここで $\partial_i = \partial/\partial\theta^i$ です。さらに微分すると $\partial_j(\partial_i\varphi\cdot\exp\varphi) = \exp\varphi\cdot E[\,F_iF_j\,]$ 及び $\partial_k\{(\partial_i\partial_j\varphi + \partial_i\varphi\cdot\partial_j\varphi)\exp\varphi\} = \exp\varphi\cdot E[\,F_iF_jF_k\,]$ より

$$E[\,F_iF_j\,] = \partial_i\partial_j\varphi + \partial_i\varphi\cdot\partial_j\varphi, \tag{2.11}$$

$$E[\,F_iF_jF_k\,] = \partial_i\partial_j\partial_k\varphi + \partial_i\partial_j\varphi\cdot\partial_k\varphi + \partial_j\partial_k\varphi\cdot\partial_i\varphi + \partial_k\partial_i\varphi\cdot\partial_j\varphi + \partial_i\varphi\cdot\partial_j\varphi\cdot\partial_k\varphi \tag{2.12}$$

が得られます。また式 (2.8) において対数をとると

$$\ell(x;\theta) = C(x) + \sum_{s=1}^{n} \theta^s F_s(x) - \varphi(\theta)$$

となります。式 (2.5) と $\partial_i\partial_j\ell = -\partial_i\partial_j\varphi$ から Fisher 計量 g の成分は次のようになります：

$$g_{ij} = \partial_i\partial_j\varphi. \tag{2.13}$$

ここで g は正定値と仮定して $g^{-1} = (g^{ij})$ とおきます。式 (2.6), (2.10)～ (2.13) より

$$\Gamma^{(\alpha)}_{ij,k} = \frac{1}{2}(1-\alpha)\,\partial_i g_{jk} = \frac{1}{2}(1-\alpha)\,\partial_i\partial_j\partial_k\varphi \tag{2.14}$$

を得ます。これより式 (2.7) から α–接続

$$\nabla^{(\alpha)}_{\partial_i}\partial_j = \frac{1}{2}(1-\alpha)\,\partial_s g_{ij}\cdot g^{st}\,\partial_t \tag{2.15}$$

が得られます。また α–接続に関する曲率テンソル $R^{(\alpha)}$ は次のように表せます：

$$R^{(\alpha)}(\partial_i,\partial_j)\partial_k = \frac{c(\alpha)}{4}\,(\partial_j g_{ks}\cdot\partial_i g^{st} - \partial_i g_{ks}\cdot\partial_j g^{st})\partial_t. \tag{2.16}$$

ここで $c(\alpha) = (1-\alpha)(1+\alpha)$ とおきました。これより ([1])

定理 A． 指数型分布族の曲率テンソルは (2.16) である。特に ±1–平坦である。

3　統計多様体の例

良くあげられる統計的モデルの例として，正規分布のなす空間があります。この空間についてお話します。

例 1．正規分布．

正規分布の確率密度関数は

$$p(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{3.1}$$

で与えられます。ここで $-\infty < x < \infty$ であり，μ 及び σ はそれぞれ平均及び標準偏差です。この平均及び標準偏差を用いて正規分布のなす空間を考えると次の上半平面

$$M_1^2 = \{\,(\mu,\sigma)\mid -\infty<\mu<\infty,\ \sigma>0\,\} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$$

になります。定義より Fisher 計量は

$$ds_1^2 = \frac{d\mu^2 + 2\,d\sigma^2}{\sigma^2} \tag{3.2}$$

となります。ここで $\partial_\mu = \partial/\partial\mu,\ \partial_\sigma = \partial/\partial\sigma$ とおくと，α–接続 $\nabla^{(\alpha)}$ は次で与えられます：

$$\begin{aligned}
\nabla^{(\alpha)}_{\partial_\mu}\partial_\mu &= \frac{1-\alpha}{2\sigma}\,\partial_\sigma,\\
\nabla^{(\alpha)}_{\partial_\mu}\partial_\sigma = \nabla^{(\alpha)}_{\partial_\sigma}\partial_\mu &= -\frac{1+\alpha}{\sigma}\,\partial_\mu,\\
\nabla^{(\alpha)}_{\partial_\sigma}\partial_\sigma &= -\frac{1+2\alpha}{\sigma}\,\partial_\sigma.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

これより α–接続に関する曲率テンソルは

$$
R^{(\alpha)}(\partial_\mu, \partial_\sigma)\partial_\mu = \frac{c(\alpha)}{2\sigma^2}\,\partial_\sigma, \qquad R^{(\alpha)}(\partial_\mu, \partial_\sigma)\partial_\sigma = -\frac{c(\alpha)}{\sigma^2}\,\partial_\mu \tag{3.4}
$$

となります。これより正規分布のなす空間 $(M_1^2, ds_1^2, \nabla^{(\alpha)})$ は α–接続に関して定曲率 $-\frac{c(\alpha)}{2}$ の定曲率空間になることが分かります。特に，± 1–平坦です。

次に，Fisher 計量 (3.2) をみると次の Poincaré の上半平面 $M_2^2 = \{\,(x, y) \,|\, y > 0\,\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ の計量

$$
ds_2^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \tag{3.5}
$$

と大変良く似ています。Poincaré の上半平面 (M_2^2, ds_2^2) は (Levi–Civita 接続に関して) 定曲率 -1 の定曲率空間であり，その (Levi–Civita 接続に関する) 測地線は x 軸に中心をもつ円または y 軸に平行な直線の $y > 0$ の部分です。それでは正規分布のなす空間 M_1^2 の α–接続に関する測地線はどうでしょうか？α–接続に関する測地線の方程式は

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2\mu}{dt^2} - \dfrac{2(1+\alpha)}{\sigma}\,\dfrac{d\mu}{dt}\,\dfrac{d\sigma}{dt} = 0, \\[2ex]
\dfrac{d^2\sigma}{dt^2} + \dfrac{1-\alpha}{2\sigma}\left(\dfrac{d\mu}{dt}\right)^2 - \dfrac{1+2\alpha}{\sigma}\left(\dfrac{d\sigma}{dt}\right)^2 = 0
\end{cases} \tag{3.6}
$$

となります。これを解くと

(1) σ 軸に平行な半直線の $\sigma > 0$ の部分，または，

(2) $\alpha < 1$ のとき μ 軸に関して対称な楕円の $\sigma > 0$ の部分の一部，(特に，2 次元の場合，$\alpha = -1$ のときは μ 軸に関して対称な円の $\sigma > 0$ の部分の一部，)

(3) $\alpha = 1$ のとき軸を μ 軸上にもつ放物線の $\sigma > 0$ の部分か μ 軸に平行な直線の一部,

(4) $\alpha > 1$ のとき μ 軸に関して対称な双曲線または双曲線の漸近線の $\sigma > 0$ の部分の一部

となることが分かります。

さて，Poincaré の上半平面を一般化した Poincaré の上半空間 $M_2^{n+1} = \{\,(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}) \,|\, x^{n+1} > 0\,\} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ の計量は

$$
ds_2^2 = \frac{1}{(x^{n+1})^2}\left\{(dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2 + (dx^{n+1})^2\right\} \tag{3.7}
$$

で与えられます。それでは，Poincaré の上半空間のように例 1 の正規分布のなす空間を少々一般化するとどうなるでしょうか？

例 2．共分散行列が特別な形の多次元正規分布．

一般に n 次元正規分布の確率密度関数は

$$
p(x;\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sqrt{\det \varSigma}}\ \exp\left[-\frac{1}{2}\,{}^t(x-\mu)\varSigma^{-1}(x-\mu)\right] \tag{3.8}
$$

で与えられます。ここで $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ であり，$\mu = {}^t(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ は平均ベクトル，$\Sigma = (\sigma_{ij})$ は共分散行列と呼ばれる対称な正定値行列であり，

$$\xi = (\mu_1, \ldots, \mu_n, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \ldots, \sigma_{1n}, \sigma_{22}, \ldots, \sigma_{2n}, \ldots, \sigma_{nn})$$

とおきました。このとき多次元正規分布のなす空間は

$$M = \{\, \xi \in \mathbb{R}^{n+\frac{1}{2}n(n+1)} \mid -\infty < \mu_i < \infty \ (i = 1, \ldots, n),\ (\sigma_{ij}) \text{ は対称な正定値行列} \,\}$$

となります。ここで共分散行列が $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma^2, \ldots, \sigma^2)$ である特別な多次元正規分布を考えます。このときの確率密度関数は

$$p(x;\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\,\sigma)^n} \prod_{i=1}^{n} \exp\left[-\frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma^2} \right] \tag{3.9}$$

となります。ここで $\xi = (\mu_1, \ldots, \mu_n, \sigma)$ です。この特別な多次元正規分布のなす空間は

$$M_1^{n+1} = \{\, (\mu_1, \ldots, \mu_n, \sigma) \mid -\infty < \mu_i < \infty \ (i = 1, \ldots, n),\ \sigma > 0 \,\} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$$

です。この上半空間の Fisher 計量は

$$ds_1^2 = \frac{1}{\sigma^2} \left(d\mu_1^2 + \cdots + d\mu_n^2 + 2n\, d\sigma^2 \right) \tag{3.10}$$

となり，$n = 1$ のときは例 1 の Fisher 計量になります。$\mathbb{R}^n$ の計量を $d\mu_1^2 + \cdots + d\mu_n^2$ とし，$\mathbb{R}^n$ 上の関数を $f(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \sqrt{2n}$，$\mathbb{R}_+$ の計量を $\frac{d\sigma^2}{\sigma^2}$ とし，$\mathbb{R}_+$ 上の関数を $g(\sigma) = \frac{1}{\sigma}$ とすると，(M_1^{n+1}, ds_1^2) は doubly warped product 多様体になっています。また，Poincaré の上半空間の計量とも似ているため，この 2 つの上半空間 (M_i^{n+1}, ds_i^2) $(i = 1, 2)$ を統一して扱えるように正定数 ω に対して計量

$$ds^2 = \frac{1}{\sigma^2} \left(d\mu_1^2 + \cdots + d\mu_n^2 + \omega^2 d\sigma^2 \right) \tag{3.11}$$

をもつ上半空間 $M^{n+1} = \{\, (\mu_1, \ldots, \mu_n, \sigma) \mid -\infty < \mu_i < \infty \ (i = 1, \ldots, n),\ \sigma > 0 \,\} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ を考えます。$\omega = 1$ のときが Poincaré の上半空間 (M_2^{n+1}, ds_2^2)，$\omega = \sqrt{2n}$ のときは共分散行列が特別な形の多次元正規分布のなす空間 (M_1^{n+1}, ds_1^2) になります。また，M_1^{n+1} の α–接続を用いて実数 α に対して (M^{n+1}, ds^2) のアファイン接続 $\nabla^{(\alpha)}$ を次のように定義します：

$$\begin{aligned}
\nabla^{(\alpha)}_{\partial_i} \partial_j &= \frac{1-\alpha}{\omega^2 \sigma}\, \delta_{ij}\, \partial_\sigma, \\
\nabla^{(\alpha)}_{\partial_i} \partial_\sigma &= \nabla^{(\alpha)}_{\partial_\sigma} \partial_i = -\frac{1+\alpha}{\sigma}\, \partial_i, \\
\nabla^{(\alpha)}_{\partial_\sigma} \partial_\sigma &= -\frac{1+2\alpha}{\sigma}\, \partial_\sigma.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

ここで，$\partial_i = \partial/\partial\mu_i$, $\partial_\sigma = \partial/\partial\sigma$ です。このとき，$(M^{n+1}, ds^2, \nabla^{(\alpha)})$ は α–接続に関して定曲率 $-\frac{c(\alpha)}{\omega^2}$ の定曲率空間になります。特に，± 1–平坦です。

また，$(M^{n+1}, ds^2, \nabla^{(\alpha)})$ の α–接続に関する測地線の方程式は

$$\left\{ \begin{aligned}
&\frac{d^2\mu_i}{dt^2} - \frac{2(1+\alpha)}{\sigma} \frac{d\mu_i}{dt} \frac{d\sigma}{dt} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \\
&\frac{d^2\sigma}{dt^2} + \frac{1-\alpha}{\omega^2 \sigma} \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{d\mu_s}{dt} \right)^2 - \frac{1+2\alpha}{\sigma} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 = 0
\end{aligned} \right. \tag{3.13}$$

となり，例 1 の場合と同様な測地線が得られることが分かります。

4　概複素構造をもつ統計多様体

多様体 M 上の**概複素構造**とは，$J^2=-I$ となる (1,1) 型のテンソル場 J です。ここで，I は恒等変換を表します。固定されたそのような概複素構造をもつ多様体を**概複素多様体**といいます。概複素多様体は向き付け可能であり偶数次元です。M が Riemann 多様体である概複素多様体 (M,J) を考えます。M 上のベクトル場 X,Y に対して $g(JX,JY)=g(X,Y)$ を満たすとき，(M,g,J) を**概 Hermite 多様体**といいます。次に

$$g(JX,Y)+g(X,J^*Y)=0 \tag{4.1}$$

によりもう一つの (1,1) 型のテンソル場 J^* を定義します。このような Riemann 多様体 (M,g) を考えます。このとき (M,g,J) を**概 Hermite-like 多様体**と呼ぶことにします。$(J^*)^*=J$, $(J^*)^2=-I$ 及び

$$g(JX,J^*Y)=g(X,Y) \tag{4.2}$$

が成り立ちます。この概 Hermite-like 多様体において，概複素構造 J がアファイン接続 ∇ に関して平行であるとき，(M,g,∇,J) を **Kähler-like 統計多様体**と定めます。式 (4.1) よりベクトル場 X,Y,Z に対して

$$g((\nabla_Z J)X,Y)+g(X,(\nabla^*_Z J^*)Y)=0 \tag{4.3}$$

が得られます。これより ([6])

補題 B． 次が成り立つ。

(1) (M,g,J) が概 Hermite-like 多様体であることと (M,g,J^*) が概 Hermite-like 多様体であることは同値である。

(2) (M,g,∇,J) が Kähler-like 統計多様体であることと (M,g,∇^*,J^*) が Kähler-like 統計多様体であることは同値である。

Kähler 多様体 M^{2n} において，M が定曲率空間ならば $n>1$ のとき M は平坦になります。それでは Kähler-like 統計多様体ではどうでしょうか？アファイン接続に関して概複素構造が平行なので $R(X,Y)JZ=JR(X,Y)Z$ となります。これより式 (2.3) から Kähler 多様体と同様に次が成り立ちます ([11])：

定理 C． Kähler-like 統計多様体 (M^{2n},g,∇,J) において，M $(n>1)$ が定曲率空間ならば M は平坦である。

次に，指数型分布族 $(M,g,\nabla^{(\alpha)})$ において，α–接続に関して平行となる概複素構造 $J^{(\alpha)}$ について調べます。$J^{(\alpha)}$ を M 上の概複素構造とすると (4.1) から

$$(J^{(\alpha)})^*=-g^{-1}J^{(\alpha)}g \tag{4.4}$$

となることが分かります。α–接続に関して概複素構造 $J^{(\alpha)}$ が平行になる条件を求めます。

$$\left(\nabla^{(\alpha)}_{\partial_i}J^{(\alpha)}\right)\partial_j=\left\{\partial_i J_j^{(\alpha)\,t}+\frac{1}{2}(1-\alpha)\left(J_j^{(\alpha)\,r}\partial_i g_{rs}\cdot g^{st}-\partial_i g_{js}\cdot g^{sr}J_r^{(\alpha)\,t}\right)\right\}\partial_t,$$

より，$\nabla^{(\alpha)}J^{(\alpha)}=0$ は次式と同値です：

$$\partial_i J_j^{(\alpha)\,k}+\frac{1}{2}(1-\alpha)\left(J_j^{(\alpha)\,r}\partial_i g_{rs}\cdot g^{sk}-\partial_i g_{js}\cdot g^{sr}J_r^{(\alpha)\,k}\right)=0. \tag{4.5}$$

これより $\alpha = 1$ ならば

$$J_j^{(1)\,k} = P_j^{\ k} \tag{4.6}$$

となります。ここで $P_j^{\ k}$ は $P_j^{\ r}P_r^{\ i} = -\delta_j^{\ i}$ を満たす定数です。また

$$J_j^{(-1)\,k} = -P_r^{\ s} g_{sj} g^{rk} \tag{4.7}$$

とおくと，次のことが分かります ([11])：

定理 D． 指数型分布族において

(1) $(M, g, J^{(\pm 1)})$ はそれぞれ概 Hermite-like 多様体である。

(2) $(M, g, \nabla^{(\pm 1)}, J^{(\pm 1)})$ はそれぞれ Kähler-like 統計多様体である。

指数型分布族 $(M, g, \nabla^{(\alpha)})$ が α–接続に関して定曲率空間と仮定します。このとき，式 (2.15) と定理 A から曲率テンソルは

$$R_{ijk}^{(\alpha)\,\ell} = c(\alpha)A(g_{jk}\delta_i^{\ \ell} - g_{ik}\delta_j^{\ \ell})$$

と表すことができます。ここで A は定数です。これより定理 C から次のことが分かります ([11])：

定理 E． $(M^{2n}, g, \nabla^{(\alpha)})$ $(n > 1)$ を $A \neq 0$ を満たす定曲率空間とする。このとき M が $(J^{(\alpha)})^2 = -I$ を満たす (4.5) の解をもつための必要十分条件は $\alpha = \pm 1$ である。

5 概複素構造をもつ指数型分布族の例

離散型や連続型の指数型分布族を考え，1–接続や (-1)–接続に関して平行である概複素構造について述べます。

例 3．共分散行列が特別な形の多次元正規分布のなす空間及び Poincaré の上半空間．

例 2 で取り上げた上半平面 $(M, ds^2, \nabla^{(\alpha)})$ は接続 $\nabla^{(\alpha)}$ に関して定曲率 $-\frac{c(\alpha)}{\omega^2}$ の定曲率空間でした。$\dim M = 2n\,(> 2)$ のとき，定理 E から $\alpha = \pm 1$ のときそれぞれ $\nabla^{(\pm 1)}$–接続に関して平行となる概複素構造 $J^{(\pm 1)}$ が存在します。これを求めると

$$J^{(1)} = \begin{pmatrix} 2R_j\mu_i + P_j^i & \dfrac{1}{\sigma}\left(-4\mu_i \displaystyle\sum_{s=1}^{2n} R_s\mu_s - 2\sum_{s=1}^{2n} P_s^i\mu_s + 2S\mu_i + Q^i\right) \\ R_j\sigma & -2\displaystyle\sum_{s=1}^{2n} R_s\mu_s + S \end{pmatrix},$$

$$J^{(-1)} = \begin{pmatrix} -2R_i\mu_j - P_i^j & -\omega^2 R_i\sigma \\ \dfrac{1}{\omega^2\sigma}\left(4\mu_j \displaystyle\sum_{s=1}^{2n} R_s\mu_s + 2\sum_{s=1}^{2n} p_s^j\mu_s - 2S\mu_j - Q^j\right) & 2\displaystyle\sum_{s=1}^{2n} R_s\mu_s - S \end{pmatrix}$$

となります。ここで

$$\Lambda = \begin{pmatrix} P_j^i & Q^i \\ R_j & S \end{pmatrix}$$

とおくとき，P_j^i, Q^i, R_j, S は $\Lambda^2 = -I$ を満たす定数です。これより

(1) $(M, ds^2, J^{(\pm1)})$ はそれぞれ概 Hermite-like 多様体です。

(2) $(M, ds^2, \nabla^{(\pm1)}, J^{(\pm1)})$ はそれぞれ Kähler-like 統計多様体です。

定数 $\omega = 1$ のとき M は Poincaré の上半空間です。一般に，偶数次元の Poincaré の上半空間は Kähler 多様体にはなりませんが，この例から分かるように Poincaré の上半空間には e–接続及び m–接続に関して平行となる概複素構造が存在することが分かります。

例 4． 負の多項分布のなす空間.

負の多項分布の確率密度関数は

(5.1) $$p(x;\xi) = \frac{\Gamma(m + x_1 + \cdots + x_n)}{\Gamma(m)\, x_1! x_2! \cdots x_n!}\, p_0^m p_1^{x_1} \cdots p_n^{x_n}$$

で表されます。ここで $\xi = (p_1, \dots, p_n)$，$\Gamma(x)$ はガンマ関数，m は正定数であり，$k = 1, \dots, n$ に対して $x_k \in \{0, 1, 2, \dots\}$，$p_k\,(> 0)$ は $p_0 + p_1 + \cdots + p_n = 1$ を満たします。この確率分布は

$$\begin{aligned} p(x;\xi) = \exp\Biggl\{ &\log\Gamma(m + x_1 + \cdots + x_n) - \log\Gamma(m) - \sum_{s=1}^{n} \log x_s! \\ &+ \sum_{s=1}^{n} x_s \log p_s + m\, \log(1 - p_1 - \cdots - p_n) \Biggr\} \end{aligned}$$

と表すことができるから負の多項分布は指数型分布族です。

$$\begin{aligned} &C(x) = \log\Gamma(m + x_1 + \cdots + x_n) - \log\Gamma(m) - \sum_{s=1}^{n} \log x_s!, \\ &F_i(x) = -x_i, \qquad \theta^i = -\log p_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \\ &\varphi(\theta) = -m\, \log(1 - p_1 - \cdots - p_n) \end{aligned}$$

とおき

$$M^n = \{\, (\theta^1, \dots, \theta^n) \mid 0 < \theta^i < \infty \ (i = 1, \dots, n) \,\} = (\mathbb{R}_+)^n$$

とします。$p_i = e^{-\theta^i}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ より

(5.2) $$\varphi(\theta) = -m\, \log\tau(\theta).$$

ここで $\tau(\theta) = 1 - \sum_{s=1}^{n} e^{-\theta^s}$ とおきました。これを微分すると

(5.3) $$\partial_i\varphi = -m\, \frac{e^{-\theta^i}}{\tau(\theta)},$$

(5.4) $$\partial_i\partial_j\varphi = m \left\{ \frac{e^{-\theta^i}}{\tau(\theta)}\, \delta_{ij} + \frac{e^{-\theta^i} e^{-\theta^j}}{\tau(\theta)^2} \right\},$$

(5.5) $$\begin{aligned} \partial_i\partial_j\partial_k\varphi = -m \Biggl\{ &\frac{e^{-\theta^i}}{\tau(\theta)}\, \delta_{ij}\delta_{ik} + \frac{e^{-\theta^i} e^{-\theta^k}}{\tau(\theta)^2}\, \delta_{ij} + \frac{e^{-\theta^j} e^{-\theta^k}}{\tau(\theta)^2}\, \delta_{ik} + \frac{e^{-\theta^i} e^{-\theta^j}}{\tau(\theta)^2}\, \delta_{jk} \\ &+ \frac{2e^{-\theta^i} e^{-\theta^j} e^{-\theta^k}}{\tau(\theta)^3} \Biggr\} \end{aligned}$$

が得られます。ここで $\partial_i = \partial/\partial\theta^i$ です。式 (2.13) と (5.4) から Fisher 計量の成分は次のようになります：

$$g_{ij} = m\left\{\frac{e^{-\theta^i}}{\tau(\theta)}\,\delta_{ij} + \frac{e^{-\theta^i}e^{-\theta^j}}{\tau(\theta)^2}\right\}. \tag{5.6}$$

また Fisher 計量 g の逆行列の成分は

$$g^{ij} = \frac{\tau(\theta)}{m\,e^{-\theta^i}}(\delta_{ij} - e^{-\theta^i}) \tag{5.7}$$

となることが分かります。式 (2.14), (5.5), (5.7) から次式が成り立ちます:

$$\Gamma_{ij}^{(\alpha)\,k} = \Gamma_{ij,s}^{(\alpha)}\,g^{sk} = -\frac{1}{2}(1-\alpha)\left\{\delta_{ij}\delta_{ik} + \frac{e^{-\theta^j}}{\tau(\theta)}\,\delta_{ik} + \frac{e^{-\theta^i}}{\tau(\theta)}\,\delta_{jk}\right\}. \tag{5.8}$$

これより，実数 α に対して α–接続 $\nabla^{(\alpha)}$ は

$$\nabla^{(\alpha)}_{\partial_i}\partial_j = -\frac{1}{2}(1-\alpha)\left\{\delta_{ij}\,\partial_i + \frac{e^{-\theta^j}}{\tau(\theta)}\,\partial_i + \frac{e^{-\theta^i}}{\tau(\theta)}\,\partial_j\right\} \tag{5.9}$$

となります。さらに α–接続に関する曲率テンソルは

$$R^{(\alpha)}(\partial_i,\partial_j)\partial_k = -\frac{c(\alpha)}{4}\left[\left\{\frac{e^{-\theta^j}}{\tau(\theta)}\,\delta_{jk} + \frac{e^{-\theta^j}e^{-\theta^k}}{\tau(\theta)^2}\right\}\partial_i - \left\{\frac{e^{-\theta^i}}{\tau(\theta)}\,\delta_{ik} + \frac{e^{-\theta^i}e^{-\theta^k}}{\tau(\theta)^2}\right\}\partial_j\right]$$

となり，次のことが分かります ([10])：

定理 F. 負の多項分布のなす空間は定曲率 $-\frac{c(\alpha)}{4m}$ の定曲率空間である。

次に，式 (4.6), (4.7), (5.6), (5.7) から 1–接続及び (-1)–接続に関して平行となる概複素構造 $J^{(1)}$ 及び $J^{(-1)}$ の成分はそれぞれ $J_j^{(1)\,k} = P_j{}^k$ 及び

$$J_j^{(-1)\,k} = -\frac{e^{-\theta^j}}{e^{-\theta^k}}\left\{P_k{}^j - e^{-\theta^k}\sum_{r=1}^{n}P_r{}^j + \frac{1}{\tau(\theta)}\sum_{s=1}^{n}\left(P_k{}^s - e^{-\theta^k}\sum_{r=1}^{n}P_r{}^s\right)e^{-\theta^s}\right\}$$

と表すことができます。これより ([10])

定理 G. 負の多項分布のなす空間において，$\dim M$ (≥ 4) が偶数ならば

(1) $(M, g, J^{(\pm1)})$ はそれぞれ概 Hermite-like 多様体である。

(2) $(M, g, \nabla^{(\pm1)}, J^{(\pm1)})$ はそれぞれ Kähler-like 統計多様体である。

注意. $n = 2$ のとき

$$J_1^{(0)\,1} = -J_2^{(0)\,2} = \pm\left(\frac{e^{-\theta^1-\theta^2}}{1-e^{-\theta^1}-e^{-\theta^2}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$J_1^{(0)\,2} = \mp\frac{1-e^{-\theta^2}}{e^{-\theta^2}}\left(\frac{e^{-\theta^1-\theta^2}}{1-e^{-\theta^1}-e^{-\theta^2}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$J_2^{(0)\,1} = \pm\frac{1-e^{-\theta^1}}{e^{-\theta^1}}\left(\frac{e^{-\theta^1-\theta^2}}{1-e^{-\theta^1}-e^{-\theta^2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

とおくと $(M^2, g, \nabla^{(0)}, J^{(0)})$ は Kähler 多様体になります。

6　複素局所座標系を用いた表現

リーマン多様体 (M^{2n}, g) の各点 $p \in M$ に対して線形変換 $J_p : T_pM \to T_pM$ を

$$J_p\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_p, \qquad J_p\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_p = -\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_p \qquad (\alpha = 1, \dots, n)$$

とし，$u, v \in T_pM$ に対して

$$J_p(u + \sqrt{-1}\,v) = J_pu + \sqrt{-1}\,J_pv$$

により線形変換 $J_p : T_p^{\mathbb{C}}M \to T_p^{\mathbb{C}}M$ に拡張します。また

$$Z_\alpha = \frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right),$$

$$Z_{\bar{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} = \overline{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)$$

とおくと

$$JZ_\alpha = \sqrt{-1}\,Z_\alpha, \quad JZ_{\bar{\alpha}} = -\sqrt{-1}\,Z_{\bar{\alpha}} \quad (\alpha = 1, \dots, n)$$

となり，$J^2 = -I$ となります。複素多様体 M 上のリーマン計量を g とします。各点 $p \in M$ に対して g は T_pM の対称双一次形式で，$u + \sqrt{-1}\,v$, $u' + \sqrt{-1}\,v' \in T_p^{\mathbb{C}}M$ に対して

$$g(u + \sqrt{-1}\,v, u' + \sqrt{-1}\,v') = \{g(u, u') - g(v, v')\} + \sqrt{-1}\{g(u, v') + g(v, u')\}$$

と定義することにより，g を $T_p^{\mathbb{C}}M$ の対称双一次形式と考えることができます。$(z^1, \dots, z^n)$ を複素局所座標系とするとき，$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$ に対して g の複素局所座標系 $(z^1, \dots, z^n)$ に関する成分 $g_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\bar{\beta}}$, $g_{\bar{\alpha}\beta}$, $g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ をそれぞれ

$$g_{\alpha\beta} = g(Z_\alpha, Z_\beta), \qquad g_{\alpha\bar{\beta}} = g(Z_\alpha, Z_{\bar{\beta}}),$$

$$g_{\bar{\alpha}\beta} = g(Z_{\bar{\alpha}}, Z_\beta), \qquad g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = g(Z_{\bar{\alpha}}, Z_{\bar{\beta}})$$

とおくと

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}, \qquad g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = g_{\bar{\beta}\bar{\alpha}}, \qquad g_{\alpha\bar{\beta}} = g_{\bar{\beta}\alpha}, \qquad \bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}, \qquad \bar{g}_{\alpha\bar{\beta}} = g_{\bar{\alpha}\beta}$$

が成り立ちます。

リーマン多様体 M の計量 g が任意の $u, v \in T_pM$ に対して

$$g(Ju, Jv) = g(u, v)$$

を満たすとき，g を複素多様体 M の **Hermite 計量**といいます。リーマン計量 g が Hermite 計量であるための条件を g の複素局所座標系に関する成分についていえば

$$g_{\alpha\beta} = 0 \qquad (g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0) \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots, n)$$

となります。

次に概複素構造 J をもつ M のリーマン計量 g が任意の $u, v \in T_pM$ に対して

$$g(Ju, J^*v) = g(u, v) \tag{6.1}$$

により J^* を定義すると J^* は概複素構造になり，先に述べたように (M,g,J) を**概 Hermite-like 多様体**と呼ぶことにします。このとき

$$J^*Z_\beta = -\sqrt{-1}\left(g_{\beta\sigma}g^{\sigma\omega} - g_{\beta\bar\sigma}g^{\bar\sigma\omega}\right)Z_\omega - \sqrt{-1}\left(g_{\beta\sigma}g^{\sigma\bar\omega} - g_{\beta\bar\sigma}g^{\bar\sigma\bar\omega}\right)Z_{\bar\omega}, \tag{6.2}$$

$$J^*Z_{\bar\beta} = -\sqrt{-1}\left(g_{\bar\beta\sigma}g^{\sigma\omega} - g_{\bar\beta\bar\sigma}g^{\bar\sigma\omega}\right)Z_\omega - \sqrt{-1}\left(g_{\bar\beta\sigma}g^{\sigma\bar\omega} - g_{\bar\beta\bar\sigma}g^{\bar\sigma\bar\omega}\right)Z_{\bar\omega} \tag{6.3}$$

となります。$(J^*)^2 = -I$ が成り立つことも確かめられます。また

$$\begin{aligned} J^*Z_\beta &= JZ_\beta - 2\sqrt{-1}\,g_{\beta\sigma}\left(g^{\sigma\omega}Z_\omega + g^{\sigma\bar\omega}Z_{\bar\omega}\right) \\ &= -JZ_\beta + 2\sqrt{-1}\,g_{\beta\bar\sigma}\left(g^{\bar\sigma\omega}Z_\omega + g^{\bar\sigma\bar\omega}Z_{\bar\omega}\right), \end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned} J^*Z_{\bar\beta} &= -JZ_{\bar\beta} - 2\sqrt{-1}\,g_{\bar\beta\sigma}\left(g^{\sigma\omega}Z_\omega + g^{\sigma\bar\omega}Z_{\bar\omega}\right) \\ &= JZ_{\bar\beta} + 2\sqrt{-1}\,g_{\bar\beta\bar\sigma}\left(g^{\bar\sigma\omega}Z_\omega + g^{\bar\sigma\bar\omega}Z_{\bar\omega}\right) \end{aligned} \tag{6.5}$$

と表すことができます。これより

補題 6.1. $J = J^*$ であるための必要十分条件は $g_{\alpha\beta} = 0$ $(g_{\bar\alpha\bar\beta} = 0)$ である。

また

$$\begin{aligned} JJ^*Z_\alpha &= \left(g_{\alpha\sigma}g^{\sigma\omega} - g_{\alpha\bar\sigma}g^{\bar\sigma\omega}\right)Z_\omega - \left(g_{\alpha\sigma}g^{\sigma\bar\omega} - g_{\alpha\bar\sigma}g^{\bar\sigma\bar\omega}\right)Z_{\bar\omega}, \\ JJ^*Z_{\bar\alpha} &= \left(g_{\bar\alpha\sigma}g^{\sigma\omega} - g_{\bar\alpha\bar\sigma}g^{\bar\sigma\omega}\right)Z_\omega - \left(g_{\bar\alpha\sigma}g^{\sigma\bar\omega} - g_{\bar\alpha\bar\sigma}g^{\bar\sigma\bar\omega}\right)Z_{\bar\omega}, \\ J^*JZ_\alpha &= \left(g_{\alpha\sigma}g^{\sigma\omega} - g_{\alpha\bar\sigma}g^{\bar\sigma\omega}\right)Z_\omega + \left(g_{\alpha\sigma}g^{\sigma\bar\omega} - g_{\alpha\bar\sigma}g^{\bar\sigma\bar\omega}\right)Z_{\bar\omega}, \\ J^*JZ_{\bar\alpha} &= -\left(g_{\bar\alpha\sigma}g^{\sigma\omega} - g_{\bar\alpha\bar\sigma}g^{\bar\sigma\omega}\right)Z_\omega - \left(g_{\bar\alpha\sigma}g^{\sigma\bar\omega} - g_{\bar\alpha\bar\sigma}g^{\bar\sigma\bar\omega}\right)Z_{\bar\omega} \end{aligned}$$

となります。これより一般に $JJ^* \neq J^*J$ です。これより

補題 6.2. $[J, J^*] = 0$ であるための必要十分条件は

$$g_{\alpha\sigma}g^{\sigma\bar\beta} = 0, \qquad g_{\alpha\bar\sigma}g^{\bar\sigma\bar\beta} = 0. \qquad \left(g_{\bar\alpha\sigma}g^{\sigma\beta} = 0, \qquad g_{\bar\alpha\bar\sigma}g^{\bar\sigma\beta} = 0\right).$$

補題 6.3. $JJ^* + J^*J = -2I$ であるための必要十分条件は

$$g_{\alpha\sigma}g^{\sigma\beta} = 0, \qquad g_{\alpha\bar\sigma}g^{\bar\sigma\beta} = \delta_\alpha^{\ \beta}. \qquad \left(g_{\bar\alpha\sigma}g^{\sigma\bar\beta} = \delta_{\bar\alpha}^{\ \bar\beta}, \qquad g_{\bar\alpha\bar\sigma}g^{\bar\sigma\bar\beta} = 0\right).$$

任意の実数 α に対して

$$J^{(\alpha)} = \frac{1+\alpha}{2}\,J + \frac{1-\alpha}{2}\,J^* \tag{6.6}$$

とおくと

補題 6.4. $g_{\alpha\sigma}g^{\sigma\beta} = 0$, $g_{\alpha\bar\sigma}g^{\bar\sigma\beta} = \delta_\alpha^{\ \beta}$ のとき，任意の実数 α に対して $J^{(\alpha)}$ は概複素構造である。

7 共役接続

$A, B, C, \cdots = 1, \ldots, n, \bar 1, \ldots, \bar n$ とし，$\nabla_{Z_A}Z_B = \Gamma_{AB}^{\ \ E}Z_E$, $\nabla^*_{Z_A}Z_B = \Gamma^{*\ E}_{AB}Z_E$ とおきます。但し $Z_A = \partial/\partial z^A$ です。$Z_A g(Z_B, Z_C) = g(\nabla_{Z_A}Z_B, Z_C) + g(Z_B, \nabla^*_{Z_A}Z_C)$ より

$$Z_A g_{BC} = \Gamma_{AB}^{\ \ E}g_{EC} + \Gamma^{*\ E}_{AC}g_{BE}$$

だから

$$Z_\alpha g_{\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\varepsilon} g_{\varepsilon\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\bar\varepsilon} g_{\bar\varepsilon\gamma} + \Gamma^*_{\alpha\gamma}{}^{\varepsilon} g_{\beta\varepsilon} + \Gamma^*_{\alpha\gamma}{}^{\bar\varepsilon} g_{\beta\bar\varepsilon}, \tag{7.1}$$

$$Z_\alpha g_{\beta\bar\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\varepsilon} g_{\varepsilon\bar\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\bar\varepsilon} g_{\bar\varepsilon\bar\gamma} + \Gamma^*_{\alpha\bar\gamma}{}^{\varepsilon} g_{\beta\varepsilon} + \Gamma^*_{\alpha\bar\gamma}{}^{\bar\varepsilon} g_{\beta\bar\varepsilon}, \tag{7.2}$$

$$Z_\alpha g_{\bar\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\bar\beta}{}^{\varepsilon} g_{\varepsilon\gamma} + \Gamma_{\alpha\bar\beta}{}^{\bar\varepsilon} g_{\bar\varepsilon\gamma} + \Gamma^*_{\alpha\gamma}{}^{\varepsilon} g_{\bar\beta\varepsilon} + \Gamma^*_{\alpha\gamma}{}^{\bar\varepsilon} g_{\bar\beta\bar\varepsilon}, \tag{7.3}$$

$$Z_\alpha g_{\bar\beta\bar\gamma} = \Gamma_{\alpha\bar\beta}{}^{\varepsilon} g_{\varepsilon\bar\gamma} + \Gamma_{\alpha\bar\beta}{}^{\bar\varepsilon} g_{\bar\varepsilon\bar\gamma} + \Gamma^*_{\alpha\bar\gamma}{}^{\varepsilon} g_{\bar\beta\varepsilon} + \Gamma^*_{\alpha\bar\gamma}{}^{\bar\varepsilon} g_{\bar\beta\bar\varepsilon}, \tag{7.4}$$

$$Z_{\bar\alpha} g_{\beta\gamma} = \Gamma_{\bar\alpha\beta}{}^{\varepsilon} g_{\varepsilon\gamma} + \Gamma_{\bar\alpha\beta}{}^{\bar\varepsilon} g_{\bar\varepsilon\gamma} + \Gamma^*_{\bar\alpha\gamma}{}^{\varepsilon} g_{\beta\varepsilon} + \Gamma^*_{\bar\alpha\gamma}{}^{\bar\varepsilon} g_{\beta\bar\varepsilon}, \tag{7.5}$$

$$Z_{\bar\alpha} g_{\beta\bar\gamma} = \Gamma_{\bar\alpha\beta}{}^{\varepsilon} g_{\varepsilon\bar\gamma} + \Gamma_{\bar\alpha\beta}{}^{\bar\varepsilon} g_{\bar\varepsilon\bar\gamma} + \Gamma^*_{\bar\alpha\bar\gamma}{}^{\varepsilon} g_{\beta\varepsilon} + \Gamma^*_{\bar\alpha\bar\gamma}{}^{\bar\varepsilon} g_{\beta\bar\varepsilon}, \tag{7.6}$$

$$Z_{\bar\alpha} g_{\bar\beta\gamma} = \Gamma_{\bar\alpha\bar\beta}{}^{\varepsilon} g_{\varepsilon\gamma} + \Gamma_{\bar\alpha\bar\beta}{}^{\bar\varepsilon} g_{\bar\varepsilon\gamma} + \Gamma^*_{\bar\alpha\gamma}{}^{\varepsilon} g_{\bar\beta\varepsilon} + \Gamma^*_{\bar\alpha\gamma}{}^{\bar\varepsilon} g_{\bar\beta\bar\varepsilon}, \tag{7.7}$$

$$Z_{\bar\alpha} g_{\bar\beta\bar\gamma} = \Gamma_{\bar\alpha\bar\beta}{}^{\varepsilon} g_{\varepsilon\bar\gamma} + \Gamma_{\bar\alpha\bar\beta}{}^{\bar\varepsilon} g_{\bar\varepsilon\bar\gamma} + \Gamma^*_{\bar\alpha\bar\gamma}{}^{\varepsilon} g_{\bar\beta\varepsilon} + \Gamma^*_{\bar\alpha\bar\gamma}{}^{\bar\varepsilon} g_{\bar\beta\bar\varepsilon} \tag{7.8}$$

となります。次に，$(\nabla_X J)Y = \nabla_X(JY) - J\nabla_X Y$ より

$$(\nabla_{Z_\alpha} J) Z_\beta = 2\sqrt{-1}\,\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\bar\varepsilon} Z_{\bar\varepsilon},$$

$$(\nabla_{Z_\alpha} J) Z_{\bar\beta} = -2\sqrt{-1}\,\Gamma_{\alpha\bar\beta}{}^{\varepsilon} Z_{\varepsilon},$$

$$(\nabla_{Z_{\bar\alpha}} J) Z_\beta = 2\sqrt{-1}\,\Gamma_{\bar\alpha\beta}{}^{\bar\varepsilon} Z_{\bar\varepsilon},$$

$$(\nabla_{Z_{\bar\alpha}} J) Z_{\bar\beta} = -2\sqrt{-1}\,\Gamma_{\bar\alpha\bar\beta}{}^{\varepsilon} Z_{\varepsilon}.$$

これより

補題 7.1． 概複素構造 J がアファイン接続 ∇ に関して平行であるための必要十分条件は

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\bar\varepsilon} = 0, \qquad \Gamma_{\alpha\bar\beta}{}^{\varepsilon} = 0, \qquad \Gamma_{\bar\alpha\beta}{}^{\bar\varepsilon} = 0, \qquad \Gamma_{\bar\alpha\bar\beta}{}^{\varepsilon} = 0.$$

即ち，$\Gamma_{A\beta}{}^{\bar\varepsilon} = 0$, $\Gamma_{A\bar\beta}{}^{\varepsilon} = 0$ である。

これより $\nabla J = 0$ のとき，式 (7.1)~(7.8) は次のようになります：

$$Z_\alpha g_{\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\varepsilon} g_{\varepsilon\gamma} + \Gamma^*_{\alpha\gamma}{}^{\varepsilon} g_{\beta\varepsilon} + \Gamma^*_{\alpha\gamma}{}^{\bar\varepsilon} g_{\beta\bar\varepsilon}, \tag{7.9}$$

$$Z_\alpha g_{\beta\bar\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\varepsilon} g_{\varepsilon\bar\gamma} + \Gamma^*_{\alpha\bar\gamma}{}^{\varepsilon} g_{\beta\varepsilon} + \Gamma^*_{\alpha\bar\gamma}{}^{\bar\varepsilon} g_{\beta\bar\varepsilon}, \tag{7.10}$$

$$Z_\alpha g_{\bar\beta\gamma} = \Gamma^*_{\alpha\gamma}{}^{\varepsilon} g_{\bar\beta\varepsilon} + \Gamma^*_{\alpha\gamma}{}^{\bar\varepsilon} g_{\bar\beta\bar\varepsilon}, \tag{7.11}$$

$$Z_\alpha g_{\bar\beta\bar\gamma} = \Gamma^*_{\alpha\bar\gamma}{}^{\varepsilon} g_{\bar\beta\varepsilon} + \Gamma^*_{\alpha\bar\gamma}{}^{\bar\varepsilon} g_{\bar\beta\bar\varepsilon}, \tag{7.12}$$

$$Z_{\bar\alpha} g_{\beta\gamma} = \Gamma^*_{\bar\alpha\gamma}{}^{\varepsilon} g_{\beta\varepsilon} + \Gamma^*_{\bar\alpha\gamma}{}^{\bar\varepsilon} g_{\beta\bar\varepsilon}, \tag{7.13}$$

$$Z_{\bar\alpha} g_{\beta\bar\gamma} = \Gamma^*_{\bar\alpha\bar\gamma}{}^{\varepsilon} g_{\beta\varepsilon} + \Gamma^*_{\bar\alpha\bar\gamma}{}^{\bar\varepsilon} g_{\beta\bar\varepsilon}, \tag{7.14}$$

$$Z_{\bar\alpha} g_{\bar\beta\gamma} = \Gamma_{\bar\alpha\bar\beta}{}^{\bar\varepsilon} g_{\bar\varepsilon\gamma} + \Gamma^*_{\bar\alpha\gamma}{}^{\varepsilon} g_{\bar\beta\varepsilon} + \Gamma^*_{\bar\alpha\gamma}{}^{\bar\varepsilon} g_{\bar\beta\bar\varepsilon}, \tag{7.15}$$

$$Z_{\bar\alpha} g_{\bar\beta\bar\gamma} = \Gamma_{\bar\alpha\bar\beta}{}^{\bar\varepsilon} g_{\bar\varepsilon\bar\gamma} + \Gamma^*_{\bar\alpha\bar\gamma}{}^{\varepsilon} g_{\bar\beta\varepsilon} + \Gamma^*_{\bar\alpha\bar\gamma}{}^{\bar\varepsilon} g_{\bar\beta\bar\varepsilon}. \tag{7.16}$$

式 (7.9) 及び (7.11) より

$$\Gamma^*_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + \Gamma_{\alpha\omega}{}^{\varepsilon} g_{\varepsilon\beta} g^{\omega\gamma} = g^{\gamma\omega} Z_\alpha g_{\omega\beta} + g^{\gamma\bar\omega} Z_\alpha g_{\bar\omega\beta}, \tag{7.17}$$

$$\Gamma^*_{\alpha\beta}{}^{\bar\gamma} + \Gamma_{\alpha\omega}{}^{\varepsilon} g_{\varepsilon\beta} g^{\omega\bar\gamma} = g^{\bar\gamma\omega} Z_\alpha g_{\omega\beta} + g^{\bar\gamma\bar\omega} Z_\alpha g_{\bar\omega\beta} \tag{7.18}$$

となります。また，式 (7.12) 及び (7.13) から

$$\Gamma^{*\ \gamma}_{\alpha\bar{\beta}} = g^{\gamma\bar{\omega}} Z_\alpha g_{\bar{\omega}\bar{\beta}} + g^{\gamma\omega} Z_{\bar{\beta}} g_{\omega\alpha}, \tag{7.19}$$

$$\Gamma^{*\ \bar{\gamma}}_{\alpha\bar{\beta}} = g^{\bar{\gamma}\bar{\omega}} Z_\alpha g_{\bar{\omega}\bar{\beta}} + g^{\bar{\gamma}\omega} Z_{\bar{\beta}} g_{\omega\alpha} \tag{7.20}$$

が得られ，式 (7.14) 及び (7.16) より

$$\Gamma^{*\ \gamma}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + \Gamma_{\bar{\alpha}\bar{\omega}}^{\ \bar{\varepsilon}} g_{\bar{\varepsilon}\bar{\beta}} g^{\bar{\omega}\gamma} = g^{\gamma\omega} Z_{\bar{\alpha}} g_{\omega\bar{\beta}} + g^{\gamma\bar{\omega}} Z_{\bar{\alpha}} g_{\bar{\omega}\bar{\beta}}, \tag{7.21}$$

$$\Gamma^{*\ \bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + \Gamma_{\bar{\alpha}\bar{\omega}}^{\ \bar{\varepsilon}} g_{\bar{\varepsilon}\bar{\beta}} g^{\bar{\omega}\bar{\gamma}} = g^{\bar{\gamma}\omega} Z_{\bar{\alpha}} g_{\omega\bar{\beta}} + g^{\bar{\gamma}\bar{\omega}} Z_{\bar{\alpha}} g_{\bar{\omega}\bar{\beta}}, \tag{7.22}$$

を得ます。

ここで，Kähler-like 統計多様体において $J = J^*$ の場合を考えます。補題 6.1 により $J = J^*$ であるための必要十分条件は $g_{\alpha\beta} = 0$ ($g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0$) であるから式 (7.9)∼(7.16) は

$$\Gamma^{*\ \bar{\varepsilon}}_{\alpha\gamma} g_{\beta\bar{\varepsilon}} = 0, \tag{7.23}$$

$$Z_\alpha g_{\beta\bar{\gamma}} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\ \varepsilon} g_{\varepsilon\bar{\gamma}} + \Gamma^{*\ \bar{\varepsilon}}_{\alpha\bar{\gamma}} g_{\beta\bar{\varepsilon}}, \tag{7.24}$$

$$Z_\alpha g_{\bar{\beta}\gamma} = \Gamma^{*\ \varepsilon}_{\alpha\gamma} g_{\bar{\beta}\varepsilon}, \tag{7.25}$$

$$\Gamma^{*\ \varepsilon}_{\alpha\bar{\gamma}} g_{\bar{\beta}\varepsilon} = 0, \tag{7.26}$$

$$\Gamma^{*\ \bar{\varepsilon}}_{\bar{\alpha}\gamma} g_{\beta\bar{\varepsilon}} = 0, \tag{7.27}$$

$$Z_{\bar{\alpha}} g_{\beta\bar{\gamma}} = \Gamma^{*\ \bar{\varepsilon}}_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} g_{\beta\bar{\varepsilon}}, \tag{7.28}$$

$$Z_{\bar{\alpha}} g_{\bar{\beta}\gamma} = \Gamma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\ \bar{\varepsilon}} g_{\bar{\varepsilon}\gamma} + \Gamma^{*\ \varepsilon}_{\bar{\alpha}\gamma} g_{\bar{\beta}\varepsilon}, \tag{7.29}$$

$$\Gamma^{*\ \varepsilon}_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} g_{\bar{\beta}\varepsilon} = 0 \tag{7.30}$$

となります。式 (7.23) より $0 = \Gamma^{*\ \bar{\varepsilon}}_{\alpha\gamma} g_{\beta\bar{\varepsilon}} g^{\beta\bar{\omega}} = \Gamma^{*\ \bar{\varepsilon}}_{\alpha\gamma}(\delta_{\bar{\varepsilon}}^{\ \bar{\omega}} - g_{\bar{\beta}\bar{\varepsilon}} g^{\bar{\beta}\bar{\omega}}) = \Gamma^{*\ \bar{\omega}}_{\alpha\gamma}$ となるから

$$\Gamma^{*\ \bar{\omega}}_{\alpha\gamma} = 0$$

が得られます。同様にして式 (7.26), (7.27), (7.30) よりそれぞれ $\Gamma^{*\ \omega}_{\alpha\bar{\gamma}} = 0$, $\Gamma^{*\ \bar{\omega}}_{\bar{\alpha}\gamma} = 0$, $\Gamma^{*\ \omega}_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} = 0$ を得ます。即ち，$\Gamma^{*\ \bar{\omega}}_{A\gamma} = 0$, $\Gamma^{*\ \omega}_{A\bar{\gamma}} = 0$ です。また，式 (7.25) より $Z_\alpha g_{\bar{\beta}\gamma} \cdot g^{\bar{\beta}\omega} = \Gamma^{*\ \varepsilon}_{\alpha\gamma} g_{\bar{\beta}\varepsilon} g^{\bar{\beta}\omega} = \Gamma^{*\ \varepsilon}_{\alpha\gamma}(\delta_\varepsilon^{\ \omega} - g_{\beta\varepsilon} g^{\beta\omega}) = \Gamma^{*\ \omega}_{\alpha\gamma}$ となるから

$$\Gamma^{*\ \omega}_{\alpha\gamma} = Z_\alpha g_{\bar{\varepsilon}\gamma} \cdot g^{\bar{\varepsilon}\omega}$$

となります。同様にして式 (7.28) より $\Gamma^{*\ \bar{\omega}}_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} = Z_{\bar{\alpha}} g_{\varepsilon\bar{\gamma}} \cdot g^{\varepsilon\bar{\omega}}$ が得られます。∇^* は捩れがないから $\Gamma^{*\ \bar{\omega}}_{\bar{\alpha}\gamma} = \Gamma^{*\ \bar{\omega}}_{\gamma\bar{\alpha}} = 0$, $\Gamma^{*\ \omega}_{\alpha\bar{\gamma}} = \Gamma^{*\ \omega}_{\bar{\gamma}\alpha} = 0$ だから式 (7.24) より $Z_\alpha g_{\beta\bar{\gamma}} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\ \varepsilon} g_{\varepsilon\bar{\gamma}}$ となり $Z_\alpha g_{\beta\bar{\gamma}} \cdot g^{\bar{\gamma}\omega} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\ \varepsilon} g_{\varepsilon\bar{\gamma}} g^{\bar{\gamma}\omega} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\ \varepsilon}(\delta_\varepsilon^{\ \omega} - g_{\varepsilon\gamma} g^{\gamma\omega}) = \Gamma_{\alpha\beta}^{\ \omega}$. ゆえに

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\ \omega} = Z_\alpha g_{\beta\bar{\varepsilon}} \cdot g^{\bar{\varepsilon}\omega}$$

となります。同様にして式 (7.29) より $\Gamma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\ \bar{\omega}} = Z_{\bar{\alpha}} g_{\bar{\beta}\varepsilon} \cdot g^{\varepsilon\bar{\omega}}$ が得られます。これより $\Gamma_{AB}^{\ C} = \Gamma^{*\ C}_{AB}$ となるから

定理 7.1． Kähler-like 統計多様体 (M^{2n}, g, ∇, J) において，$J = J^*$ ならば $\nabla = \nabla^*$ である。

次に ∇ 及び ∇^* は捩れがないからそれぞれ

(7.31) $$Z_\alpha g_{\beta\gamma} - Z_\beta g_{\alpha\gamma} = \Gamma^{*\ \varepsilon}_{\alpha\gamma} g_{\beta\varepsilon} + \Gamma^{*\ \bar\varepsilon}_{\alpha\gamma} g_{\beta\bar\varepsilon} - \Gamma^{*\ \varepsilon}_{\beta\gamma} g_{\alpha\varepsilon} - \Gamma^{*\ \bar\varepsilon}_{\beta\gamma} g_{\alpha\bar\varepsilon},$$

(7.32) $$Z_\alpha g_{\beta\gamma} - Z_\gamma g_{\beta\alpha} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\ \ \varepsilon} g_{\varepsilon\gamma} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\ \ \varepsilon} g_{\varepsilon\alpha},$$

(7.33) $$Z_\alpha g_{\beta\bar\gamma} - Z_\beta g_{\alpha\bar\gamma} = \Gamma^{*\ \varepsilon}_{\alpha\bar\gamma} g_{\beta\varepsilon} + \Gamma^{*\ \bar\varepsilon}_{\alpha\bar\gamma} g_{\beta\bar\varepsilon} - \Gamma^{*\ \varepsilon}_{\beta\bar\gamma} g_{\alpha\varepsilon} - \Gamma^{*\ \bar\varepsilon}_{\beta\bar\gamma} g_{\alpha\bar\varepsilon},$$

(7.34) $$Z_\alpha g_{\beta\bar\gamma} - Z_{\bar\gamma} g_{\beta\alpha} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\ \ \varepsilon} g_{\varepsilon\bar\gamma},$$

(7.35) $$Z_\alpha g_{\bar\beta\gamma} - Z_\gamma g_{\bar\beta\alpha} = 0,$$

(7.36) $$Z_{\bar\gamma} g_{\bar\beta\alpha} - Z_\alpha g_{\bar\beta\bar\gamma} = \Gamma_{\bar\gamma\bar\beta}^{\ \ \bar\varepsilon} g_{\bar\varepsilon\alpha},$$

(7.37) $$Z_{\bar\alpha} g_{\beta\bar\gamma} - Z_{\bar\gamma} g_{\beta\bar\alpha} = 0,$$

(7.38) $$Z_{\bar\alpha} g_{\bar\beta\gamma} - Z_{\bar\beta} g_{\bar\alpha\gamma} = \Gamma^{*\ \varepsilon}_{\bar\alpha\gamma} g_{\bar\beta\varepsilon} + \Gamma^{*\ \bar\varepsilon}_{\bar\alpha\gamma} g_{\bar\beta\bar\varepsilon} - \Gamma^{*\ \varepsilon}_{\bar\beta\gamma} g_{\bar\alpha\varepsilon} - \Gamma^{*\ \bar\varepsilon}_{\bar\beta\gamma} g_{\bar\alpha\bar\varepsilon},$$

(7.39) $$Z_{\bar\alpha} g_{\bar\beta\bar\gamma} - Z_{\bar\beta} g_{\bar\alpha\bar\gamma} = \Gamma^{*\ \varepsilon}_{\bar\alpha\bar\gamma} g_{\bar\beta\varepsilon} + \Gamma^{*\ \bar\varepsilon}_{\bar\alpha\bar\gamma} g_{\bar\beta\bar\varepsilon} - \Gamma^{*\ \varepsilon}_{\bar\beta\bar\gamma} g_{\bar\alpha\varepsilon} - \Gamma^{*\ \bar\varepsilon}_{\bar\beta\bar\gamma} g_{\bar\alpha\bar\varepsilon},$$

(7.40) $$Z_{\bar\alpha} g_{\bar\beta\bar\gamma} - Z_{\bar\gamma} g_{\bar\beta\bar\alpha} = \Gamma_{\bar\alpha\bar\beta}^{\ \ \bar\varepsilon} g_{\bar\varepsilon\bar\gamma} - \Gamma_{\bar\gamma\bar\beta}^{\ \ \bar\varepsilon} g_{\bar\varepsilon\bar\alpha}$$

が得られます。

補題 7.2. 概複素構造 J^* が共役接続 ∇^* に関して平行であるための必要十分条件は

(7.41) $$Z_\alpha g^{\bar\sigma\omega} + g^{\bar\sigma\varepsilon}\Gamma^{*\ \omega}_{\alpha\varepsilon} + g^{\bar\sigma\bar\varepsilon}\Gamma^{*\ \omega}_{\alpha\bar\varepsilon} = 0,$$

(7.42) $$Z_\alpha g^{\bar\sigma\bar\omega} + g^{\bar\sigma\varepsilon}\Gamma^{*\ \bar\omega}_{\alpha\varepsilon} + g^{\bar\sigma\bar\varepsilon}\Gamma^{*\ \bar\omega}_{\alpha\bar\varepsilon} = 0,$$

(7.43) $$Z_{\bar\alpha} g^{\sigma\omega} + g^{\sigma\varepsilon}\Gamma^{*\ \omega}_{\bar\alpha\varepsilon} + g^{\sigma\bar\varepsilon}\Gamma^{*\ \omega}_{\bar\alpha\bar\varepsilon} = 0,$$

(7.44) $$Z_{\bar\alpha} g^{\sigma\bar\omega} + g^{\sigma\varepsilon}\Gamma^{*\ \bar\omega}_{\bar\alpha\varepsilon} + g^{\sigma\bar\varepsilon}\Gamma^{*\ \bar\omega}_{\bar\alpha\bar\varepsilon} = 0.$$

次に，Nijenhuis テンソル

$$N(X,Y) = [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] - [X, Y],$$

$$N^*(X,Y) = [J^*X, J^*Y] - J^*[X, J^*Y] - J^*[J^*X, Y] - [X, Y]$$

は Kähler-like 統計多様体において $N(X,Y) = 0,\ N^*(X,Y) = 0$ です。

8 曲率テンソル

アファイン接続 ∇ に関する曲率テンソルを

$$R_{ABC}^{\ \ \ \ D} = Z_A\Gamma_{BC}^{\ \ \ D} - Z_B\Gamma_{AC}^{\ \ \ D} + \Gamma_{BC}^{\ \ \ E}\Gamma_{AE}^{\ \ \ D} - \Gamma_{AC}^{\ \ \ E}\Gamma_{BE}^{\ \ \ D}$$

とすると

$$\begin{aligned} R_{AB\gamma}^{\ \ \ \ \bar\delta} &= Z_A\Gamma_{B\gamma}^{\ \ \ \bar\delta} - Z_B\Gamma_{A\gamma}^{\ \ \ \bar\delta} + \Gamma_{B\gamma}^{\ \ \ E}\Gamma_{AE}^{\ \ \ \bar\delta} - \Gamma_{A\gamma}^{\ \ \ E}\Gamma_{BE}^{\ \ \ \bar\delta} \\ &= \Gamma_{B\gamma}^{\ \ \ \varepsilon}\Gamma_{A\varepsilon}^{\ \ \ \bar\delta} + \Gamma_{B\gamma}^{\ \ \ \bar\varepsilon}\Gamma_{A\bar\varepsilon}^{\ \ \ \bar\delta} - \Gamma_{A\gamma}^{\ \ \ \varepsilon}\Gamma_{B\varepsilon}^{\ \ \ \bar\delta} - \Gamma_{A\gamma}^{\ \ \ \bar\varepsilon}\Gamma_{B\bar\varepsilon}^{\ \ \ \bar\delta} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{AB\bar\gamma}^{\ \ \ \ \delta} &= Z_A\Gamma_{B\bar\gamma}^{\ \ \ \delta} - Z_B\Gamma_{A\bar\gamma}^{\ \ \ \delta} + \Gamma_{B\bar\gamma}^{\ \ \ E}\Gamma_{AE}^{\ \ \ \delta} - \Gamma_{A\bar\gamma}^{\ \ \ E}\Gamma_{BE}^{\ \ \ \delta} \\ &= \Gamma_{B\bar\gamma}^{\ \ \ \varepsilon}\Gamma_{A\varepsilon}^{\ \ \ \delta} + \Gamma_{B\bar\gamma}^{\ \ \ \bar\varepsilon}\Gamma_{A\bar\varepsilon}^{\ \ \ \delta} - \Gamma_{A\bar\gamma}^{\ \ \ \varepsilon}\Gamma_{B\varepsilon}^{\ \ \ \delta} - \Gamma_{A\bar\gamma}^{\ \ \ \bar\varepsilon}\Gamma_{B\bar\varepsilon}^{\ \ \ \delta} = 0. \end{aligned}$$

同様に

$$
\begin{aligned}
R_{AB\gamma}{}^{\delta} &= Z_A\Gamma_{B\gamma}^{\delta} - Z_B\Gamma_{A\gamma}^{\delta} + \Gamma_{B\gamma}^{E}\Gamma_{AE}^{\delta} - \Gamma_{A\gamma}^{E}\Gamma_{BE}^{\delta}\\
&= Z_A\Gamma_{B\gamma}^{\delta} - Z_B\Gamma_{A\gamma}^{\delta} + \Gamma_{B\gamma}^{\varepsilon}\Gamma_{A\varepsilon}^{\delta} + \Gamma_{B\gamma}^{\bar\varepsilon}\Gamma_{A\bar\varepsilon}^{\delta} - \Gamma_{A\gamma}^{\varepsilon}\Gamma_{B\varepsilon}^{\delta} - \Gamma_{A\gamma}^{\bar\varepsilon}\Gamma_{B\bar\varepsilon}^{\delta}\\
&= Z_A\Gamma_{B\gamma}^{\delta} - Z_B\Gamma_{A\gamma}^{\delta} + \Gamma_{B\gamma}^{\varepsilon}\Gamma_{A\varepsilon}^{\delta} - \Gamma_{A\gamma}^{\varepsilon}\Gamma_{B\varepsilon}^{\delta},\\
R_{AB\bar\gamma}{}^{\bar\delta} &= Z_A\Gamma_{B\bar\gamma}^{\bar\delta} - Z_B\Gamma_{A\bar\gamma}^{\bar\delta} + \Gamma_{B\bar\gamma}^{E}\Gamma_{AE}^{\bar\delta} - \Gamma_{A\bar\gamma}^{E}\Gamma_{BE}^{\bar\delta}\\
&= Z_A\Gamma_{B\bar\gamma}^{\bar\delta} - Z_B\Gamma_{A\bar\gamma}^{\bar\delta} + \Gamma_{B\bar\gamma}^{\varepsilon}\Gamma_{A\varepsilon}^{\bar\delta} + \Gamma_{B\bar\gamma}^{\bar\varepsilon}\Gamma_{A\bar\varepsilon}^{\bar\delta} - \Gamma_{A\bar\gamma}^{\varepsilon}\Gamma_{B\varepsilon}^{\bar\delta} - \Gamma_{A\bar\gamma}^{\bar\varepsilon}\Gamma_{B\bar\varepsilon}^{\bar\delta}\\
&= Z_A\Gamma_{B\bar\gamma}^{\bar\delta} - Z_B\Gamma_{A\bar\gamma}^{\bar\delta} + \Gamma_{B\bar\gamma}^{\bar\varepsilon}\Gamma_{A\bar\varepsilon}^{\bar\delta} - \Gamma_{A\bar\gamma}^{\bar\varepsilon}\Gamma_{B\bar\varepsilon}^{\bar\delta}
\end{aligned}
$$

となるので

補題 8.1． アファイン接続 ∇ に関する曲率テンソル R は

(8.1) $$R_{AB\gamma}{}^{\bar\delta} = 0,$$

(8.2) $$R_{AB\bar\gamma}{}^{\delta} = 0,$$

(8.3) $$R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = Z_\alpha\Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} - Z_\beta\Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\varepsilon}\Gamma_{\alpha\varepsilon}^{\delta} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\varepsilon}\Gamma_{\beta\varepsilon}^{\delta},$$

(8.4) $$R_{\bar\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = Z_{\bar\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}^{\delta},$$

(8.5) $$R_{\bar\alpha\bar\beta\gamma}{}^{\delta} = 0,$$

(8.6) $$R_{\alpha\beta\bar\gamma}{}^{\bar\delta} = 0,$$

(8.7) $$R_{\alpha\bar\beta\bar\gamma}{}^{\bar\delta} = Z_\alpha\Gamma_{\bar\beta\bar\gamma}^{\bar\delta},$$

(8.8) $$R_{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma}{}^{\bar\delta} = Z_{\bar\alpha}\Gamma_{\bar\beta\bar\gamma}^{\bar\delta} - Z_{\bar\beta}\Gamma_{\bar\alpha\bar\gamma}^{\bar\delta} + \Gamma_{\bar\beta\bar\gamma}^{\bar\varepsilon}\Gamma_{\bar\alpha\bar\varepsilon}^{\bar\delta} - \Gamma_{\bar\alpha\bar\gamma}^{\bar\varepsilon}\Gamma_{\bar\beta\bar\varepsilon}^{\bar\delta}.$$

補題 8.2． アファイン接続 ∇ に関するリッチテンソル Ric は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_{\alpha\beta} &= R_{\varepsilon\alpha\beta}{}^{\varepsilon},\\
\mathrm{Ric}_{\alpha\bar\beta} &= R_{\bar\varepsilon\alpha\bar\beta}{}^{\bar\varepsilon} = -Z_\alpha\Gamma_{\bar\varepsilon\bar\beta}^{\bar\varepsilon},\\
\mathrm{Ric}_{\bar\alpha\beta} &= R_{\varepsilon\bar\alpha\beta}{}^{\varepsilon} = -Z_{\bar\alpha}\Gamma_{\varepsilon\beta}^{\varepsilon},\\
\mathrm{Ric}_{\bar\alpha\bar\beta} &= R_{\bar\varepsilon\bar\alpha\bar\beta}{}^{\bar\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

また，$R_{ABCD} = g(R(Z_A, Z_B)Z_C, Z_D)$，$R^*_{ABCD} = g(R^*(Z_A, Z_B)Z_C, Z_D)$ とおくと (2.2) より $R^*_{ABCD} = -R_{ABDC}$ だから

(8.9) $$R^*_{ABC}{}^{D} = -R_{ABE}{}^{F}g_{FC}g^{ED}$$

となります。これより

補題 8.3． アファイン接続 ∇^* に関する曲率テンソル R^* は

$$
\begin{aligned}
R^*_{\alpha\beta C}{}^{D} &= -R_{\alpha\beta\varepsilon}{}^{\omega}g_{\omega C}g^{\varepsilon D},\\
R^*_{\alpha\bar\beta C}{}^{D} &= Z_{\bar\beta}\Gamma_{\alpha\varepsilon}^{\omega}\cdot g_{\omega C}g^{\varepsilon D} - Z_\alpha\Gamma_{\bar\beta\bar\varepsilon}^{\bar\omega}\cdot g_{\bar\omega C}g^{\bar\varepsilon D},\\
R^*_{\bar\alpha\bar\beta C}{}^{D} &= -R_{\bar\alpha\bar\beta\bar\varepsilon}{}^{\bar\omega}g_{\bar\omega C}g^{\bar\varepsilon D}.
\end{aligned}
$$

共役接続 ∇^* に関するリッチテンソル Ric^* を $\mathrm{Ric}^*_{AB} = R^*_{DAB}{}^D = R^*_{DABE}g^{ED}$ とおくと

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}^*_{AB} &= R^*_{DABE}g^{DE} = -(R^*_{ABDE} + R^*_{BDAE})g^{DE} = R_{ABED}g^{ED} + R^*_{DBAE}g^{DE} \\ &= -(R_{BEAD} + R_{EABD})g^{ED} + \mathrm{Ric}^*_{BA} = \mathrm{Ric}_{BA} - \mathrm{Ric}_{AB} + \mathrm{Ric}^*_{BA}\end{aligned}$$

だから

$$\mathrm{Ric}_{AB} - \mathrm{Ric}_{BA} = -\mathrm{Ric}^*_{AB} + \mathrm{Ric}^*_{BA}$$

です。これより

補題 8.4. アファイン接続 ∇ に関するリッチテンソル Ric が対称であることと共役接続 ∇^* に関するリッチテンソル Ric^* が対称であることは同値である。

補題 8.5. 共役接続 ∇^* に関するリッチテンソル Ric^* は次に与えられる：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}^*_{\alpha\beta} &= -R_{\varepsilon\alpha\sigma}{}^{\omega}g_{\omega\beta}g^{\sigma\varepsilon} - Z_{\bar\varepsilon}\Gamma_{\alpha\sigma}{}^{\omega}\cdot g_{\omega\beta}g^{\sigma\bar\varepsilon} + Z_{\alpha}\Gamma_{\bar\varepsilon\bar\sigma}{}^{\bar\omega}\cdot g_{\bar\omega\beta}g^{\bar\sigma\bar\varepsilon}, \\
\mathrm{Ric}^*_{\alpha\bar\beta} &= -R_{\varepsilon\alpha\sigma}{}^{\omega}g_{\omega\bar\beta}g^{\sigma\varepsilon} - Z_{\bar\varepsilon}\Gamma_{\alpha\sigma}{}^{\omega}\cdot g_{\omega\bar\beta}g^{\sigma\bar\varepsilon} + Z_{\alpha}\Gamma_{\bar\varepsilon\bar\sigma}{}^{\bar\omega}\cdot g_{\bar\omega\bar\beta}g^{\bar\sigma\bar\varepsilon}, \\
\mathrm{Ric}^*_{\bar\alpha\beta} &= Z_{\bar\alpha}\Gamma_{\varepsilon\sigma}{}^{\omega}\cdot g_{\omega\beta}g^{\sigma\varepsilon} - Z_{\varepsilon}\Gamma_{\bar\alpha\bar\sigma}{}^{\bar\omega}\cdot g_{\bar\omega\beta}g^{\bar\sigma\varepsilon} - R_{\bar\varepsilon\bar\alpha\bar\sigma}{}^{\bar\omega}g_{\bar\omega\beta}g^{\bar\sigma\bar\varepsilon}, \\
\mathrm{Ric}^*_{\bar\alpha\bar\beta} &= Z_{\bar\alpha}\Gamma_{\varepsilon\sigma}{}^{\omega}\cdot g_{\omega\bar\beta}g^{\sigma\varepsilon} - Z_{\varepsilon}\Gamma_{\bar\alpha\bar\sigma}{}^{\bar\omega}\cdot g_{\bar\omega\bar\beta}g^{\bar\sigma\varepsilon} - R_{\bar\varepsilon\bar\alpha\bar\sigma}{}^{\bar\omega}g_{\bar\omega\bar\beta}g^{\bar\sigma\bar\varepsilon}.
\end{aligned}$$

スカラー曲率を $r = \mathrm{Ric}_{AB}g^{AB}$, $r^* = \mathrm{Ric}^*_{AB}g^{AB}$ とすると，$r = \mathrm{Ric}_{AB}g^{AB} = R_{DABE}g^{DE}g^{AB} = R^*_{ADEB}g^{AB}g^{DE} = \mathrm{Ric}^*_{DE}g^{DE} = r^*$ から

補題 8.6. $r = r^*$ である。

9　ある条件を満たす Kähler-like 統計多様体

次に，Kähler-like 統計多様体 (M, g, ∇, J) のアファイン接続 ∇ に関する曲率テンソル R が次のような場合を考えます：

$$R(\partial_A, \partial_B)\partial_C = \frac{c}{4}[\, g(\partial_B, \partial_C)\partial_A - g(\partial_A, \partial_C)\partial_B - g(\partial_B, J\partial_C)J\partial_A + g(\partial_A, J\partial_C)J\partial_B + \{g(\partial_A, J\partial_B) - g(J\partial_A, \partial_B)\}J\partial_C\,]. \tag{9.1}$$

注意. 共役接続 ∇^* に関する曲率テンソル R^* は式 (9.1) において J を J^* に置き換えたものになります。

定理 7.1 より

補題 9.1. 式 (9.1) を満たす Kähler-like 統計多様体 (M, g, ∇, J) において，$J = J^*$ ならば (M, g, ∇, J) は正則断面曲率 c の空間である。

式 (9.1) より曲率テンソルの成分で 0 以外のものは

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = \frac{c}{2}(g_{\beta\gamma}\delta_{\alpha}{}^{\delta} - g_{\alpha\gamma}\delta_{\beta}{}^{\delta}), \tag{9.2}$$

$$R_{\alpha\bar\beta\gamma}{}^{\delta} = \frac{c}{2}(g_{\bar\beta\gamma}\delta_{\alpha}{}^{\delta} + g_{\alpha\bar\beta}\delta_{\gamma}{}^{\delta}), \tag{9.3}$$

$$R_{\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}}{}^{\bar{\delta}} = -\frac{c}{2}(g_{\alpha\bar{\gamma}}\delta_{\bar{\beta}}^{\bar{\delta}} + g_{\alpha\bar{\beta}}\delta_{\bar{\gamma}}^{\bar{\delta}}), \tag{9.4}$$

$$R_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}{}^{\bar{\delta}} = \frac{c}{2}(g_{\bar{\beta}\bar{\gamma}}\delta_{\bar{\alpha}}^{\bar{\delta}} - g_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}\delta_{\bar{\beta}}^{\bar{\delta}}) \tag{9.5}$$

です。式 (8.4) 及び (8.7) より

$$Z_{\bar{\beta}}\Gamma_{\alpha\gamma}{}^{\delta} = -\frac{c}{2}(g_{\bar{\beta}\gamma}\delta_{\alpha}^{\delta} + g_{\bar{\beta}\alpha}\delta_{\gamma}^{\delta}), \tag{9.6}$$

$$Z_{\alpha}\Gamma_{\bar{\beta}\bar{\gamma}}{}^{\bar{\delta}} = -\frac{c}{2}(g_{\alpha\bar{\gamma}}\delta_{\bar{\beta}}^{\bar{\delta}} + g_{\alpha\bar{\beta}}\delta_{\bar{\gamma}}^{\bar{\delta}}) \tag{9.7}$$

となります。また補題 8.2 より

$$\mathrm{Ric}_{\beta\gamma} = \frac{c}{2}(n-1)g_{\beta\gamma}, \tag{9.8}$$

$$\mathrm{Ric}_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{c}{2}(n+1)g_{\alpha\bar{\beta}}, \tag{9.9}$$

$$\mathrm{Ric}_{\bar{\alpha}\beta} = \frac{c}{2}(n+1)g_{\bar{\alpha}\beta}, \tag{9.10}$$

$$\mathrm{Ric}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} = \frac{c}{2}(n-1)g_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} \tag{9.11}$$

が得られます。これより

補題 9.2. 式 (9.1) を満たす Kähler-like 統計多様体においてリッチテンソルは対称である。

次に，アファイン接続 ∇ に関するスカラー曲率 r は次のように与えられます：

$$r = c\{n(n+1) - 2g_{\varepsilon\omega}g^{\varepsilon\omega}\}. \tag{9.12}$$

補題 8.5，式 (9.2), (9.5)∼(9.7) より共役接続 ∇^* に関するリッチテンソル Ric^* の成分は

$$\mathrm{Ric}^*_{\alpha\beta} = \frac{c}{2}\{(n-1)g_{\alpha\beta} - 4g_{\alpha\bar{\varepsilon}}g_{\beta\bar{\omega}}g^{\bar{\varepsilon}\bar{\omega}}\}, \tag{9.13}$$

$$\mathrm{Ric}^*_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{c}{2}\{(n+1)g_{\alpha\bar{\beta}} - 4g_{\alpha\varepsilon}g_{\bar{\beta}\omega}g^{\varepsilon\omega}\}, \tag{9.14}$$

$$\mathrm{Ric}^*_{\bar{\alpha}\beta} = \frac{c}{2}\{(n+1)g_{\bar{\alpha}\beta} - 4g_{\bar{\alpha}\varepsilon}g_{\beta\omega}g^{\varepsilon\omega}\}, \tag{9.15}$$

$$\mathrm{Ric}^*_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \frac{c}{2}\{(n-1)g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} - 4g_{\bar{\alpha}\varepsilon}g_{\bar{\beta}\omega}g^{\varepsilon\omega}\} \tag{9.16}$$

となります。また，共役接続 ∇^* に関するスカラー曲率 r^* は

$$r^* = c\{n(n+1) - 6g_{\varepsilon\omega}g^{\varepsilon\omega} + 4g_{\alpha\varepsilon}g_{\beta\omega}g^{\alpha\beta}g^{\varepsilon\omega}\} \tag{9.17}$$

となります。これより

$$r - r^* = 4c(g_{\varepsilon\omega}g^{\varepsilon\omega} - g_{\alpha\varepsilon}g_{\beta\omega}g^{\alpha\beta}g^{\varepsilon\omega}). \tag{9.18}$$

補題 8.6 から

補題 9.3. 式 (9.1) を満たす Kähler-like 統計多様体において $c = 0$ または $g_{\varepsilon\omega}g^{\varepsilon\omega} - g_{\alpha\varepsilon}g_{\beta\omega}g^{\alpha\beta}g^{\varepsilon\omega} = 0$ $(g_{\bar{\varepsilon}\bar{\omega}}g^{\bar{\varepsilon}\bar{\omega}} - g_{\bar{\alpha}\bar{\varepsilon}}g_{\bar{\beta}\bar{\omega}}g^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}g^{\bar{\varepsilon}\bar{\omega}} = 0)$ である。

注意． $A=(g_{\alpha\beta})$, $B=(g^{\alpha\beta})$ とすると

$$
\begin{aligned}
g_{\varepsilon\omega}g^{\varepsilon\omega}-g_{\alpha\varepsilon}g_{\beta\omega}g^{\alpha\beta}g^{\varepsilon\omega}=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{tr}\,(AB)-\mathrm{tr}\,(AB)^2=0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathrm{tr}\,(E-AB)^2=\mathrm{tr}\,(E-AB)
\end{aligned}
$$

です。但し，E は単位行列です。

参 考 文 献

[1] S. Amari, *Differential-Geometrical Methods in Statistics*, Lecture Notes in Statistics, **28** Springer-Verlag, 1985.

[2] S. Amari and H. Nagaoka, *Methods of Information Geometry*, AMS & Oxford University Press, 2000.

[3] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* , John Wiley & Sons, 1969.

[4] M. Noguchi, *Geometry of statistical manifolds*, Differential Geom. Appl., **2** (1992), 197–222.

[5] K. Nomizu and T. Sasaki, *Affine Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

[6] K. Takano, *Statistical manifolds with almost complex structures and its statistical submersions*, Tensor N. S., **65** (2004), 128–142.

[7] ―――――, *Examples of the statistical submersion on the statistical model*, Tensor N. S., **65** (2004), 170–178.

[8] ―――――, *Statistical manifolds with almost contact structures and its statistical submersions*, J. Geom., **85** (2006), 171–187.

[9] ―――――, *Geodesics on statistical models of the multivariate normal distribution*, Tensor N. S., **67** (2006), 162–169.

[10] ―――――, *Examples of statistical manifolds with almost complex structures*, Tensor N. S., **69** (2008), 58–66.

[11] ―――――, *Exponential families admitting almost complex structures*, SUT J. Math., **46** (2010), 1–21.

[12] K. Yano and M. Kon, *Structures on Manifolds*, World Scientific, 1984.

[13] 甘利俊一，長岡浩司；情報幾何の方法，岩波書店，1993.

[14] 松島与三；多様体入門，裳華房，1991.