アフィン平均曲率一定の自己双対な余次元 2 中心アフィン曲面

黒瀬 俊　　福岡大学理学部
古畑 仁　　北海道大学大学院理学研究科

D を $(n+2)$ 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^{n+2}$ の標準的な接続とする。

n 次元多様体 M の $\mathbb{R}^{n+2}$ へのはめ込み $x : M \to \mathbb{R}^{n+2}$ で、各 $p \in M$ について $x(p)$ と $x_*T_p(M)$ が $\mathbb{R}^{n+2}$ で横断的に交わるものを、**中心アフィンはめ込み**という。このとき、x に沿ってのベクトル場 ξ で

$$T_{x(p)}(\mathbb{R}^{n+2}) = x_*T_p(M) \oplus \mathbb{R}\,\xi(p) \oplus \mathbb{R}\,x(p), \quad p \in M$$

を満たすものをとると、この分解に従って、捩れをもたないアフィン接続 ∇ と対称 $(0,2)$ テンソル場 h, T が

$$D_X(x_*Y) = x_*(\nabla_X Y) + h(X,Y)\xi + T(X,Y)x$$

により定義される。特に、h が非退化のときには、ある正規化条件を課すことで、ξ は一意に定まることが知られている ([3, ノート 9])。このとき M 上に定められる擬リーマン計量 h を、**アフィン基本形式**という。また、ξ の微分 $D_X\xi$ の $x_*T(M)$-成分を $-S(X)$ とおくとき、$H = (\mathrm{trace}\, S)/n$ を**アフィン平均曲率**という。

[1] で古畑は、変分ベクトル場が ξ 方向の成分のみをもつような変分に対して、アフィン基本形式 h が定める体積汎関数の停留点、**アフィン極小はめ込み**、について考察し、アフィン平均曲率 H が恒等的に 0 であることがアフィン極小であるための必要十分条件であること、二次曲面

$$\phi_0(u^1, u^2) = \left(\frac{u^1 + u^2}{\sqrt{2}},\, \frac{u^1 - u^2}{\sqrt{2}},\, u^1u^2,\, 1 \right), \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$$

およびクリフォード・トーラスはアフィン極小であること、等を示した。

ここでは、M を 2 次元として、アフィン基本形式が不定値であり ∇ が h のレヴィ・チヴィタ接続に一致している (**不定値自己双対**) 中心アフィン曲面について、アフィン平均曲率が一定であるものが、局所的には具体的

に決定できたことを報告する。なお、不定値でない場合についても同様の結果が示されるが、これに関しては [2] を参照していただきたい。

定理 1 1. 任意の 1 変数関数 μ, ν に対して

$$x(u^1, u^2) = e^{\mu(u^1)+\nu(u^2)}\phi_0(u^1, u^2) \tag{1}$$

は、極小な不定値自己双対中心アフィン曲面である。逆に、極小な不定値自己双対中心アフィン曲面は、局所的にはすべて (1) 式の形で与えられる。

2. 任意の 1 変数関数 μ, ν に対して

$$x(u^1, u^2) = \frac{\exp\left\{\bigl(\mu(u^1) - \nu(u^2)\bigr)/2\right\}}{\int^{u^1} \exp \mu(t)dt + \int^{u^2} \exp\bigl(-\nu(t)\bigr)dt}\phi_0(u^1, u^2) \tag{2}$$

は、アフィン平均曲率 -1 の不定値自己双対な中心アフィン曲面である。逆に、アフィン平均曲率 -1 の不定値自己双対な中心アフィン曲面は、局所的にはすべて (2) 式の形で与えられる。

定理 2 1 変数関数 p, q で $p(0) = 1$, $p'(0) = 1$, $q(0) = 1$, $q'(0) = 0$ を満たすものをとり、

$$\hat{p}(u^1) = p(u^1)\int_0^{u^1} p^{-2}(t)dt, \quad \hat{q}(u^2) = q(u^2)\int_0^{u^2} q^{-2}(t)dt$$

とすると、

$$x(u^1, u^2) = \bigl(p(u^1)q(u^2),\, p(u^1)\hat{q}(u^2),\, \hat{p}(u^1)q(u^2),\, \hat{p}(u^1)\hat{q}(u^2)\bigr) \tag{3}$$

は極小な不定値自己双対中心アフィン曲面である。逆に、極小な不定値自己双対中心アフィン曲面は、局所的にはすべて (3) 式の形で与えられる。

参考文献

[1] Furuhata, H., *Minimal centroaffine immersions of codimension two*, Bull. Belgian Math. Soc. (to appear).

[2] Furuhata, H. and Kurose, T., *Self-dual centroaffine surfaces of codimension two with constant affien mean curvature*, preprint, Hokkaido Univ., 1999.

[3] 野水克己・佐々木武「アファイン微分幾何学—アファインはめ込みの幾何—」裳華房, 1994.