余次元２の極小中心アファインはめ込み

古畑　仁
東北大学大学院情報科学研究科

世界は「図形」にみちあふれている．微分幾何学の歴史の表舞台に登場する「図形」はその中のごくわずかである．我々は今までかえりみられなかったものに光をあてたいと思う．今まで調べられていなかった「図形」を，ずっと興味をもたれてきた「図形」の新しい仲間としてクローズアップしたい．では，どのような視点から「新しい仲間」を探してくればよいだろうか．

ここではアファインはめ込みの幾何学でとらえられる「図形」を考える．アファインはめ込みの幾何学は長い歴史をもち，すでにブラシュケ [1] の教科書に多くの成果がまとめられている．野水・佐々木 [5] は，近代的な言葉で古典的な結果をとらえ，さらに広い枠組みで幾何学が展開できる可能性を示唆している．この本の冒頭によりアファイン微分幾何学の流れを眺望できるだろう．また，近年この分野の論文は爆発的な量にのぼっているが，ベルリンのグループにより最新の情報がホームページ [6] にまとめられている．ほとんど文献を挙げていないので，こちらを参照していただきたい．

上に述べたような状況であるにもかかわらず，アファインはめ込みの概念はまだ馴染み深いものではあるまい．本講演では，[2] の内容の一部と最近得られた結果を述べる予定でいるが，ここでは，余次元 2 の極小中心アファインはめ込みの定義に多くの誌面を割いた．アファインはめ込みをどのように述べるかはその問題意識により違ってくる．実際，[3] では，アファイン接続の付随した多様体の間の射として，等接続的アファインはめ込み (connection-preserving affine immersion) なる言葉を使った．ここでは，Nomizu-Sasaki [4] の提唱した法ベクトル場を固定して考える立場をとっている (§1).

§2 では余次元 2 の極小中心アファインはめ込みがノンパラメトリックの場合に，どのような微分方程式を満足するかを調べる．複雑な非線型の 4 階偏微分方程式が導出される．

クリフォード・トーラスは単位球面 S^3 内の平坦なコンパクト極小曲

面であるが，$\mathbb{R}^4$ へのはめ込みと見なしたとき，我々の意味で極小中心アファインはめ込みである．§3 では，このクリフォード・トーラスと同じ誘導接続とアファイン基本形式をもつ余次元 2 の極小中心アファインはめ込み全体を調べる．このモジュライ空間は簡単な線型の 1 階偏微分方程式系の解空間と対応がつけられる．これは，複雑な非線型方程式の解の中で，簡単な構造をもったよいクラスがあることを意味している．

1　定義

M を 向きのついた n 次元多様体，$\mathbb{R}^{n+2} := (\mathbb{R}^{n+2}, D, \mathrm{Det})$ を $n+2$ 次元のアファイン空間とその標準的な接続および体積要素とする．断らない限り多様体，写像などはなめらかとし，主に局所的な議論をする．

$\mathbb{R}^{n+2}$ と $\mathbb{R}^{n+2}$ の接空間 $T_p\mathbb{R}^{n+2}$ をつぎの対応で同一視すると約束し，以下いちいち断らない：

$$\mathbb{R}^{n+2} \ni p = {}^t(p^1, \dots, p^{n+2}) \mapsto \sum_{i=1}^{n+2} p^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \in T_p\mathbb{R}^{n+2}.$$

$f : M \to \mathbb{R}^{n+2}$ を余次元 2 のはめ込みとし，$f^{-1}T\mathbb{R}^{n+2}$ に D から誘導される標準的なアファイン接続を同じ記号 D であらわすことにする．

定義 1.1.　2 つのはめ込み $f_1, f_2 : M \to \mathbb{R}^{n+2}$ が**合同** (congruent) であるとは，特殊線型変換 $A \in SL(n+2; \mathbb{R})$ が存在して $f_2 = Af_1$ とかけることをいう．

$f : M \to \mathbb{R}^{n+2}$ が Nomizu-Sasaki [4] の意味で正規化された余次元 2 のブラシュケ中心アファインはめ込み (ここではそれをたんに中心アファインはめ込みとよぶ) であることをつぎのように定義する．

定義 1.2.　余次元 2 のはめ込み $f : M \to \mathbb{R}^{n+2}$ が**中心アファインはめ込み** (centroaffine immersion) であるとは，つぎの (1.1), (1.4) をみたす f に沿った $\mathbb{R}^{n+2}$ 上のベクトル場 $\xi \in \Gamma(f^{-1}T\mathbb{R}^{n+2}) = C^\infty(M, \mathbb{R}^{n+2})$ (**ブラシュケ法ベクトル場**とよぶ) が存在するときをいう．

1. 任意の点 $x \in M$ に対して直和分解

$$T_{f(x)}\mathbb{R}^{n+2} = f_* T_x M \oplus \mathbb{R}\xi_x \oplus \mathbb{R}f(x) \tag{1.1}$$

をもつ.

2. $X, Y, X_j \in \Gamma(TM)$ に対して

$$\begin{cases} D_X f_* Y &= f_* \nabla_X Y + h(X,Y)\xi + T(X,Y)f, \\ D_X \xi &= -f_* SX + \tau(X)\xi + P(X)f, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\theta(X_1, \dots, X_n) := \mathrm{Det}(f_* X_1, \dots, f_* X_n, \xi, f) \tag{1.3}$$

で，M に誘導されるねじれのないアファイン接続 ∇，対称 $(0,2)$ テンソル場 h (**アファイン基本形式**という) と T，$(1,1)$ テンソル場 S (**アファイン形作用素**という)，1 形式 τ と P，体積要素 θ がつぎをみたす：

$$\begin{cases} h \text{ は非退化}, \\ \nabla\theta = 0, \\ \theta = \omega_h \text{ となり，正の向きを与える}, \\ \mathrm{tr}_h\{(X,Y) \mapsto T(X,Y) + h(SX,Y)\} = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

ここで，ω_h は擬リーマン計量 h の体積要素をあらわす.

まず，f に対して，上の条件をみたす ξ は一意的に定まること，上の条件をみたす ξ が存在することは強い制約ではないことに注意する．すなわち，つぎがなりたつ：

補題 1.3 (Nomizu-Sasaki [4]). (i)　中心アファインはめ込み $f: M \to \mathbb{R}^{n+2}$ に対して，$\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(f^{-1}T\mathbb{R}^{n+2})$ が f のブラシュケ法ベクトル場ならばこれらは一致する：$\xi_1 = \xi_2$.
(ii)　$f: M \to \mathbb{R}^{n+2}$ に対して，(1.1)，(1.4) の第 1 の条件をみたす $\xi_0 \in \Gamma(f^{-1}T\mathbb{R}^{n+2})$ があれば，ブラシュケ法ベクトル場 ξ が存在する．すなわち，f は中心アファインはめ込みである.

注意 1.4. (1.4) の条件 $\nabla\theta = 0$ は $\tau = 0$ と，$\theta = \omega_h$ は $|\det_\theta h| = 1$ と，それぞれ同値である．ここで，$\det_\theta h$ は $\theta(e_1, \dots, e_n) = 1$ なる基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ に関する行列 h の行列式をあらわす.

以上の準備のもとで，極小中心アファインはめ込みを定義しよう．

定義 1.5. $f : M \to \mathbb{R}^{n+2}$ を中心アファインはめ込みとする．f が**極小** (minimal) であるとは，アファイン形作用素のトレースが恒等的に消えていることをいう：$\operatorname{tr} S = 0$.

命題 1.6. 中心アファインはめ込み $f : M \to \mathbb{R}^{n+2}$ に対して，極小であることと，下の条件をみたす f の任意の変分 $F : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^{n+2}$ に関して体積汎関数の臨界点であること，すなわち，f_t により誘導される体積要素 θ_t に対して，

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_M \theta_t = 0$$

がなりたつことは同値である．ここで，F は

$$\begin{cases} f_t := F(\cdot, t) : M \to \mathbb{R}^{n+2} \quad \text{は中心アファインはめ込み}, \\ f_0 = f, \\ f_t = f \quad \text{があるコンパクト集合の外で成立}, \\ \text{変分ベクトル場を} \quad F_* \left(\dfrac{\partial}{\partial t} \right)_{(x,0)} = f_* V_x + v(x) \xi_x + \nu(x) f(x) \\ \text{としたとき，} \quad \nu = 0 \end{cases}$$

をみたすと仮定する．

2 ノンパラメトリックタイプの方程式

$\mathbb{R}^4$ 内の曲面を考察しよう．この節でははめ込みがグラフで与えられている場合，すなわち，

$$\mathbb{R}^2 \supset D \ni x = (x^1, x^2) \mapsto f(x) = {}^t(x^1, x^2, \varphi(x), \psi(x)) \in \mathbb{R}^4$$

とかけているとき，f が極小中心アファインはめ込みになるために φ, ψ がみたすべき条件を記述する．

はめ込み f が与えられたとき，ブラシュケ法ベクトル場 ξ をどのように計算したらよいだろうか．まず，仮の法ベクトル場として $\xi_0 :=$

${}^t(0,0,1,0) \in \mathbb{R}^4$ をとる．$\partial_i := \partial/\partial x^i$ とかくとき，4×4 行列 $\Omega(x) := (f_*\partial_1, f_*\partial_2, \xi_0, f)$ を考え，領域 $D_0 := \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, \det\Omega(x) > 0\}$ 上で，(f, ξ_0) に対して (1.2) のようにして定義される諸量を ∇^0, h^0, T^0, $S^0 = 0$, $\tau^0 = 0$, $P^0 = 0$, θ^0 とする．以下，$D := \{x \in D_0 | h^0(x)$ は非退化$\}$ 上で考察する．上の諸量は，φ, ψ を用いて計算できることに注意する．

つぎに，$\xi = \lambda^{-1}(\xi_0 + af + f_*U)$ がブラシュケ法ベクトル場になるように D 上の関数 λ, a とベクトル場 U をえらぶ．考察 (4.7) と条件 (1.4) をもちいると，つぎのように計算できる：

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\lambda & = & |\det_{\theta^0} h^0|^{-1/4}, \\
U & = & \mathrm{grad}_{h^0} \log\lambda, \\
a & = & \dfrac{1}{4}(\mathrm{tr}_{h^0} T^0 + \mathrm{tr}\, S^0 - \lambda^{-1}\triangle_{h^0}\lambda).
\end{array}
\right.
\tag{2.1}
$$

ここで，grad_{h^0}, $\triangle_{h^0}$ は計量 h^0 に関する勾配およびラプラス作用素をあらわしている．これを導くには，$\tau^0 = 0$ だけをもちいて，あえて S^0 も残しておいた．このとき，$\mathrm{tr}\, S = 0$ なる条件はつぎのようにあらわすことができる．

定理 2.1. $f : D \to \mathbb{R}^4$ を上の通りとする．このとき，f が極小中心アファインはめ込みであるための必要十分条件は，φ, ψ が D 上でつぎの方程式をみたすことである：

$$
|\det_{\theta^0} h^0|^{1/4}\triangle_{h^0}|\det_{\theta^0} h^0|^{-1/4} + \mathrm{tr}_{h^0} T^0 - \mathrm{tr}\, S^0 = 0.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\theta^0 & = & (\psi - x^l\psi_l)dx^1 \wedge dx^2, \\
h^0_{ij} & = & (\psi - x^l\psi_l)^{-1}\left\{(\psi - x^l\psi_l)\varphi_{ij} - (\varphi - x^l\varphi_l)\psi_{ij}\right\}, \\
T^0_{ij} & = & (\psi - x^l\psi_l)^{-1}\psi_{ij}, \\
S^0 & = & 0.
\end{array}
\right.
$$

ここで，$\psi_l = \partial\psi/\partial x^l$ などと略記し，アインシュタインの記法を用いている．

第 2 式以降を第 1 式に代入しても，一般にきれいな形になることは期待できないので，このままにしておいた．

3　特徴的な例

例 3.1. $\mathbb{R}^4$ 内の超平面 $\{x^4 = 1\}$ 上の 2 次曲面

$$\phi_0(x^1, x^2) := (x^1, x^2, \frac{1}{2}\{(x^1)^2 - (x^2)^2\}, 1)$$

は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^4$ への極小中心アファインはめ込みである．定理 2.1 の方程式をみたしていることが簡単に確かめられる．

例 3.2. クリフォード・トーラス

$$\phi(x^1, x^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\sqrt{2}x^1, \sin\sqrt{2}x^1, \cos\sqrt{2}x^2, \sin\sqrt{2}x^2)$$

は単位球面 S^3 内の平坦なコンパクト極小曲面であり，かつ $\mathbb{R}^4$ への極小中心アファインはめ込みにもなっている．

実際，クリフォード・トーラス ϕ のブラシュケ法ベクトル場，誘導接続，アファイン基本形式，アファイン形作用素はつぎで与えられる：

$$\begin{aligned} &\xi^\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\sqrt{2}x^1, -\sin\sqrt{2}x^1, \cos\sqrt{2}x^2, \sin\sqrt{2}x^2), \\ &\begin{cases} \nabla^\phi_{\partial_i}\partial_j = 0, \\ h^\phi = (dx^1)^2 - (dx^2)^2, \end{cases} \\ &S^\phi = dx^1 \otimes \partial_1 - dx^2 \otimes \partial_2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

一般に，コダッチの方程式 (4.2) より，$(0, 3)$ テンソル場 ∇h は対称になることがわかる．このような性質をもつねじれのないアファイン接続と擬リーマン計量の組は統計構造 (statistical structure) とよばれ，情報幾何学においても興味をもたれている．ここでは，中心アファインはめ込みの誘導接続とアファイン基本形式の組のなす統計構造 (∇, h) に注目し，つぎの問題を考える：**クリフォード・トーラスと同じ統計構造を誘導する極小中心アファインはめ込みはどのくらいあるのか．**

クリフォード・トーラスと同じ統計構造を誘導する $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^4$ への極小中心アファインはめ込みの合同類全体のなす集合を $\mathfrak{M}_\phi$ とかく：

$$\mathfrak{M}_\phi := \left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \\ : \text{極小中心アファインはめ込み} \end{array} \middle| \begin{array}{l} \nabla^f = \nabla^\phi \\ h^f = h^\phi \end{array} \right\} / SL(4; \mathbb{R}).$$

このとき，つぎがなりたつ．

定理 3.3. $\mathfrak{M}_\phi$ から線型空間 $\mathfrak{W}$ への全単射が存在する：

$$\mathfrak{M}_\phi \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{W}.$$

ここで，$\mathfrak{W}$ はつぎの方程式系をみたす $\mathbb{R}^2$ 上の関数の組 (λ, μ) 全体をあらわす：

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x^1} = \frac{\partial \mu}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial x^2} = \frac{\partial \mu}{\partial x^1}. \tag{3.2}$$

証明の方針. 全単射はつぎのようにして構成される．$[f] \in \mathfrak{M}_\phi$ に対して，(1.2) で定義される諸量がつぎの形でかけることがわかる．

$$S = \begin{bmatrix} -\lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} &T = \lambda\{(dx^1)^2 + (dx^2)^2\} + 2\mu dx^1 dx^2, \\ &P = 0. \end{aligned}$$

コダッチの方程式 (4.3), (4.4) より，この (λ, μ) は (3.2) をみたす．この対応が $\mathfrak{M}_\phi$ から $\mathfrak{W}$ への写像でかつ全単射であることが証明できる． □

この方法で，クリフォード・トーラス ϕ は $(-1, 0) \in \mathfrak{W}$ と，例 3.1 の ϕ_0 は $(0, 0) \in \mathfrak{W}$ と対応がついている．このような現象を観察すると，(1) 実数 $t \in (0, 1)$ に対して，$(-t, 0) \in \mathfrak{W}$ に対応するはめ込みの族 $[f_t] \in \mathfrak{M}_\phi$ はどのようなものか，(2) $\mathfrak{M}_\phi$ の元で，閉曲面（トーラス）になるものはどのくらい存在するか，など素朴でかつ興味深い問題が考えられる．

4 付録

ここでリストアップする公式は，アファインはめ込みの幾何学をするときに，常に手元におく必要があるものである．便宜上ここに掲載する．

中心アファインはめ込み $f : M \to \mathbb{R}^{n+2}$ に対して，ガウス，コダッチ，リッチの各方程式はつぎで与えられる：任意の $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ に対

して，

(4.1) $R(X,Y)Z = h(Y,Z)SX - h(X,Z)SY - T(Y,Z)X + T(X,Z)Y,$

(4.2) $(\nabla_X h)(Y,Z) = (\nabla_Y h)(X,Z),$

(4.3) $(\nabla_X T)(Y,Z) + h(Y,Z)P(X) = (\nabla_Y T)(X,Z) + h(X,Z)P(Y),$

(4.4) $(\nabla_X S)Y + P(X)Y = (\nabla_Y S)X + P(Y)X,$

(4.5) $h(X,SY) = h(Y,SX),$

(4.6) $T(X,SY) - T(Y,SX) = dP(X,Y),$

がなりたつ．ここで，R は ∇ の曲率テンソル場をあらわす．

補題 1.3 および定理 2.1 の証明はつぎの考察が本質的に使われる：一般に (f,ξ_j) から (1.2) のように誘導される諸量を ∇^j, h^j, T^j, S^j, τ^j, P^j とかく．$\lambda\xi_2 = \xi_1 + af + f_*U$ $(a, \lambda \in C^\infty(M), \lambda \neq 0, U \in \Gamma(TM))$ とあらわしたとき，つぎがなりたつ：

$$
(4.7)\quad \left\{
\begin{array}{rcl}
\nabla^2_X Y &=& \nabla^1_X Y - h^1(X,Y)U, \\
T^2(X,Y) &=& T^1(X,Y) - ah^1(X,Y), \\
h^2(X,Y) &=& \lambda h^1(X,Y), \\
\tau^2(X) &=& \tau^1(X) - d\log\lambda(X) + h^1(X,U), \\
\lambda P^2(X) &=& P^1(X) + T^1(X,U) \\
 & & \qquad +da(X) - ah^1(X,U) - a\tau^1(X), \\
\lambda S^2 X &=& S^1 X + \tau^1(X)U - aX - \nabla^1_X U + h^1(X,U)U.
\end{array}
\right.
$$

参考文献

[1] Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Springer, 1923.

[2] Furuhata, H., Minimal centroaffine immersions of codimension two, Preprint, 1998.

[3] Furuhata, H. and Matsuzoe, H., Holomorphic centroaffine immersions and the Lelieuvre correspondence, Result. Math. **33**(1998), 294 – 305.

[4] Nomizu, K. and Sasaki, T., Centroaffine immersions of codimension two and projective hypersurface theory, Nagoya Math. J. **132**(1993), 63 – 90.

[5] 野水克己，佐々木武, アファイン微分幾何学, 裳華房, 1994.

[6] http://www.math.tu-berlin.de/geometrie/ADG-index.html