

曲面論における Gauss 写像の役割

Masatoshi KOKUBU
Tokyo Denki University

February 16,17 2009

今日の目的:

$\mathbb{E}^3$ の曲面に対する Gauss map にまつわる基本事項を概観したい

Menu

Part 1 Euclid 空間編

Gauss 写像の定義

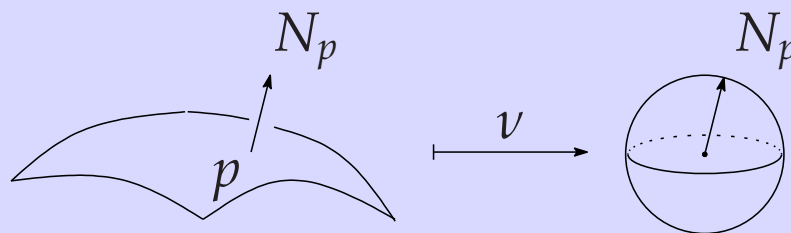
Gauss 写像のふるまいからわかること

Gauss 写像から曲面を“復元”

Gauss 写像の値分布

Part 1 Euclid 編

Definition 1



Proposition 2

$f: M^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ はめ込み

M^2 : 向き付け可能 $\iff$ Gauss 写像が大域的に定義できる .

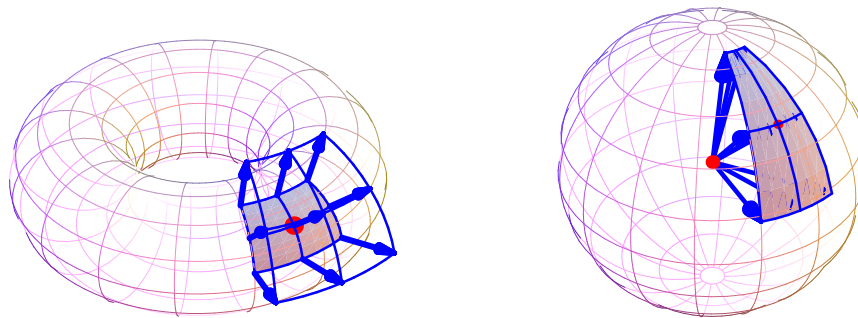
- 向き付け不可能曲面に対しては
 $\nu: M^2 \ni p \mapsto [N_p] \in \mathbb{RP}^2$
と定め、(一般化された) Gauss 写像と呼ぶ .

- (Euclid 構造不要で) アファイン空間内の曲面と見なし
 $\nu: M^2 \ni p \mapsto f_*(T_p M^2) \in Gr_2(\mathbb{R}^3)$
と定義することもできる .

以下,断らない限り Definition 1 の意味での Gauss 写像を扱う.

Gauss 自身の Gauss 写像の使い道 Gauss (1827)

$$K(p) := \lim_{U_p \rightarrow p} \frac{\nu(U_p) \text{ の面積}}{U_p \text{ の面積}}$$



より厳密には

$$\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, g_0 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 > 0)$$

$f: M^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$: はめ込み

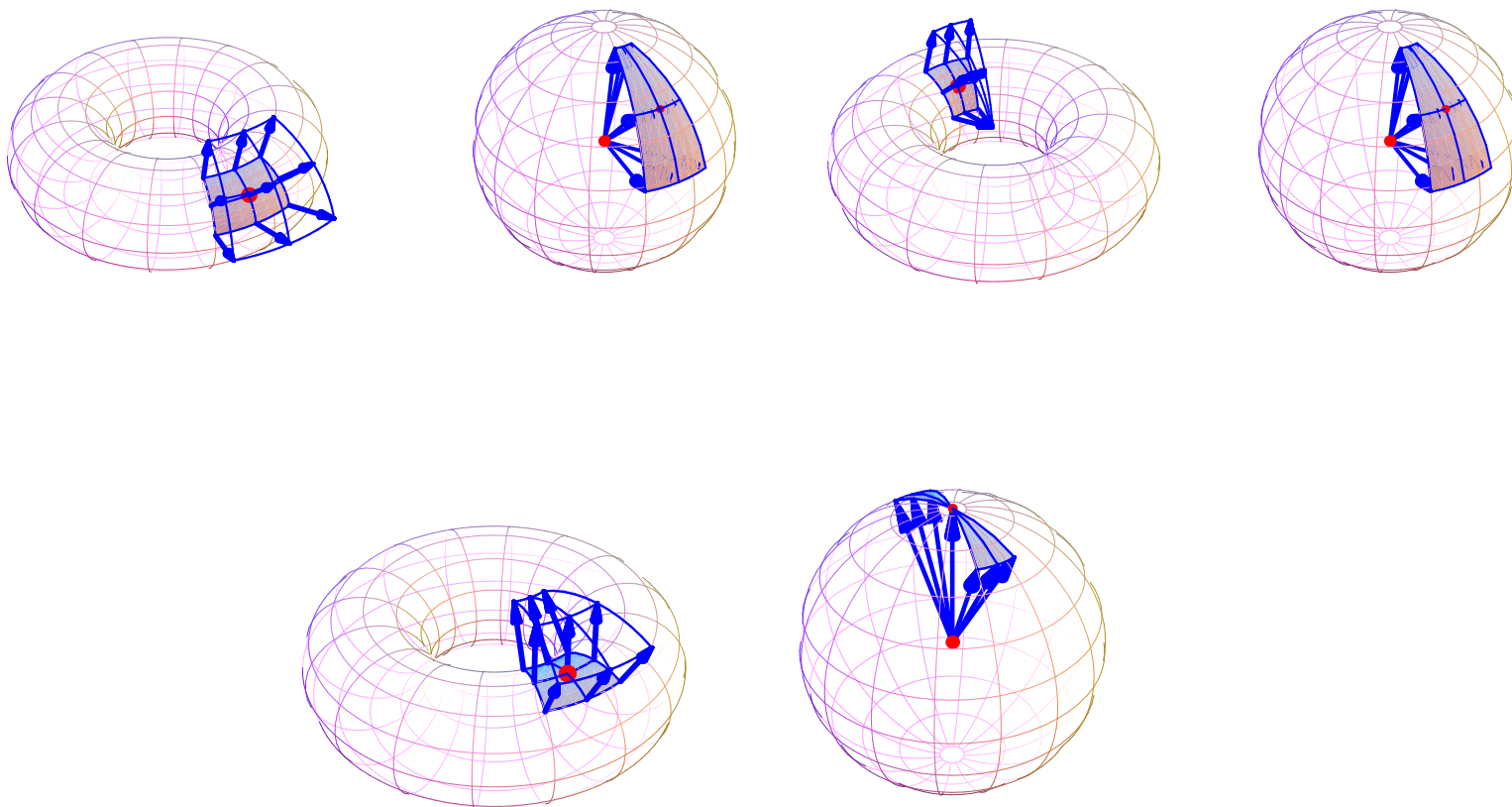
$p \in M^2$, $U_p : p$ の近傍 (向きを決めておく)

$N_p : f(p)$ における 正の方向を向いた単位法ベクトル,

$$v: U_p \ni p \mapsto N_p \in S^2(1) \subset \mathbb{E}^3$$

$$K(p) = \lim_{U_p \rightarrow p} \frac{v(U_p) \text{ の符号付面積}}{U_p \text{ の符号付面積}}$$

ただし, $S^2(1)$ には, それを外側から見て 反時計回りが正の向きであるように向きを定めておく.



Gauss 写像を見ただけで，元の曲面に関して何が分かるか？

Proposition 3

$f: M^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ はめ込み

$[\nu]$ が定値 $\iff f$ は平面 (の一部)

$[\nu]$ の像が曲線に退化 $\iff$ Gauss 曲率は 0

- 点毎に $dv_p = 0 \iff K(p) = 0$ は既に見た
- $\exists$ 平坦曲面 $\approx$ Möbius band
- Gauss 曲率が 0 であることは，アフィン変換により不変

Proposition 4

$f: M^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ はめ込み

$[\nu]: (M^2, I) \rightarrow \mathbb{R}P^2$ が弱共形的

$\iff f$ は全臍的であるか極小のいずれか

M^2 が向き付け可能なときは (より詳しく)

ν が向きを保つ共形写像 $\iff f$ は全臍的 (球面の一部)

ν が向きを裏返す (弱) 共形写像 $\iff f$ は極小

Proposition 5

$f: M^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ はめ込み

$\nu: (M^2, I) \rightarrow S^2(1)$ が調和写像 $\iff f$ の平均曲率が一定

Proposition 6

$f: M^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ はめ込み, $\text{II} > 0$

$\nu: (M^2, \text{II}) \rightarrow S^2(1)$ が調和写像

$\iff f$ の Gauss 曲率が一定 > 0

$f: M^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ はめ込み, II が不定値

$\nu: (M^2, \text{II}) \rightarrow S^2(1)$ が Lorentz 的調和写像

$\iff f$ の Gauss 曲率が一定 < 0

cf. (M, II) およびその周辺の研究は 1960 – 70 年代に Klotz によるものが かなりたくさんある .

その中には , 例えば , Liebmann の定理「 $\mathbb{E}^3$ にはめ込まれた Gauss 曲率一定の閉曲面は球面に限る」ことの別証明 (Hopf の定理の Hopf による証明のアナロジー) がある .

Gauss 写像から曲面を“復元”

Theorem 7 (Weierstrass-Enneper, Osserman)

$f: M^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ を極小はめ込み (M^2 は向き付け可能) とする .

M^2 を 向きと共形構造 [I] で *Riemann* 面と見て

$g := (\text{立体射影}) \circ \nu: M^2 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}: M^2$ 上の有理型関数

$\Rightarrow$

$$f = \operatorname{Re} \int (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) \omega \quad (\exists \omega : \text{正則 1 形式}) \quad (\star)$$

(i) $\{\text{zeros of } \omega\} = \{\text{poles of } g\}$ where $\operatorname{ord}_p \omega = 2 \operatorname{ord}_p g$

(ii) $\int 1 - g^2 \omega, \int i(1 + g^2) \omega, \int 2g \omega$ have no real period

逆に , (i), (ii) を満たす (M, g, ω) から共形的極小はめ込み $f: M \rightarrow \mathbb{E}^3$ ($\star$) を得ることができる . その *Gauss* 写像は g .

はめ込み x が極小 $\iff$ 各 x^i が調和関数

$\nexists$ コンパクト極小曲面

例 (<http://mathworld.wolfram.com/> より) .

同じ Gauss 写像をもつ極小曲面は (少なくとも局所的には)
いくらでもたくさんある . $\{(g, \omega); \omega\}$
とくに $\{(g, e^{it}\omega_0); t \in [0, 2\pi)\}$ は等長的な極小曲面族を与える .
最も有名な例 カテナイド $\leftrightarrow$ ヘリコイド

Weierstrass-Enneper 公式 (微分版)

g, h 定数でない有理型関数

$$F := \begin{pmatrix} -1 & g & (1 - g^2)/2 \\ i & -ig & i(1 + g^2)/2 \\ 0 & -1 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \quad \left(h_1 = \frac{dh}{dg}, \quad h_2 = \frac{dh_1}{dg} \right)$$

$\Rightarrow \operatorname{Re} F$ は 共形的極小はめ込みであり, その Gauss 写像 ν は $\nu = (\text{立体射影}) \circ g$ で与えられる.

Theorem 8 (Kenmotsu, 1979)

$f: M^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ を $CMC-H$ はめ込みとする . ($H \neq 0$)

$$g := (\text{立体射影}) \circ \nu: M^2 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$$

M^2 を 向きと共形構造 [I] で *Riemann* 面と見ておく .

$\Rightarrow$

$$f = \int \operatorname{Re} (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) \omega \quad \text{ここで } \omega = -\frac{2}{H} \frac{\partial \bar{g}}{(1 + |g|^2)^2} \quad (\star)$$

g は $g_{z\bar{z}} - 2 \frac{\bar{g}}{1 + |g|^2} g_z g_{\bar{z}} = 0$ を満たす (調和写像の方程式)

逆に , *Riemann* 面 M と調和写像 $g: M \rightarrow (\bar{\mathbb{C}}, \frac{4|dw|^2}{(1+|w|^2)^2})$ は (分岐点をもつかもしれないが) 共形的 $CMC-H$ はめ込み $\tilde{M} \rightarrow E^3$ を与え , その *Gauss* 写像は g .

CMC 曲面も等長的な 1 パラメタ族をもつ .
ただし , Gauss 写像自体がパラメタで変形される .

コンパクト CMC 曲面

種数 0 ならば球面に限る . (Hopf, 1951)

埋め込みならば球面に限る . (Alexandrov, 1958)

コンパクト CMC トーラスは存在するか ?

i.e., 調和写像 $T^2 \rightarrow S^2$ の中で CMC 曲面の Gauss 写像となり得るものはあるか ?

(Wente 1984) Yes

種数 2 以上 : 存在定理 (Kapouleous)

Theorem 9 (Kenmotsu)

$f: M^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ をはめ込みとする . (H は値 0 をとらないと仮定)

$$g := (\text{立体射影}) \circ \nu: M^2 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$$

M^2 を 向きと共形構造 [I] で *Riemann* 面と見ておく .

$\Rightarrow$

$$f = \int \operatorname{Re} (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) \omega \quad \text{ここで} \quad \omega = -\frac{2}{H} \frac{\partial \bar{g}}{(1 + |g|^2)^2} \quad (*)$$

$$H \left(g_{z\bar{z}} - 2 \frac{\bar{g}}{1 + |g|^2} g_z g_{\bar{z}} \right) = H_z g_{\bar{z}} \quad (**)$$

が成り立つ .

逆に , $(*)$, $(**)$ を満たす (M, g, H) は (分岐点をもつかもしれないが) 共形的是め込み $\tilde{M} \rightarrow E^3$ を与え , その平均曲率は H , *Gauss* 写像 ν は $\nu = (\text{立体射影}) \circ g$ で与えられる .

Theorem 10 (Lelievre, 1800年代後半)

① $\nu: D(\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow S^2 \subset \mathbb{E}^3$ 調和写像, *i.e.*, $\Delta \nu \times \nu = 0$.

$\Rightarrow$

$$\int \nu \times *d\nu$$

は定曲率 1 の曲面を描く .

② $\nu: D(\subset (\mathbb{R}^2, dudv)) \rightarrow S^2 \subset \mathbb{E}^3$ Lorentz的調和写像,
i.e., $\Delta_L \nu \times \nu = 0$.

$\Rightarrow$

$$\int \nu \times *_L d\nu$$

は定曲率 -1 の曲面を描く .

注) と Kenmotsu 公式は (平行曲面を介して) 本質的に同じ

Gauss 写像の値分布

Theorem 11 (Fujimoto, 1988)

平面ではない完備極小曲面の *Gauss* 写像の除外値は高々 4 つ .

定理が示される以前から , 次は知られていた .

除外値 1 ~ 4 個の例がそれぞれあること (Voss)

全曲率有限の仮定のもとでは , 除外値は高々 3 つ (Osserman)

Corollary 12

向き付け不可能完備極小曲面の *Gauss* 写像の除外値は高々 2 つ .

除外値 2 個の例の発見 (López and Martín, 2000)

Open Problems (有限全曲率) $\exists$ 除外値 3 個の実例 ?

(向き付け不可能) $\exists$ 除外値 1 個の実例 ?

Theorem 13 (Hoffman-Osserman-Schoen, 1982)

$f: M^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 完備 CMC はめ込み

$\nu(M^2) \subset$ 開半球 $\Rightarrow f$ は平面

$\nu(M^2) \subset$ 閉半球 $\Rightarrow f$ は平面または円柱

Problem' CGC 曲面の Gauss 写像の値域を考察せよ．ただし，

Fact $\mathbb{E}^3$ にはめ込まれた完備 CGC- K 曲面

$K > 0 \Rightarrow$ 球面

$K = 0 \Rightarrow$ 柱面

$K < 0 \Rightarrow$ 存在せず (Hilbert, 1901)

であるから

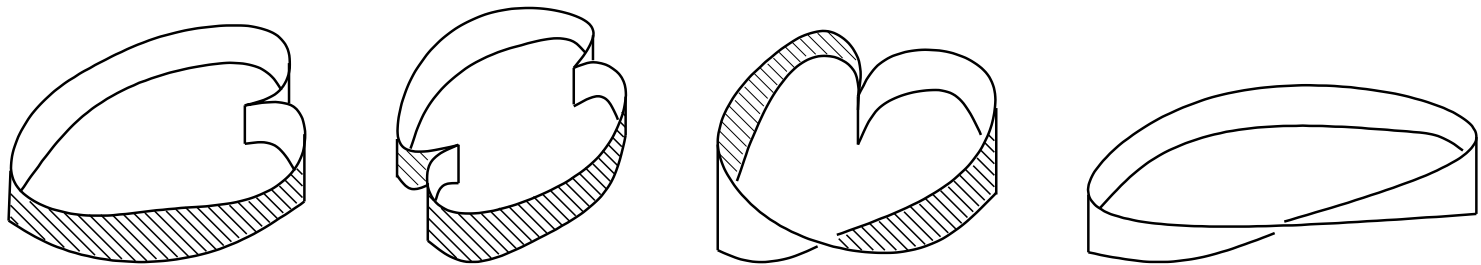
Problem 弱完備 CGC 波面の Gauss 写像の値域を考察せよ．

Definition 14

写像 $f: M^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ が波面であるとは

$\exists L_f = (f, \nu): M^2$ (もしくは二重被覆 $\hat{M}^2$) $\rightarrow \mathbb{E}^3 \times S^2(1)$
s.t.

- ① $\langle df, \nu \rangle = 0$
- ② L_f は immersion



波面 f が弱完備であるとは, L_f による induced metric が完備な Riemann 計量であることとする.

例えば Dini の曲面

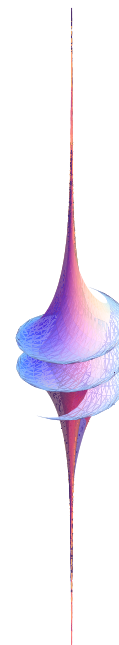
$$f(\tau, \eta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} \begin{pmatrix} \frac{\cos \eta}{\cosh \tau} \\ \frac{\sinh \tau}{\sin \eta} \\ (\tau - \tanh \tau) + \beta \eta \end{pmatrix}$$

$\beta = 0$ のとき, i.e., tractroid のとき,
 $\text{Image}(\nu)$ は開半球

$\beta > 0$ のとき, $\text{Image}(\nu)$ 平行な大円と小円
で挟まれた帯状領域 $\subset S^2$

(小円は含む, 大円は含まない)

(小円のサイズは β の値に応じて決まる)



つづく

正の定曲率空間の場合は永井さんが講演されたので ,
明日は負の定曲率空間で .