

“アファイン微分幾何学”小研究集会 問題集

浦川 肇 urakawa@math.is.tohoku.ac.jp

古畑 仁 furuhata@math.is.tohoku.ac.jp

以下の問題は，1996年12月16日から18日に東北大学大学院情報科学研究科で行われた研究集会において提出された問題である：

1. 甘利俊一 (amari@zoo.riken.go.jp)

- 双対接続をもつ n 次元多様体 $\{M, g, \nabla, \nabla^*\}$ を考える．これが m 次元 ($m > n$) の双対平坦な多様体 $\{\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{\nabla}, \tilde{\nabla}^*\}$ の n 次元部分空間として実現できるための条件は何か．また一般に $m = \infty$ である必要があれば，有限次元の m で実現できるような多様体を特性づける量は何か？
- S^1 上の滑らかな確率密度の全体 $\{p(x) > 0\}$ は， S^1 上の滑らかな変形 (等積) のなす多様体と同相である (Friedrichs) . S^n 上ではどうか . \mathbb{R}^n 上ではどうか .
- Riemann 空間 $\{M, g\}$ が与えられたときに，これに3階対称テンソル T を導入して，双対平坦の空間 $\{M, g, \nabla, \nabla^*\}$ とすることが常に可能か . またこれが unique でないとすると，このような空間のクラスはどのような特徴を持つか .
- large deviation と双対接続構造 .
- 確率分布族 $\{p(x, \xi)\}$ のなす空間は統計多様体 $\{M, g, \nabla, \nabla^*\}$ をなす . しかれば統計多様体を与えられたときに，これが対応する確率分布族を持つための条件は何か . 双対平坦の多様体のときはどうか .

2. 佐々木武 (sasaki@math.s.kobe-u.ac.jp)

- 射影平坦構造をもつリーマン面上の閉曲線の変曲点の最小個数を評価せよ .
- 同じように，アファイン頂点の個数を評価せよ . 変曲点が孤立しているとき，アファイン頂点の個数と変曲点の個数の間に関係があるか .
- アファイン平面上の曲線の運動方程式

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (1 + kp)x''$$

の解の (時間大域的) 存在を示せ . ただし， u は曲線族のパラメータ (時間)， x'' はアファイン法線， k はアファイン曲率， p はアファイン支持関数を表す .

3. 黒瀬 俊 (sm036447@ssat.fukuoka-u.ac.jp)

- Riemann 多様体を統性多様体とみたとき，一般化された共形平坦なもの (松添氏の述語では $(1, -1)$ -共形平坦なもの) は，Riemann 幾何の意味で共形平坦なものに限る . それでは，松添氏が定義した geometric divergence は，共形平坦な Riemann 多様体上では，その幾何とどのようにかかわっているのだろうか .
- affine 極小曲面上の affine 計量に対する等温座標系は，(Euclidean の場合のように) 簡単に存在が示せるか .

(c) 統性多様体 (M, ∇, h) の曲率テンソル R に対して,

$$K(X, Y, Z, W) = h(R(X, Y)Z, W)$$

とすると

- i. $K(X, Y, Z, W) = -K(Y, X, Z, W)$,
- ii. $K(X, Y, Z, W) + K(Y, Z, X, W) + K(Z, X, Y, W) = 0$,
- iii. $K(X, Y, Z, W) + K(Y, W, Z, X) + K(W, X, Z, Y) = 0$

をみたま。そこで i, ii, iii の条件をみたま $(0, 4)$ テンソル全体の構造を調べよ。

4. 清水 悟 (FAX: 022-217-7713)

- (a) 完備ヘッセ多様体 M の接ベクトル束 T_M はスタイン多様体となるか? 例えば, Ω を \mathbb{R}^n 内の直線を含まない凸領域, Γ を Ω に作用するアフィン不連続群とすると, $M = \Omega/\Gamma$ の接ベクトル束 $T_M = T_\Omega/\Gamma$ はスタイン多様体となるか?
- (b) ヘッセ計量の安定性 コンパクトヘッセ多様体 M の (アフィン構造の変形の意味での) 微小変形は再びヘッセ多様体の構造をもつか? M が双曲的なとき, つまり M の普遍被覆が \mathbb{R}^n 内の直線を含まない凸領域になるときに対しては, 肯定的な解答が Koszul によって与えられている。また複素幾何における関連事実として, ケーラー計量の安定性が知られている。
- (c) コンパクトヘッセ多様体の例を構成すること。双曲的なコンパクトヘッセ多様体と平坦なコンパクトヘッセ多様体の直積として与えられるもの以外の例としては, 久賀の fiber variety の構成法を利用して構成されるファイバー構造を持つものがある。そのようなもの以外のもの, 例えばファイバー構造を持たないものの例が, アフィン構造の変形を利用して構成できないか?

5. 旦代晃一 (tandai@cc.okayama-u.ac.jp)

- (a) 情報幾何学の構成について 現在の甘利氏らによる情報幾何学の構成ははじめにリーマン計量が期待値を用いて導入されるため、極めて簡明である。しかし、期待値を取るために、計量は標本空間と一応切り離された量となる。統計学の目的から言えば、情報量を失わないためにも、期待値はなるべく目的に間近な所で取るのが望ましい。確率密度関数 $f(x; \theta)$ が与えられると、これを保つためには標本空間 (点 x の空間) の上では等積変換に限定されるが、 x の空間と θ の空間の直積の上でヘッシアン計量を入れ、その積空間上の幾何を土台に、情報幾何を展開できる可能性が存在するのではないだろうか。

6. 糸川 銚 (itokawa@dontaku.fit.ac.jp)

- (a) N を固定された完備リーマン多様体で、次の“強い意味”で有界幾何を持つとする。
すなわち

i. $\sup |K_N| < \infty$

- ii. N の単射半径は bounded away from 0.

例えば、 N がコンパクトな場合、 N が等質空間の場合等。Cortlette の定理によれば、このとき、任意の $s_0 > -\infty$, $h_1 > 0$ に対して

$$\mathcal{M}(s_0, h_1) = \{M; M \text{ は } N \text{ のコンパクト部分多様体, } \text{scal}_M \geq s_0, |H_M| \leq h_1\}$$

は有限個の diffeotopy types しか含まない。このことに関しては、Itokawa, An injectivity radius estimate and stability of minimal submanifolds (to appear in Kyushu J. Math.) 参照。それでは $h_1 = 0$ としたとき、つまり

$$\mathcal{M}(s_0, 0) = \{M; M \text{ は } N \text{ のコンパクト極小多様体, } \text{scal}_M \geq s_0\}$$

は有限個の congruence types しか含まないのではないか? 特に $M = S^n, CP^n$ 等特別な場合はどうか?

- (b) M を偶数次元単連結コンパクト多様体で $0 < K_M \leq 1$ をみたし、 M の体積が $V(M) \leq 4/3 V(S^n(1))$ となるとき、 M は S^n に同相である。しかし、手元の例を調べる限り、 $0 < K_M \leq 1$ を満たす多様体で $S^n(1)$ の次に小さいものは次元 4 における CP^n でその体積は $2V(S^4(1))$ である。そこで、 $0 < K_M \leq 1$ かつ $V(M) \leq 2V(S^n(1))$ ならば M は S^n に同相かあるいは $n = 4$ で M は CP^2 に等長まで言えるのではないか?
- (c) (D.Gromoll) コンパクトアファイン平坦多様体に現れる基本群を決定せよ。