余次元２の自己双対中心アファイン曲面

古畑　仁 (Hitoshi FURUHATA) †
北海道大学大学院理学研究科

黒瀬俊氏（福岡大学理学部）との共同研究 [2] により得られた "$\mathbb{R}^4$ 内のアファイン平均曲率一定の自己双対中心アファイン曲面の小域的な決定" について報告する．[2] では述べることができなかった考察を一部つけくわえた．

まず，記号の準備を兼ねて，Nomizu-Sasaki [4] の余次元２の中心アファインはめ込みの理論を簡単に復習する．一般の次元について議論が可能な場合が多いが，曲面の場合を述べた．

M を向きのついた２次元多様体，$\mathbb{R}^4 := (\mathbb{R}^4, D, \mathrm{Det})$ を４次元のアファイン空間とその標準的な接続および体積要素とする．断らない限り多様体，写像などはなめらかとし，主に小域的な議論をする．

$\mathbb{R}^4$ と $\mathbb{R}^4$ の接空間 $T_p\mathbb{R}^4$ をつぎの対応で同一視すると約束し，以下いちいち断らない：

$$\mathbb{R}^4 \ni p = {}^t(p^1, \dots, p^4) \mapsto \sum_{i=1}^{4} p^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \in T_p\mathbb{R}^4.$$

$f : M \to \mathbb{R}^4$ を余次元２のはめ込みとし，$f^{-1}T\mathbb{R}^4$ に D から誘導される標準的なアファイン接続を同じ記号 D であらわすことにする．

定義 1． ２つのはめ込み $f_1, f_2 : M \to \mathbb{R}^4$ が**合同** (congruent) であるとは，特殊線型変換 $A \in SL(4;\mathbb{R})$ が存在して $f_2 = Af_1$ とかけることをいう．

$f : M \to \mathbb{R}^4$ が Nomizu-Sasaki [4] の意味で正規化された余次元２のブラシュケ中心アファインはめ込み (ここではそれをたんに中心アファインはめ込みとよぶ) であることをつぎのように定義する．

†稲盛財団助成金による

定義 2. 余次元 2 のはめ込み $f : M \to \mathbb{R}^4$ が**中心アファインはめ込み** (centroaffine immersion) であるとは，つぎの (1), (4) をみたす f に沿った $\mathbb{R}^4$ 上のベクトル場 $\xi \in \Gamma(f^{-1}T\mathbb{R}^4) = C^\infty(M, \mathbb{R}^4)$ (**ブラシュケ法ベクトル場**とよぶ) が存在するときをいう．

1. 任意の点 $x \in M$ に対して直和分解

   $$T_{f(x)}\mathbb{R}^4 = f_*T_xM \oplus \mathbb{R}\xi_x \oplus \mathbb{R}f(x) \tag{1}$$

   をもつ．
2. $X, Y, X_j \in \Gamma(TM)$ に対して

   $$\begin{cases} D_X f_* Y &= f_*\nabla_X Y + h(X,Y)\xi + T(X,Y)f, \\ D_X\xi &= -f_*SX + \tau(X)\xi + P(X)f, \end{cases} \tag{2}$$

   $$\theta(X_1, X_2) := \mathrm{Det}(f_*X_1, f_*X_2, \xi, f) \tag{3}$$

   で M に誘導される，ねじれのないアファイン接続 ∇，対称 $(0,2)$ テンソル場 h (**アファイン基本形式**という) と T，$(1,1)$ テンソル場 S (**アファイン形作用素**という)，1 形式 τ と P，面積要素 θ がつぎをみたす：

   $$\begin{cases} h \text{ は非退化}, \\ \nabla\theta = 0, \\ \theta = \omega_h \text{ となり，正の向きを与える}, \\ \mathrm{tr}_h\{(X,Y) \mapsto T(X,Y) + h(SX,Y)\} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

   ここで，ω_h は擬リーマン計量 h の面積要素をあらわす．

まず，f に対して，(i) 上の条件をみたす ξ は一意的に定まること，(ii) (1) と (4) の第 1 の条件をみたす $\xi_0 \in \Gamma(f^{-1}T\mathbb{R}^4)$ があれば，ブラシュケ法ベクトル場 ξ が存在すること，すなわち上の条件が強い制約ではないことがわかる．

また，(4) の条件 $\nabla\theta = 0$ は $\tau = 0$ と，$\theta = \omega_h$ は $|\det_\theta h| = 1$ と，それぞれ同値であることに注意する．ここで，$\det_\theta h$ は $\theta(e_1, e_2) = 1$ なる基底 $\{e_1, e_2\}$ に関する行列 h の行列式をあらわす．

さて，$\mathbb{R}_4 = ((\mathbb{R}^4)^*, D^*, \mathrm{Det}^*)$ を $\mathbb{R}^4$ の双対空間とする．中心アファインはめ込み $f = (f, \xi) : M \to \mathbb{R}^4$ に対して，$f^* : M \to \mathbb{R}_4$ をつぎで定義

する：$x \in M$ と $X \in T_xM$ に対して

$$f^*(x)(f_*X) = 0, \quad f^*(x)(\xi(x)) = 1, \quad f^*(x)(f(x)) = 0.$$

このとき，f^* は $\mathbb{R}_4$ への中心アファインはめ込みとなることがわかり，これを f の**双対はめ込み** (dual immersion) という．

f^* のブラシュケ法ベクトル場 ξ^* はつぎで与えられる：

$$\xi^*(x)(f_*X) = 0, \quad \xi^*(x)(\xi(x)) = 0, \quad \xi^*(x)(f(x)) = 1.$$

また，f と f^* はアファイン基本形式 h を共有し，

$$((f^*)_*X)\,(f_*Y) = -h(X,Y)$$

がなりたつ．

定義 3. 中心アファインはめ込み $f : M \to \mathbb{R}^4$ がその双対はめ込みと合同になるとき，すなわち，体積を保存する線型写像 $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_4$ が存在して $f^* = Lf$ となるとき，f を**自己双対** (self-dual) であるという．

例 4. 下で定義するクリフォード・トーラス $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ と二次曲面 $\phi_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ は自己双対中心アファインはめ込みである．さらに，これらはつぎに定義する意味で極小にもなっている．

$$\phi(u^1, u^2) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos(u^1 + u^2) \\ \sin(u^1 + u^2) \\ \cos(-u^1 + u^2) \\ \sin(-u^1 + u^2) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$\phi_0(u^1, u^2) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} u^1 + u^2 \\ -u^1 + u^2 \\ \sqrt{2}u^1u^2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

定義 5. 中心アファインはめ込み $f : M \to \mathbb{R}^4$ に対して

$$H := \frac{1}{2}\operatorname{tr} S$$

を**アファイン平均曲率** (affine mean curvature) とよび，アファイン平均曲率が恒等的に消えているとき，f は**極小** (minimal) であるという．

まず，はめ込みがグラフで与えられている場合，すなわち，

$$\mathbb{R}^2 \supset M \ni u = (u^1, u^2) \mapsto f(u) = {}^t(u^1, u^2, \varphi(u), \psi(u)) \in \mathbb{R}^4$$

とかけているとき，f のアファイン平均曲率を φ, ψ を用いて書き下しておく.

命題 6. 上で与えられる中心アファインはめ込み $f : M \to \mathbb{R}^4$ のアファイン平均曲率は

$$H = -\frac{1}{4} |\det\nolimits_{\theta^0} h^0|^{1/4} \{ |\det\nolimits_{\theta^0} h^0|^{1/4} \triangle_{h^0} |\det\nolimits_{\theta^0} h^0|^{-1/4} + \mathrm{tr}_{h^0} T^0 - \mathrm{tr}\, S^0 \}$$

に，つぎを代入したものとして与えられる：

$$\begin{aligned}
\theta^0 &:= (\psi - \sum_{l=1}^{2} u^l \partial_l \psi) du^1 \wedge du^2, \\
h^0_{ij} &:= \frac{(\psi - \sum_{l=1}^{2} u^l \partial_l \psi)\partial_i \partial_j \varphi - (\varphi - \sum_{l=1}^{2} u^l \partial_l \varphi)\partial_i \partial_j \psi}{\psi - \sum_{l=1}^{2} u^l \partial_l \psi}, \\
T^0_{ij} &:= (\psi - \sum_{l=1}^{2} u^l \partial_l \psi)^{-1} \partial_i \partial_j \psi, \\
S^0 &:= 0.
\end{aligned}$$

ここで，$\triangle_{h^0}$ は h^0 に関するラプラス作用素をあらわす.

極小中心アファインはめ込みの変分法的な意味は，つぎのように理解できる：

命題 7. 中心アファインはめ込み $f : M \to \mathbb{R}^4$ に対して，極小であることと，下の条件をみたす任意の変分 $F : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^4$ に関して面積汎関数の臨界点であること，すなわち，f_t により誘導される面積要素 θ_t に対して，

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_M \theta_t = 0$$

がなりたつことは同値である．ここで，F は

$$\begin{cases} f_t := F(\cdot, t) : M \to \mathbb{R}^4 \quad \text{は中心アファインはめ込み}, \\ f_0 = f, \\ f_t = f \quad \text{があるコンパクト集合の外で成立}, \\ \text{変分ベクトル場を} \quad F_*\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)_{(x,0)} = f_* V_x + v(x)\xi_x + \nu(x) f(x) \\ \text{としたとき}, \quad \nu = 0 \end{cases}$$

をみたすと仮定する．

なお，大浦 [6] は第 2 変分公式を導出し，楕円型放物面は上の変分問題の極大点であることを示した．

中心アファインはめ込みのコダッチの方程式より，$(0,3)$ テンソル場 ∇h は対称になることがわかる．一般に，このような性質をもつねじれのないアファイン接続と擬リーマン計量の組は**統計構造** (statistical structure) あるいはコダッチ構造とよばれ，情報幾何学等においても興味をもたれている．統計構造とアファイン平均曲率の関係はつぎのように与えられる．

統計構造 (∇, h) に対して，スカラー曲率をつぎで定義する：

$$\sigma := \operatorname{tr}_h \operatorname{Ric}^\nabla.$$

ここで，$\operatorname{Ric}^\nabla(Y, Z) := \operatorname{tr}\{X \mapsto R^\nabla(X, Y)Z\}$，$R^\nabla$ は ∇ の曲率テンソル場である．R^∇ や $\operatorname{Ric}^\nabla$ と異なり，スカラー曲率は ∇ と h の両方の情報をもった曲率であることに注意する．

統計構造 (∇, h) が中心アファインはめ込み f から誘導されたものとする (統計構造に対して，いつこのような f が存在するのかについては，Matsuzoe [3] 参照)．ガウスの方程式 $R(X,Y)Z = h(Y,Z)SX - h(X,Z)SY - T(Y,Z)X + T(X,Z)Y$ より，

$$\operatorname{Ric}^\nabla(Y, Z) = h(Y, Z)2H - h(SY, Z) - T(Y, Z)$$

となることからつぎを得る：

命題 8. 中心アファインはめ込み $f : M \to \mathbb{R}^4$ から誘導される統計構造のスカラー曲率は，f のアファイン平均曲率の 4 倍に等しい：

$$\sigma = 4H.$$

$\mathbb{R}^4$ 内のアファイン平均曲率一定の自己双対中心アファイン曲面は，つぎのように小域的には具体的に決定できる．ここでは，アファイン基本形式が不定値の場合を述べることにする．

定理 9. 2つの1変数関数 μ, ν に対して，

$$f(u^1, u^2) := e^{\mu(u^1)+\nu(u^2)}\phi_0(u^1, u^2)$$

は不定値のアファイン基本形式をもつ極小自己双対中心アファインはめ込みである．逆に，不定値のアファイン基本形式をもつ極小自己双対中心アファインはめ込みは上の形で与えられる．ここで，ϕ_0 は (6) で与えられる二次曲面である．

定理 10. 2つの1変数関数 μ, ν に対して，

$$f(u^1, u^2) := \frac{\exp\left\{\bigl(\mu(u^1) - \nu(u^2)\bigr)/2\right\}}{\int^{u^1} \exp\mu(t)dt + \int^{u^2} \exp\bigl(-\nu(t)\bigr)dt}\phi_0(u^1, u^2)$$

は不定値のアファイン基本形式をもつアファイン平均曲率 -1 の自己双対中心アファインはめ込みである．逆に，不定値のアファイン基本形式をもつアファイン平均曲率 -1 の自己双対中心アファインはめ込みは上の形で与えられる．ここで，ϕ_0 は (6) で与えられる二次曲面である．

これらの定理の証明はつぎの補題 11, 12 から得られる：

補題 11. 不定値のアファイン基本形式をもつ自己双対中心アファインはめ込み $f : M \to \mathbb{R}^4$ は，ある関数 ω を用いて $f = e^{\omega}\phi_0$ とかける．

補題 12. 中心アファインはめ込み $f = e^{\omega}\phi_0 : M \to \mathbb{R}^4$ のアファイン平均曲率は

$$H = -e^{-2\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u^1 \partial u^2}$$

で与えられる．

$H = 0$, $H = -1$ のとき，上の微分方程式 (波動方程式，リュービル方程式) が解けて，定理が得られる．

また，補題 12 はつぎのように拡張できる：

命題 13. $f_0 : M \to \mathbb{R}^4$ を中心アファインはめ込みとし，h^0 をそのアファイン基本形式，H^0 をアファイン平均曲率とする．$f := e^{\varphi} f_0 : M \to \mathbb{R}^4$ のアファイン平均曲率 H はつぎで与えられる：

$$H = e^{-2\varphi} H^0 - \frac{1}{2} e^{-2\varphi} \triangle_{h^0} \varphi.$$

参考文献

[1] Furuhata, H., Minimal centroaffine immersions of codimension two, to appear in Bull. Belgian Math. Soc.

[2] Furuhata, H. and Kurose, T., Self-dual centroaffine surfaces of codimension two with constant affine mean curvature, Hokkaido Univ. Preprint Ser. ♯460.

[3] Matsuzoe, H., On realization of conformally-projectively flat statistical manifolds and the divergences, Hokkaido Math. J. **27**(1999), 409 – 421.

[4] Nomizu, K. and Sasaki, T., Centroaffine immersions of codimension two and projective hypersurface theory, Nagoya Math. J. **132**(1993), 63 – 90.

[5] 野水克己，佐々木武, アファイン微分幾何学, 裳華房, 1994.

[6] 大浦充樹, 余次元 2 の極小中心アファイン曲面の第 2 変分公式, 1998 年度熊本大学修士論文.