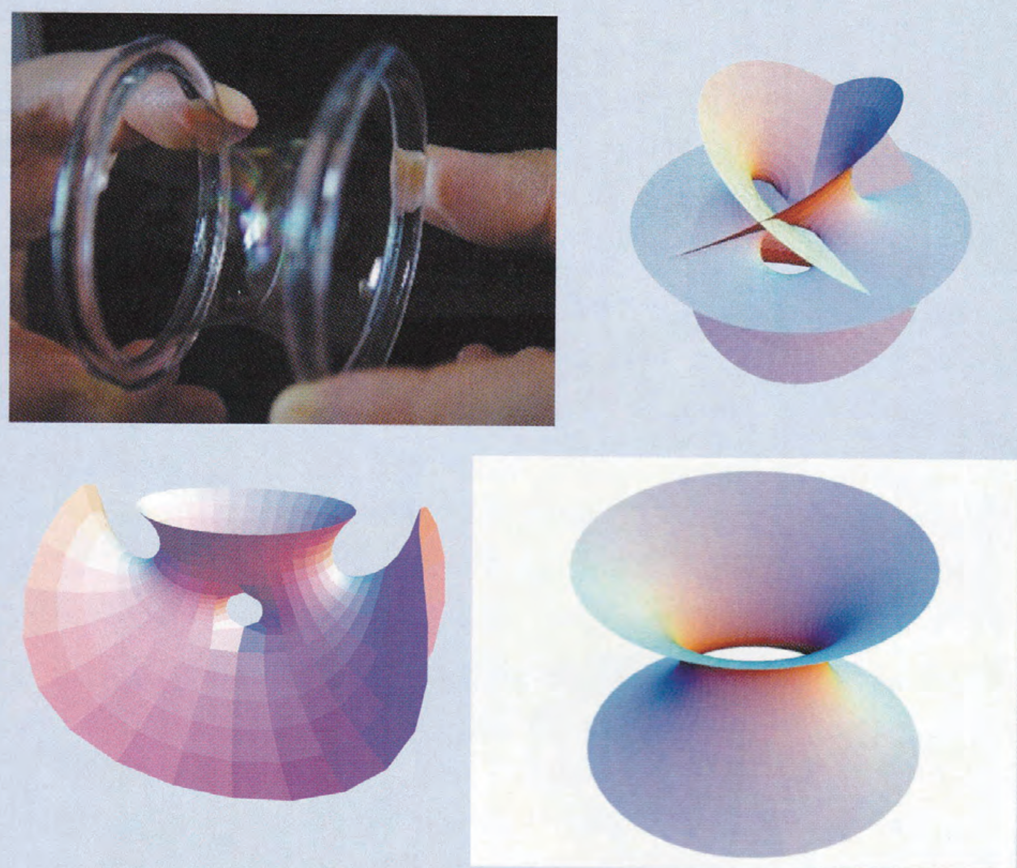
北海道大学

理学部同窓会誌

50



平成20年度　2008

２つの輪を石鹸水に浸し，平行のままそっと離してみたのが左上の写真です．石鹸膜は，表面張力によって，面積を最小とする形を実現しています．石鹸膜を張る枠をいろいろかえれば，様々な美しい形が登場することを思い描けるはずです．このような図形は数学的に定式化され，**極小曲面**とよばれています．1760 年頃に J. Lagrange は，この曲面を記述する偏微分方程式を導いています．この研究が，変分法とよばれる分野を開拓しました．また，1860 年頃に K. Weierstrass らは，１変数複素関数の積分を用いて，曲面を構成する公式を開発しました．このように極小曲面は，微分幾何学はもちろん，偏微分方程式論，複素関数論など，様々な分野にまたがった研究対象といえます．

右下の曲面は，左上の写真の曲面をコンピュータで描かせたもので，懸垂面とよばれます．L. Euler は，1740 年頃にはこれが極小曲面であることを知っていたようです．

ある自然な仮定をおくと，極小曲面はコンパクト・リーマン面から有限個の点を除いたものと理解できます．このとき除いた点を図で見ると曲面の**端**となり，懸垂面なら上下２つあります．1960 年頃に R. Osserman は，完備な極小曲面の全曲率は $-4\pi m$ という形に書けることを示しました．m はある非負の整数をあらわしています．全曲率が 0 に近いものほど，曲面の形があっさりしていると思うことにすると，あっさり具合，すなわちその自然数 m を，端の数とリーマン面の種数（穴の数）の和で下から評価することができます．この不等式は，同じく Osserman によって得られました．1980 年代になって R. Schoen は，端の数が 2 の極小曲面の中で，懸垂面がもっともあっさりした曲面であることを示しました．

では，端の数が 2 の極小曲面の中で懸垂面のつぎにあっさりした曲面は，どんな形になるでしょうか．このような研究は，現在進行中の興味深い問題です．他の２つの図はそのような曲面で，端の数が 2 で種数が 1 の有限全曲率完備極小曲面です．

右上の曲面は藤森祥一らが構成した例です．彼は本学出身の気鋭の数学者（平成 14 年修士修了）で，美しい図版も提供していただきました（印刷の都合で，きれいにご覧いただけるか心配です）．曲面を構成するというのは，大雑把にいうとある種の積分が意味のあることを証明することに帰着されます．左下の曲面は M. Weber が描画した例です．積分の計算自体はコンピュータを用いてできることがあるので，それをもとに描画させたもののようです．見えてはいますが，実際に構成した，あるいは存在しているというためには，まだ証明すべきことが残っているそうです．

大学院理学研究院数学部門　古畑仁
（２００８年）

球面はまるい，どこでも同じように曲がっています．では，どこでも同じように曲がっている曲面は球面でしょうか．

そもそも曲面の曲がり方はどのように測ることができるのでしょう？曲面上の調べたい点に対して，そこでの法線を含む平面で曲面を切ったときにできる曲線のその点における曲がり方を調べます．円柱面(表紙図右下)では，切り口が円になる時が最大で，直線になる時が最小と考えます．その最大値と最小値の平均を平均曲率とよび，曲面の曲がり方を表す重要な量の一つです．たとえば，平面の平均曲率はどこでも 0 ですし，半径 r の球面の平均曲率はどこでも 1/r になります．円柱面（底面が半径 r の円の直円柱の側面）の平均曲率はどこでも 1/(2r) です．このような平均曲率が一定の曲面の研究は長い歴史を持っています．

球面やトーラス（円環面，浮袋を思い浮かべてください）のような曲面を閉じた曲面といいます．平面や円柱面は閉じた曲面ではありません．1950 年代に Heinz Hopf は，平均曲率が一定な閉じた曲面は球面だけかという問題を研究しました．彼は著名な幾何学者で，本学の桂田芳枝（1911-1980，数学における日本女性初の理学博士としても有名）とも親交がありました．彼女も関連した問題の研究をしています．

Hopf の問題は長らく未解決の難問でしたが，1986 年 Henry C. Wente によって解決されました．多くの研究者の予想に反して，球面以外にも平均曲率一定の閉じた曲面が存在することがわかりました．彼の発見した曲面は，今日 Wente トーラスと呼ばれています．発見したというより，構成したといった方がみなさんの感覚にはあうかもしれません．実際は，幾何学的な考察だけではなく，非線型偏微分方程式などの解析を行って証明されます．これは，単にこの問題の解決というだけでなく，諸分野に刺激を与えることになりました．

では，それは実際にはどんな形なのでしょうか．表紙図左下は，Wente トーラスのコンピュータグラフィックです．Wente 自身，頭の中にこの形が浮かんでいたはずですが，彼の目がこの形を実際に見たのはずっと後になってからです．表紙写真は高性能３Ｄプリンタで作成した模型（切断したモデルも含めて３組）で，現在北海道大学総合博物館に所蔵展示されています（博物館には，数学教室の専門家によるもう少しわかりやすい解説もご覧いただけます）．当初みなさんに見ていただくと同時に実際に触れて体感してもらいたかったのですが，自由に触れていただけるのに適したサイズの模型を作るにはコストがかかりすぎることが判明して断念しています（同窓会のみなさん，どうにかならないでしょうか）．

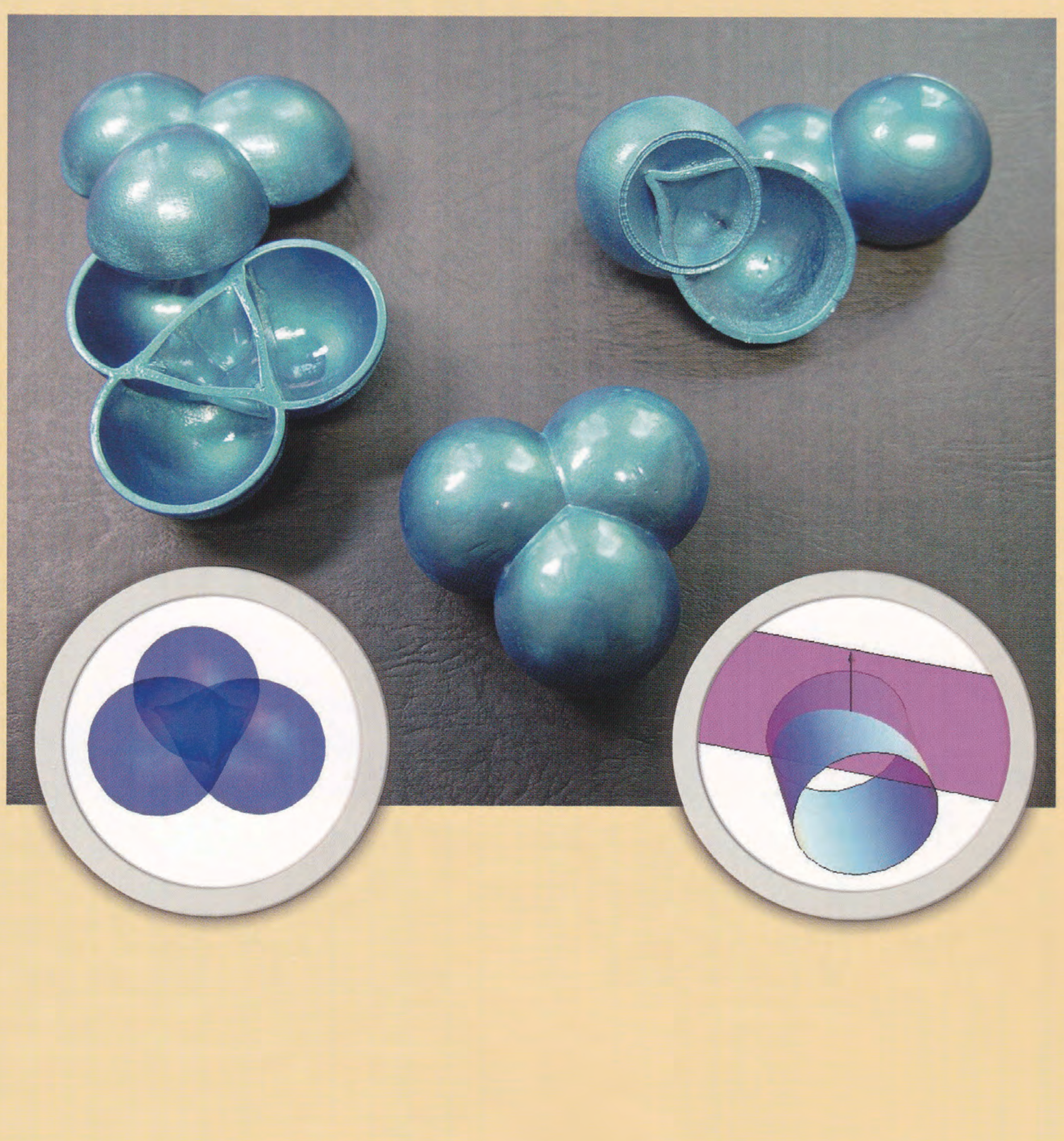
平均曲率一定曲面は３次元 Euclid 空間に入っているとして話をしてきましたが，現在研究は進み，もっと一般的な等質空間に入った平均曲率一定曲面の研究も行われています．こちらはまだ頭の中で見る世界にいます．

大学院理学研究院数学部門　古畑仁
（２０１７年）

北海道大学

理学部同窓会誌

59



2017（平成29）年度