

リーマン面の退化現象 1 (これまでのこと)

松本幸夫

学習院大学理学部

(第3回 札幌・福岡 幾何学セミナー)

Feb. 15, 2009

START

→

リーマン面の退化とは

M : 複素多様体 ($\dim_{\mathbb{C}} M = 2$)

Δ : 複素数平面上の単位開円板
($\Delta = \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi| < 1\}$)

$\phi : M \rightarrow \Delta$: 固有で正則な全射

条件 :

$\phi : M \rightarrow \Delta$ の臨界値は $0 \in \Delta$ のみ

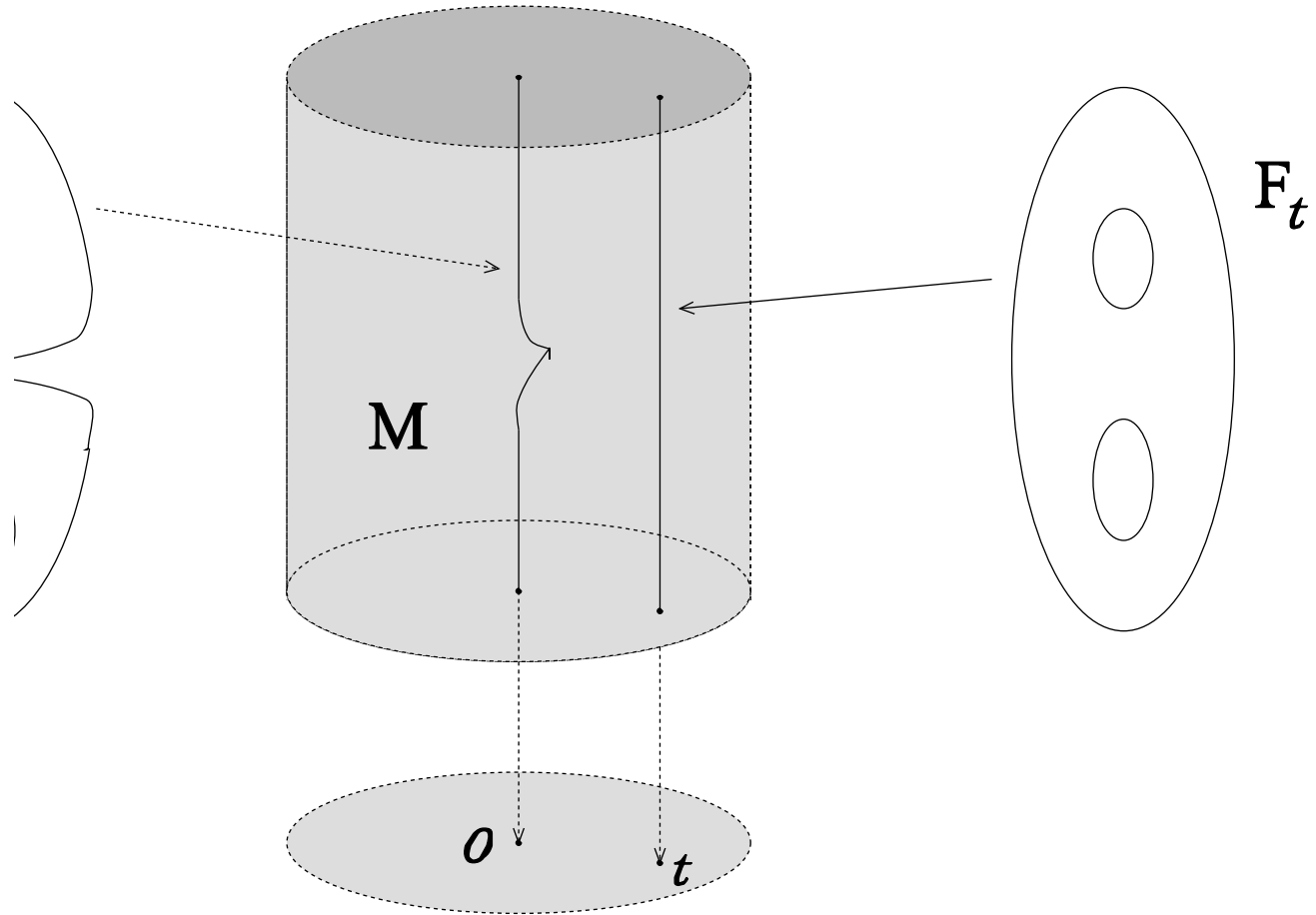
$\phi : M \rightarrow \Delta$ の特異ファイバーは $F_0 = \phi^{-1}(0)$ のみ

$\phi|_{(M - \phi^{-1}(0))} : M - \phi^{-1}(0) \rightarrow \Delta - \{0\}$

は C^∞ 級のファイバー・バンドル

一般ファイバー F_t は Σ_g (種数 g の閉リーマン面)

種数 g の退化



中心の「特異ファイバー」 F_0 の形に興味

種数 $g = 1$ の場合; 小平の分類 (Ann. Math. 1963) \longrightarrow 全部で 9 種類 (Extended Dynkin diagrams)

種数 $g = 2$ の場合; 浪川・上野の分類 (Manuscripta Math. 1973) \longrightarrow 全部で約 120 種類 (東大数学教室談話会)

種数 $g = 3$ の場合 上松 (J.Math.Kyoto U. 1999), 足利・石坂の分類 (Tohoku Math. 2002) \longrightarrow 全部で約 1600 種 (後述の定理を使う)

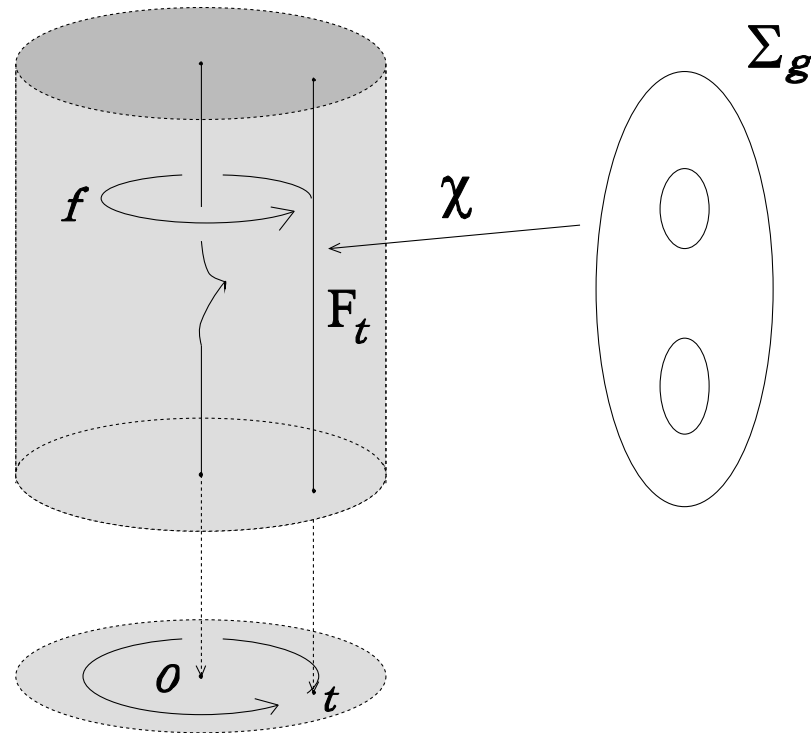
問題意識

更に大きな種数 g について特異ファイバーの形を数え上げるのではなく …(たぶん不可能)

いろいろな形の特異ファイバーが現れる理由を見つけたい

モンテシノス (José María Montesinos-Amilibia, マドリード・コンプルテンセ大学) のアイデア → 特異ファイバーの周りの「位相的モノドロミー」との対応関係で考える (1988) !!

位相的モノドロミーとは



$$f : F_t \rightarrow F_t$$

この（向きを保つ）同相写像 f が
 F_0 の周りの位相的モノドロミー

位相的モノドロミーの Notation

F_t の $t \in \Delta$ は止めておく。(例: $t = \frac{1}{2}$)

F_t と「標準的閉曲面」 Σ_g との間の同相写像

$$\chi : \Sigma_g \rightarrow F_t$$

を選んでおく。

$\chi^{-1} \circ f \circ \chi : \Sigma_g \xrightarrow{\chi} F_t \xrightarrow{f} F_t \xrightarrow{\chi^{-1}} \Sigma_g$ のことを位相的モノドロミーと考えることができる

簡単に、位相的モノドロミー $f : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ と記す

位相的モノドロミー $f : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$

の Ambiguity

$\chi : \Sigma_g \rightarrow F_t$ を止めておく。このとき, $f : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ は **アイソトピーを除いて** 決まる。

i.e. 写像類群 Γ_g の元 $[f]$ として決まる。

$\Gamma_g = \{f : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g \mid \text{向きを保つ同相写像}\} / \text{アイソトピー}$

$\chi : \Sigma_g \rightarrow F_t$ を別の $\chi' : \Sigma_g \rightarrow F_t$ に変えると, $[f]$ は **共役 (conjugate) な元** $[h]^{-1}[f][h]$ に変わる。

$$\chi'^{-1} f \chi' = \{\chi^{-1} \chi'\}^{-1} \chi^{-1} f \chi \{\chi^{-1} \chi'\}$$

$$h = \chi^{-1} \chi'$$

したがって，退化族 (M, ϕ, Δ) が与えられると

位相的モノドロミーは，

Γ_g の共役類集合

$$\hat{\Gamma}_g := \Gamma_g / \text{共役}$$

の元 $\langle f \rangle$ として決まる：

$$\begin{array}{ccc} \text{退化族} & & \text{位相的モノドロミー} \\ (M, \phi, \Delta) & \implies & \langle f \rangle \in \hat{\Gamma}_g \end{array}$$

位相的モノドロミーとして現れる同相写像

定理 (Imayoshi, Shiga-Tanigawa, Earle-Sipe) :
負型擬周期写像 (pseudo-periodic map of negative twist) に限る。

↓
(説明はあとで)

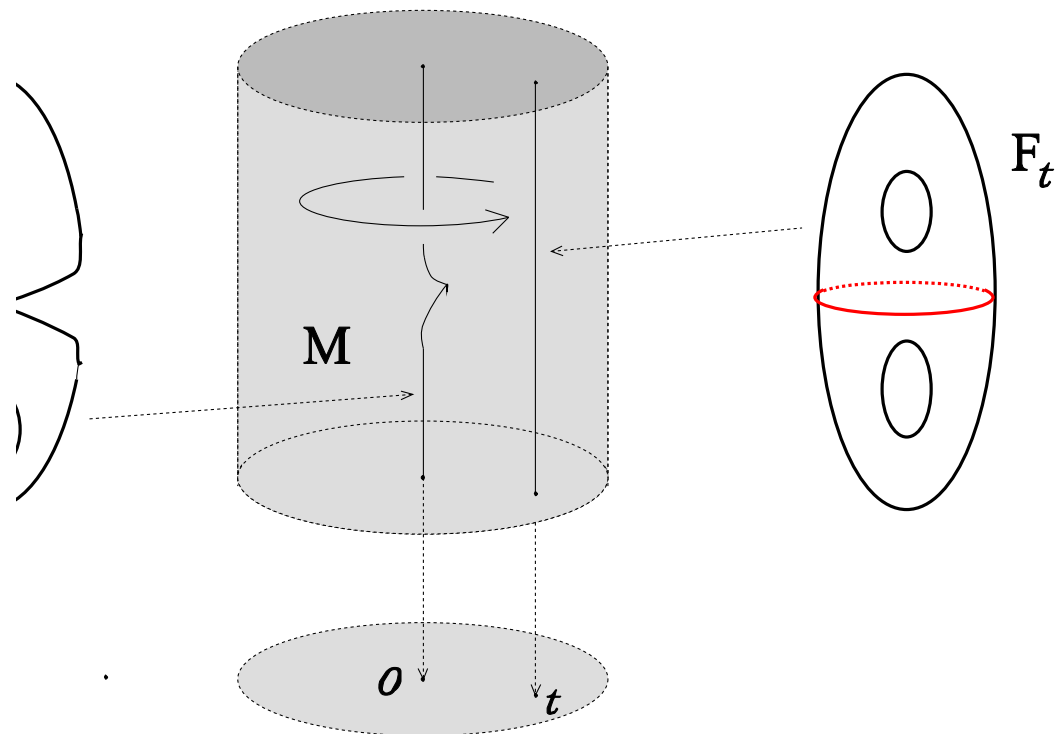
今吉 (Ann. Math. Studies, vol. 97. 1981)

志賀・谷川 (Kodai Math. J. vol.12. 1989)

C.J.Earle-P.L.Sipe (Pacific J. Math. vol. 150, 1991)

位相的モノドロミーの例 1

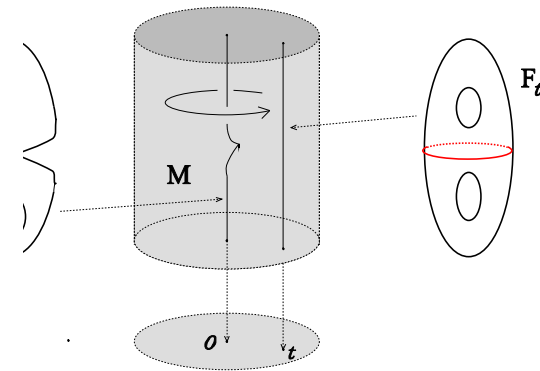
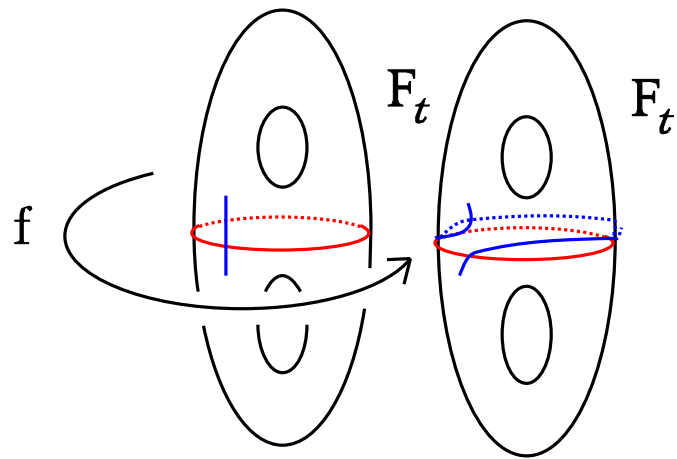
(Lefschetz型特異ファイバー)



F_t の赤い単純閉曲線は「消失サイクル」とよばれ、 $t \rightarrow 0$ のとき、特異点につぶれる。この場合の特異点は「ノード」

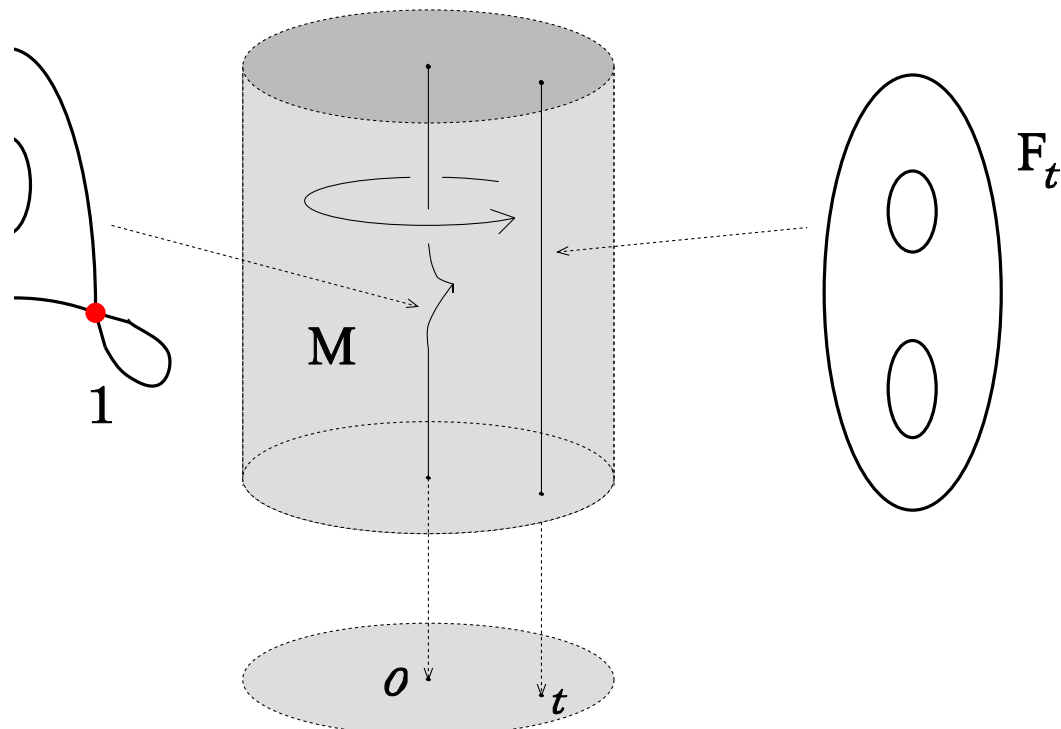
Lefschetz型特異ファイバーのモノドロミー

Picard-Lefschetzの定理：
位相的モノドロミーは消失サイクル
に沿う(-1)回のDehn twist



位相的モノドロミーの例 2

(「Periodicな」特異ファイバー)

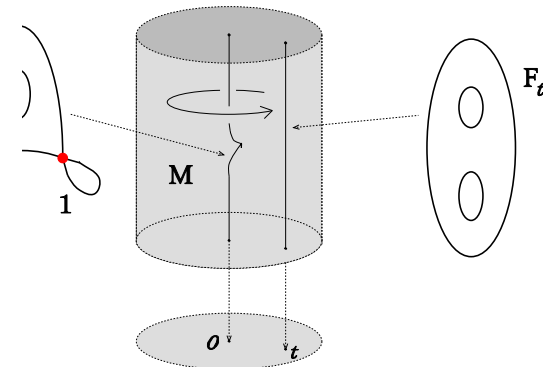
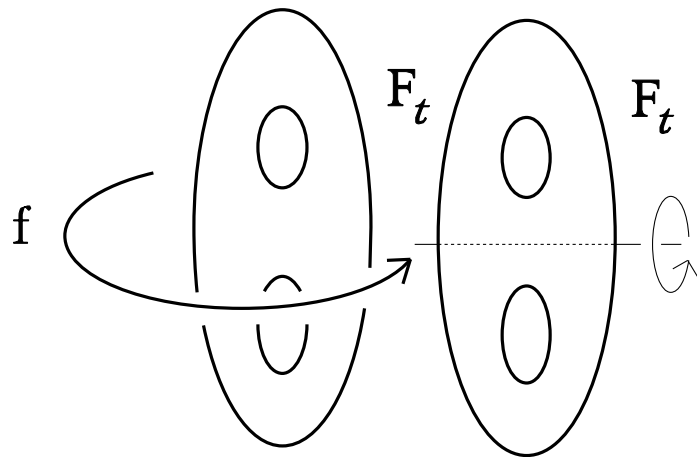


1 とか 2 は多重度 (multiplicity)

前スライドの

Periodic特異ファイバーのモノドロミー

位相的モノドロミーは図の軸のまわりの 180° 回転



曲面の同相写像のDynamics

Nielsen(1930')-Thurston(1980')の定理 :

S : コンパクト曲面 , $\chi(S) < 0$. $f : S \rightarrow S$:向きを保つ同相写像 $\implies f \simeq h$ であって , (i), (ii) or (iii)。

(i) (h : periodic) $\exists n > 0$ について $h^n = \text{identity}$

(ii) (h : pseudo-Anosov) 横断的に交わる「measured geodesic lamination」を全体として保ち , 一方の近傍を引き延ばし , 他方の近傍を縮める

(iii) (h : reducible) S の単純閉曲線の disjoint な有限集合 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_r\}$ があり , h は C_i の開正則近傍 $N(C_i)$ を置換する。しかも $\dots \longrightarrow$ つづく

(h : reducible) ... しかも, S_1, S_2, \dots, S_m を $S - \bigcup_{i=1}^r N(C_i)$ の連結成分とし, n_j を $h^{n_j}(S_j) = S_j$ となる最小の自然数とすると, $h^{n_j}|_{S_j}$ は

- (i) periodic または
- (ii) pseudo-Anosov.

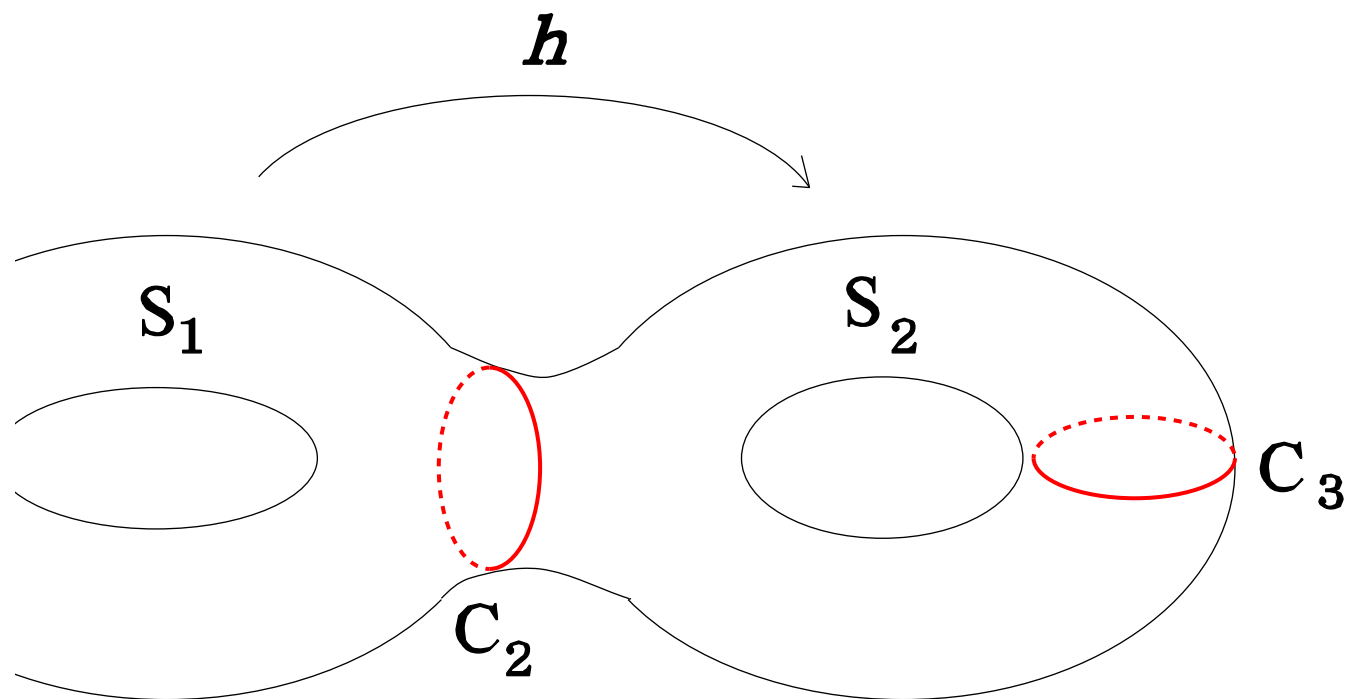
$\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_r\}$ を切断線集合という。

$h^{n_j} : S_j \rightarrow S_j$ を成分写像という。

$\forall j : \chi(S_j) < 0$ と仮定してよい。このとき, \mathcal{C} を **admissible** という。

Reducibleな $h : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ の例

$\{C_1, C_2, C_3\}$ が切断線集合



$h^2 : S_j \rightarrow S_j$: 成分写像

(定義)

擬周期写像 (pseudo-periodic map)

$f : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ は $f \simeq h$ であって,

- (i) h は periodic または
- (ii) h は reducible で, すべての成分写像が periodic

このとき, f も $[f]$ も擬周期的という。

(定義) スクリュー数 (Nielsen)

$f : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$: 擬周期写像。

$\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_r\}$: admissible な切断線集合

$\forall j \exists \alpha (> 0)$ s.t. $f^\alpha(\vec{C}_j) = \vec{C}_j$

$\exists L (> 0)$ s.t. f^L は C_j のまわりの整数回 (e 回) の Dehn twist. α も L も最小にとる。

このとき

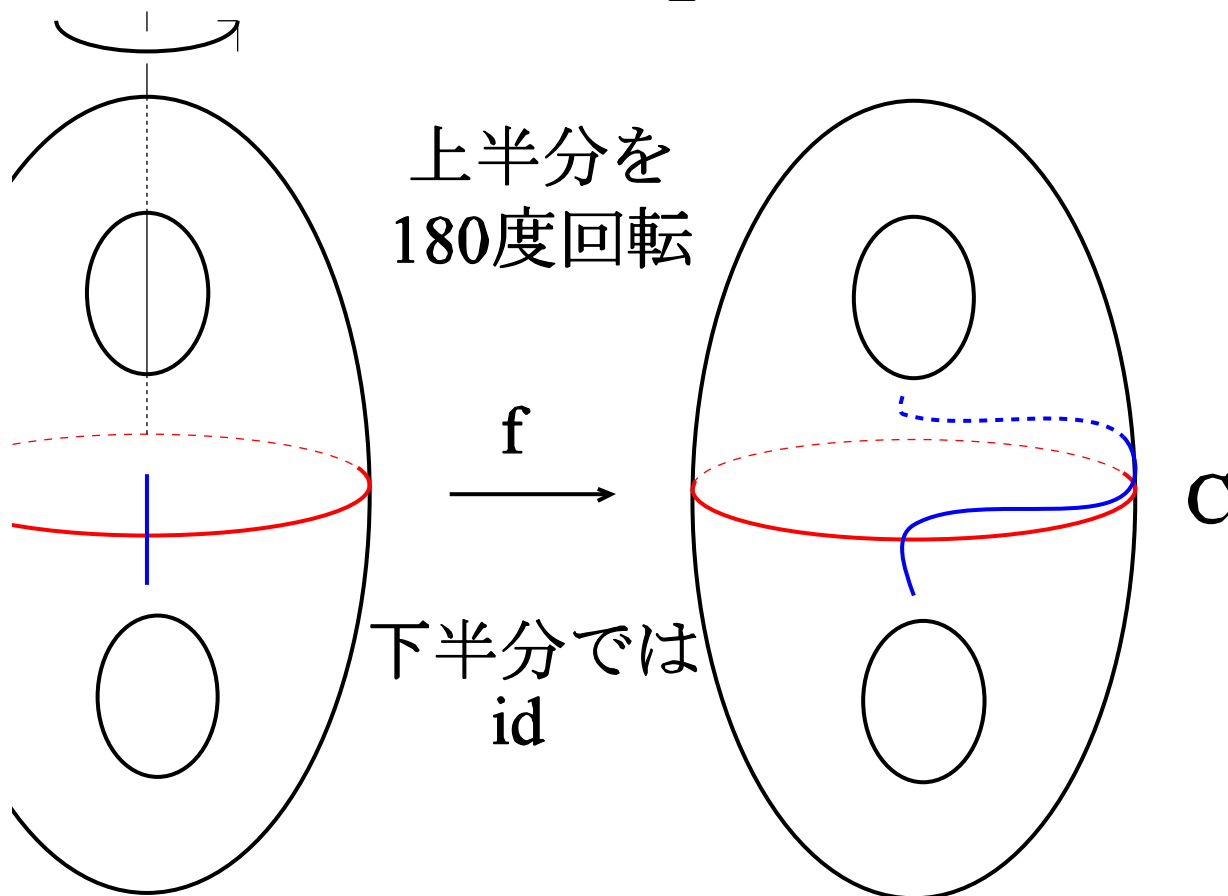
$$s(C_j) = \frac{e\alpha}{L} \in \mathbb{Q}$$

のことを C_j のまわりでの f の **スクリュー数 (screw number)** という。

i.e. $s(C_j)$ は f^α による C_j の周りの分数ねじれ。

スクリー数 の例

$$s(C) = -\frac{1}{2}$$



(定義)

負型擬周期写像

(Pseudo-periodic map
of negative twist) とは

擬周期写像であって,

その切断線集合を $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_r\}$ とするとき,

$\forall i$ について

$$s(C_i) < 0$$

であるようなもの。

主な結果

$$\mathcal{S}_g = \{ \text{極小特異ファイバー} \} / \sim^{TOP}$$
$$\mathcal{P}_g^- = \{ \langle \text{負型擬周期写像} \rangle \} \subset \hat{\Gamma}_g$$

定理 (Mat.-Montesinos 1991)

$g \geq 2$ のとき, 位相的モノドロム

$\exists -\rho : \mathcal{S}_g \rightarrow \mathcal{P}_g^-$ は全単射。

ここに

$$(M, \phi, \Delta) \sim^{TOP} (M', \phi', \Delta')$$

\iff

$\exists H, h$ s.t.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\text{homeo. } H} & M' \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi' \\ \Delta & \xrightarrow{\text{homeo. } h} & \Delta' \end{array}$$

証明のidea

モノドロミー写像

$$\rho : \mathcal{S}_g \rightarrow \mathcal{P}_g^-$$

の逆写像

$$\sigma : \mathcal{P}_g^- \rightarrow \mathcal{S}_g$$

を作る。

i.e. 与えられた負型擬周期写像 $f : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ に対し, f を位相的モノドロミーにもつ退化族 (M, ϕ, Δ) を構成する。

退化族の構成の概略 1

負型擬周期写像

$$f : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$$

が与えられたとき，

$$\Sigma_g = A \cup B$$

と分解する。

A : 切断線集合のアニュラス近傍の和集合

$B := \overline{\Sigma_g - A}$: この上で f は periodic

気分としては，特異ファイバー F_0 を

$$F_0 = A/f \cup B/f$$

のように作る（一般商空間）

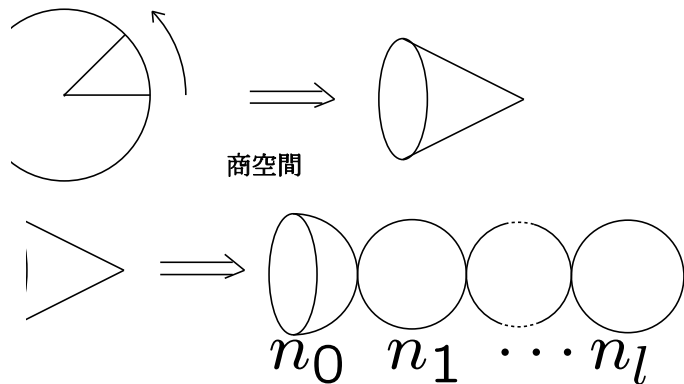
構成の概略 2 (periodic part)

B/f は通常の商空間

ただし, 固定点と

Isotropic point において,

バブルを取り出す。



固定点では $2\pi\delta/\lambda$ 回転と

する。 $0 < \delta < \lambda$

$\gcd(\lambda, \delta) = 1$

$\exists \sigma > 0, \sigma\delta \equiv 1(\lambda)$

$n_0 > n_1 > \dots > n_l = 1$

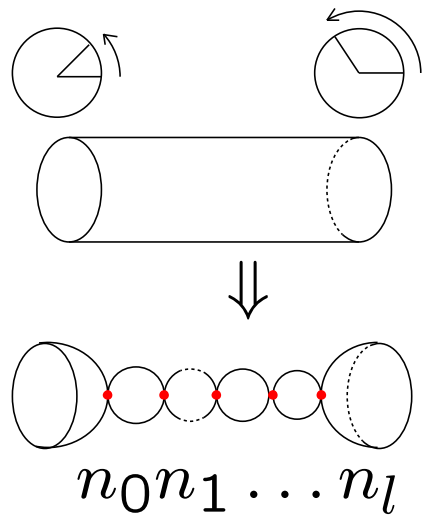
$n_0 = \lambda, n_1 = \lambda - \sigma$

$n_{i-1} + n_{i+1} \equiv 0 \pmod{n_i}$

(Euclid 互除法)

構成の概略 3 (annulus part)

Annulus part では $2\pi\delta^{(1)}/\lambda^{(1)}$ 回転と
 $2\pi\delta^{(2)}/\lambda^{(2)}$ 回転
 chorizo space を作る



$$n_0 = \lambda^{(1)}, n_l = \lambda^{(2)}$$

$$n_1 \equiv \sigma^{(1)}(\lambda^{(1)})$$

$$n_{l-1} \equiv \sigma^{(2)}(\lambda^{(2)})$$

$$n_{i-1} + n_{i+1} \equiv 0 \pmod{n_i}$$

$$(n_{i-1} + n_{i+1})/n_i \geq 2$$

上のアニュラスは
 $N(C)$ とする。

$$\sum_{i=0}^{l-1} \frac{1}{n_i n_{i+1}} = |s(C)|$$

構成の概略（最後）

以上の部品はうまく貼り合わさって「一般商空間」 F_0 ができる。

自然な射影 $\pi : \Sigma_g \rightarrow F_0$ がある。これの「写像柱(mapping cylinder)」を C_π とする。 C_π を「ページ」とし、 F_0 を「背表紙」とし、モノドロミーを f とする「open book」をつくったものが求める M である。

M には複素構造が入り、自然に射影 $\phi : M \rightarrow \Delta$ がきまる。モノドロミーは構成から f である。

End of slides. Click [END] to finish the presentation.

ありがとうございました



END

Bye

