

曲面論における Gauss 写像の役割

Masatoshi KOKUBU
Tokyo Denki University

February 16,17 2009

今日の目的：双曲型空間内の曲面に対する双曲的 Gauss 写像の基本事項 + 最近の話題の紹介

Menu

Part 2 双曲型空間編

双曲的 Gauss 写像の定義

双曲的 Gauss 写像

平坦波面

線形 Weingarten 曲面 (波面)

最近の話題から

Yu, Kawakami

Georgiou-Guilfoyle

Part 2; 双曲型空間編

双曲型空間 \mathbb{H}^3 : 単連結完備 3 次元 Riemann 多様体,
断面曲率一定 -1

双曲面モデル

$$L^4 = (\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_L), \quad \langle x, y \rangle_L = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3$$

$$\mathbb{H}^3 := \{x \in L^4; \langle x, x \rangle_L = -1, x^0 > 0\}$$

関連して

$$S_1^3 := \{x \in L^4; \langle x, x \rangle_L = 1\} \text{ de Sitter 空間}$$

$$LC_+ := \{x \in L^4; \langle x, x \rangle_L = 0, x^0 > 0\} \text{ 光錐}$$

$$S_\infty^2 = LC_+ / \sim \text{ ここで } x \sim y \iff x = \lambda y$$

$$S_\infty^2 \cong \text{Riemann 球}$$

双曲的 Gauss 写像の定義

$f: M \rightarrow \mathbb{H}^3$ はめ込み, n 単位法ベクトル場

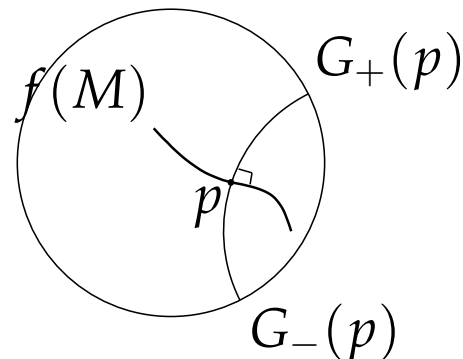
\iff

$$\begin{cases} f: M \rightarrow L^4 \text{ はめ込み, } \langle f, f \rangle_L = -1, f^0 > 0 \\ n: M \rightarrow L^4, \langle n, n \rangle_L = 1, \text{ i.e., } S_1^3\text{-valued, } \langle n, df \rangle_L = 0 \end{cases}$$

$f \pm n$ は光的ベクトル

$G_{\pm} := [f \pm n]: M \rightarrow S_{\infty}^2$ を
双曲的 Gauss 写像と呼ぶ.

G_{\pm} は余向き付け可能な波面にも定義可能.



\mathbb{H}^3 の Poincaré ball モデル

$$L^4 \supset \mathbb{H}^3 \ni x \mapsto y = \frac{(x^1, x^2, x^3)}{1+x^0} \in PB^3 = \left(\{y \in \mathbb{R}^3; |y| < 1\}, \frac{4dy \cdot dy}{(1-|y|^2)^2} \right)$$

このとき, $S_{\infty}^2 \cong \partial(PB^3)$

注) Izumiya group: $f + n: M \rightarrow LC_+$ に立脚した幾何学の提唱

Proposition 1

$f: M \rightarrow \mathbb{H}^3$ はめ込み

G_{\pm} の一方が定値 $\iff f$ はホ口球面 (の一部)

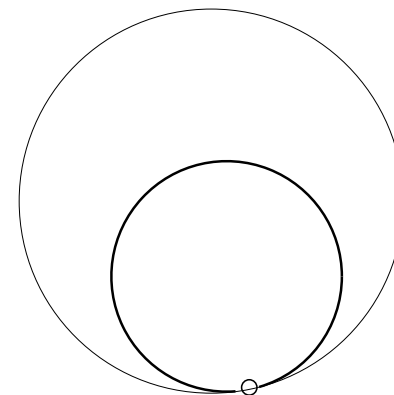
G_{\pm} の一方の像が曲線に退化 \iff ホ口平坦曲面 (の一部)

ホ口球面 \iff 主曲率 1 の全臍的曲面

$\iff K = 0$ かつ $H = 1$

ホ口球面は \mathbb{E}^2 に等長的である .

ホ口平坦 \iff 主曲率の一方が常に 1



Remark 2

$[f \pm n]$ が同時に退化することは起こり得ない .

Proposition 3 (Bryant, 1987)

$f: M \rightarrow \mathbb{H}^3$ はめ込み

$G_+: (M, I) \rightarrow S_\infty^2$ が弱共形的 $\iff f$ は全臍的であるか平均曲率 H が一定値 1 のいずれか

H は n 方向に関する平均曲率

Proposition 4 (GMM, 2004)

$f: M \rightarrow \mathbb{H}^3$ はめ込み

ある実数の比 $[\alpha : \beta] \in \mathbb{R}P^1$ ($\alpha \neq 2\beta$) に対し

- ① $\alpha I - \beta II$ が定値
- ② $G_+: (M, [\alpha I - \beta II]) \rightarrow S_\infty^2$ が弱共形的

\iff

f は全臍的であるか $\alpha(H - 1) = \beta K$ ($\alpha \neq 2\beta$) を満たす Weingarten 曲面のいずれか

ホ口球面的線形 Weingarten 曲面

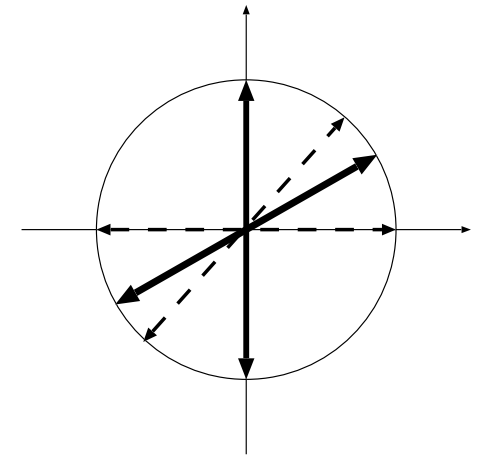
$\alpha(H - 1) = \beta K$ を満たす Weingarten 曲面を **ホ口球面的線形 Weingarten 曲面** (horospherical linear Weingarten surface) と呼ぶ .

$$\mathcal{W}_{[\alpha:\beta]} := \{ \text{HLW-surfaces satisfying } \alpha(H - 1) = \beta K \}$$

平行曲面の観点から , 次の 4 つに細分化:

- $\mathcal{W}_{[0:1]}$ i.e., { flat surfaces }
- $\bigcup_{\lambda < 1/2} \mathcal{W}_{[1:\lambda]} \ni$ CMC-1 surfaces
- $\mathcal{W}_{[1:1/2]}$ i.e., { horo-flat surfaces }
- $\bigcup_{\lambda > 1/2} \mathcal{W}_{[1:\lambda]} \ni$ HMC-1 surfaces

‘**HMC-1**’ = ‘主曲率の調和平均 (harmonic mean) が常に 1’



注) はめ込まれた曲面よりもむしろ波面の幾何学と相性がよい .

Theorem 5 (GMM)

コンパクトな HLW 曲面は全臍的球面 $\in \bigcup_{\lambda > 1/2} \mathcal{W}_{[1:\lambda]}$ に限る .

Theorem 6

$f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ はめ込み

f は平坦, *i.e.*, Gauss 曲率 0

$\iff [f + n] \circ [f - n]^{-1}: U \subset S_\infty^2 \rightarrow S_\infty^2$ が正則

このとき

$[f \pm n]: (M, \mathbb{II}) \rightarrow S_\infty^2$ が共に正則

上記定理 6 の前半部分は Bianchi の本 *Lezioni di Geometria Differenziale* (1927) にも見ることができる .

平坦波面から

Theorem 7 (KRUY, 2007)

$f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ が余向き付け可能な平坦波面ならば, M^2 は向き付け可能である.

[証明] 向き付け不可能な平坦波面 $f: M \rightarrow \mathbb{H}^3$ があったとせよ.
向き付け可能な二重被覆曲面を $\pi: \hat{M} \rightarrow M$ とする.

$U \subset M$ を小さくにとって, U は向きづけられて $G_{\pm}|_U$ は正則
 $\exists U_1, U_2 \subset \hat{M}$ s.t. $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $\pi: U_i \rightarrow U$ diffeo. とせよ.

このとき

$G_{\pm} \circ \pi: U_i \rightarrow S^2$ が正則とすると $G_{\pm} \circ \pi: U_{i+1} \rightarrow S^2$ が反正則
 $f \circ \pi$ の Gauss 写像 $G_{\pm} \circ \pi$ は \hat{M} 上正則であることに矛盾.

余向き付け不可能な平坦波面は存在するが, 今日の話では, 以下, 余向き付け可能性を仮定.

平坦波面の表現公式

Theorem 8 (KUY, 2004)

$f: M^2 \rightarrow H^3 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) / \mathrm{SU}(2)$: 平坦波面

その双曲的 Gauss写像 G_+, G_- .

$\iff f = \mathcal{E}\mathcal{E}^*$ where

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} G_+/\zeta_+ & G_-/\zeta_- \\ 1/\zeta_+ & 1/\zeta_- \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \begin{cases} \zeta_+ := \exp \left(\int \frac{dG_+}{G_+ - G_-} \right) \\ \zeta_- := \exp \left(\int \frac{dG_-}{G_- - G_+} \right) \end{cases}$$

逆も成り立つ . ただし ,

$f = \mathcal{E}\mathcal{E}^*$ が M 上 well-defined

$$\iff \int_{\gamma} \frac{dG_+}{G_+ - G_-} \in \sqrt{-1}\mathbb{R}, \quad \forall [\gamma] \in \pi_1(M).$$

平坦波面のエンドの形状

$f: M \rightarrow \mathbb{H}^3$ 弱完備平坦波面, $L^*(ds^2)$ が有限全曲率をもつ

$\Rightarrow M \cong \bar{M} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$

各 p_j 又はその穴あき近傍 U_{p_j} 又はその像 $f(U_{p_j})$ を**エンド**と呼ぶ.

エンド \dots regular (G_{\pm} が正則に伸びる) or irregular

以下, regular end を考える.

$\alpha := \lim_{p \rightarrow p_j} \frac{dG_+}{dG_-}$ or $\lim_{p \rightarrow p_j} \frac{dG_-}{dG_+}$ so that $|\alpha| \leq 1$

$\alpha \in [-1, 1)$ が示せる.

Proposition 9 (KRUY, 2007)

エンドには特異点が集積していないものとする.

エンドの '直径' $d(s)$ は '果て' に進むにつれ $d(s) \sim d(0) \exp\left(\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}s\right)$

で成長する. (s : 軸の弧長パラメタ)

horosphere, hyperbolic cylinder
hourglass, snowman

$$G_+(z) = z, G_-(z) = \alpha z \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$$

end p_j が

シリンダー型 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \alpha(p_j) = -1$

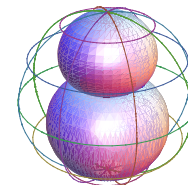
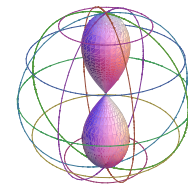
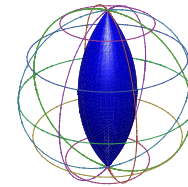
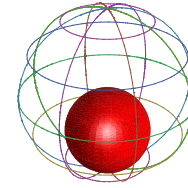
砂時計型 $\stackrel{\text{def}}{\iff} -1 < \alpha(p_j) < 0$

ホ口球面型 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \alpha(p_j) = 0$

雪だるま型 $\stackrel{\text{def}}{\iff} 0 < \alpha(p_j) < 1$

Proposition 10 (KRUY, 2007)

特異点が集積していないようなエンドは、
その型に応じて各回転面のエンドに漸近する。



HLW 曲面の表現公式

Theorem 11 (GMM, K)

M : Riemann 面; G : M 上の有理型関数; ds_ϵ^2 : M 上の定曲率 ϵ の計量

\Rightarrow

\exists HLW 波面 $f: M \rightarrow H^3$ s.t. $\alpha(H-1) = \beta K$, $\alpha/(\alpha-2\beta) = \epsilon$,
 $G =$ 双曲的 Gauss 写像 G_+

より詳しくは

\exists 正則写像 $h: \tilde{M} \rightarrow S^2$ or \mathbb{C} or D s. t. $ds_\epsilon^2 = \frac{4|dh|^2}{(1+\epsilon|h|^2)^2}$

この h を使って

$$\mathcal{G} = (-G_h)^{-3/2} \begin{bmatrix} -GG_h & GG_{hh}/2 - G_h^2 \\ -G_h & G_{hh}/2 \end{bmatrix} \text{ and } \mathcal{H} = \begin{bmatrix} \frac{1+\epsilon^2|h|^2}{1+\epsilon|h|^2} & -\epsilon\bar{h} \\ -\epsilon h & 1 + \epsilon|h|^2 \end{bmatrix},$$

$$f = \mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{G}^*.$$

と定めよ. このとき $f: M'(\subset M) \rightarrow \mathbb{H}^3 = \text{PSL}(2, \mathbb{C})/\text{PSU}(2)$ は HLW 波面 s.t. $\alpha(H-1) = \beta K$, $\alpha/(\alpha-2\beta) = \epsilon$ である.

逆も成立.

注) $\alpha = 2\beta$ の場合 (i.e., ホロ平坦の場合) この種の公式なし

双曲的 Gauss 写像の値分布

復習：ホロ平坦曲面： G_{\pm} の像の一方が曲線に退化

平坦曲面： G_{\pm} の両方が正則

これら以外の HLW 曲面： G_{\pm} の一方のみが正則

Theorem 12 (Z. Yu, 川上 裕)

ホロ球でない完備 CMC-1 曲面の双曲的 Gauss 写像 G_{+} の除外値は高々 4 つ

4 つの除外値をもつ例あり

Problem (弱) 完備な平坦波面や線形 HMC-1 曲面 (波面) の双曲的 Gauss 写像の値域について考察せよ。

Georgiou-Guilfoyle の最近のプレプリントから

$f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ はめ込まれた曲面

$\phi: p \mapsto$ “ $f(p)$ で $f_*(T_p M)$ に直交する向きづけられた測地線”
を考える (これも Gauss 写像と呼んでもよい)

$$\phi: M \rightarrow L(\mathbb{H}^3) = (S^2 \times S^2) \setminus \{\text{diagonal}\}$$

$L(\mathbb{H}^3)$ は neutral Kähler 構造 (符号 $(++--)$ の Kähler 計量 ds^2) をもつ .

Theorem 13

f が Weingarten $\iff \phi^*(ds^2)$ の Gauss 曲率 0

彼らの証明を読む限り, 全臍的曲面, 平坦曲面, ホロ平坦曲面は除外しないといけないような ...

$f: M \rightarrow H^3$		$n: M \rightarrow S_1^3$
Weingarten	\iff	Weingarten
totally umbilical	\iff	totally umbilical
LW	\iff	LW
CGC- c	\iff	CGC- $(c/(c+1))$
minimal	\iff	minimal
CMC- k	\iff	HMC- $(1/k)$
HMC- $(1/k)$	\iff	CMC- k
BLW	\iff	BLW
flat	\iff	flat
CMC-1	\iff	HMC-1
HMC-1	\iff	CMC-1
horo-flat	\iff	horo-flat

f と n は Gauss 写像 $G_{\pm} = [f \pm n]: M \rightarrow S_{\infty}^2$ を共有している .

End of slides. Click [END] to finish the presentation.

Thank you.



END

Bye 