ケーラー多様体から擬ユークリッド空間への
等長的多重調和はめ込み

古畑　仁　　東北大 理（学振）

3 次元ユークリッド空間内の曲面論は幾何学の故郷である. とくに極小曲面は多くの人に興味をもたれてきた. その「よい」高次元化として多重調和はめ込みを考え, 極小曲面の古典理論を我々の場合に拡張する.

$\mathbf{R}^{N+P}$に擬ユークリッド計量 $(dX^1)^2+\cdots+(dX^P)^2-(dX^{P+1})^2-\cdots-(dX^{P+N})^2$ を与えたものを $\mathbf{R}^{N+P}_N$ で表す. $M=(M^m,g,J)$ を複素 m 次元ケーラー多様体とする. $\mathbf{R}^{N+P}_N$, M のレビ・チビタ接続をそれぞれ D, ∇ で表す. f を M から $\mathbf{R}^{N+P}_N$への等長はめ込みとし, αをその第 2 基本形式とする:

$$\alpha(X,Y):=D_Xf_*Y-f_*\nabla_XY, \qquad X,Y\in T_xM.$$

分解 $TM\otimes\mathbf{C}=T^{(1,0)}\oplus T^{(0,1)}$ に関するαの (p,q)-成分を$\alpha^{(p,q)}$とかく.

定義.　M から $\mathbf{R}^{N+P}_N$への等長はめ込み f が多重調和的であるとは,

$$\alpha^{(1,1)}\equiv 0$$

がなりたつときをいう.

これは次のそれぞれの条件と同値である.

$$\begin{aligned}
&\alpha(X,JY)=\alpha(JX,Y),\\
&A_\xi J=-JA_\xi,\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial z^\alpha\partial z^{\overline{\beta}}}=0.
\end{aligned}$$

ここで, A は f の形作用素, X, Y は M の接ベクトル, ξは f の法ベクトルで, $(z^\alpha):=(z^1,\ldots,z^m)$ は M の局所複素座標を表す.

たとえば, アンビエント空間 $\mathbf{R}^{N+P}_N$がとくに $\mathbf{C}^{N+P}_N$ の場合, M から $\mathbf{C}^{N+P}_N$への等長的正則はめ込みは多重調和的である.

定義より, 等長的多重調和はめ込みの平均曲率は 0 であることがただちにわかる. 逆に, 次がなりたつ. f を M から $\mathbf{R}^{N+P}_N$への等長

はめ込みとする．$N=0$ または $P=2m$ のとき, f の平均曲率が 0 ならば, f は多重調和的である ([3] 等).

さらに, ユークリッド空間内の極小曲面の場合と同様に次がなりたつ．ケーラー多様体 M は単連結と仮定する．M から $\mathbf{R}_N^{N+P}$への等長的多重調和はめ込み f に対して, M から $\mathbf{C}_N^{N+P}$への等長的正則はめ込みΦが存在して,

$$f=\sqrt{2}\mathrm{Re}\ \Phi$$

と表せる．とくに, f を変形して, M から $\mathbf{R}_N^{N+P}$への等長的多重調和はめ込みの１パラメーター族 $f_\theta=\sqrt{2}\mathrm{Re}\ (e^{\sqrt{-1}\theta}\Phi)$ が構成できることがわかる.

§ 多重調和はめ込みの分類問題

等長的多重調和はめ込みが与えられたときに, それと等長的な多重調和はめ込みを分類することは, 重要でかつ基本的な問題である. ケーラー多様体 M が単連結の場合は, E. Calabi [2] のアイディアを用いて, M から $\mathbf{R}_N^{N+P}$への充満な等長的多重調和はめ込みの合同類全体が複素行列の空間の中に自然に実現できることが示され, この問題に解答を与えることができる. (詳しくは, [5], [6], または, 日本数学会幾何学分科会講演アブストラクト（１９９４年９月於東京工業大学）内の論文参照.)

大域的な仮定の下での分類については次のことがわかる.

柱状定理. m 次元ケーラー多様体 M は完備であると仮定する. M から $\mathbf{R}_N^{N+P}$への等長的多重調和はめ込み f は, 相対退化次数νが $2m-2$ 以上ならば, $(2m-2)$-柱状である．とくに, f が実超曲面の場合はつねに $(2m-2)$-柱状である.

ここで, f の相対退化次数$\nu(x)$ は第２基本形式の核の実次元

$$\dim_{\mathbf{R}}\{X\in T_xM;\ \alpha(X,Y)=0,\quad Y\in T_xM\}$$

を表し, f が $(2m-2)$-柱状であるとは, 1 次元ケーラー多様体 N と等長はめ込み $f':N\to\mathbf{R}_N^{N+P-(2m-2)}$が存在して

$$\begin{array}{ccccc} M & = & N & \times & \mathbf{C}^{m-1}, \\ f & = & f' & \times & \mathrm{id}_{\mathbf{C}^{m-1}} \end{array}$$

のように分解することである.

この定理は, K. Abe and M. Magid [1] のアイディアを用いて証明される. 定理の後半部分は, 実余次元 1 の等長的多重調和はめ込みの相対退化次数が $2m-2$ 以上であることから得られる.

Bernstein 型定理 1 (T. Ishihara [8]). M を d 次元リーマン多様体とし, f を M から $\mathbf{R}_N^{N+d}$ への等長はめ込みで平均曲率が 0 と仮定する. M が完備ならば, f は全測地的である.

証明は, 第 2 基本形式のノルムのラプラシアンを計算する, S. Nishikawa [9] などと同様な方法が用いられる.

Bernstein 型定理 2. M を $\mathbf{C}^m$ と双正則なケーラー多様体とする. f を M から $\mathbf{R}_1^{1+P}$ への等長的多重調和はめ込みとする. このとき次がなりたつ. $\mathbf{R}_1^{1+P}$ の時間的単位定ベクトル e と正の定数 ϵ が存在して

$$
\begin{aligned}
|\langle e, \overline{\frac{\partial f}{\partial z^\alpha}}\rangle_{\mathbf{C}_1^{1+P}}|^2 &> 0, \\
|\langle e, \frac{\partial f}{\partial z^\alpha}\rangle_{\mathbf{C}_1^{1+P}}|^2 &\geq \epsilon |\langle \frac{\partial f}{\partial z^\alpha}, \overline{\frac{\partial f}{\partial z^\alpha}}\rangle_{\mathbf{C}_1^{1+P}}|, \qquad \alpha = 1, \ldots, m,
\end{aligned}
$$

ならば, f は全測地的である.

定理の条件は, M の接空間の像があまり広がらないことを要請している. また同じ結果がアンビエント空間がユークリッド空間のときもなりたつ. 証明は, F. J. M. Estudillo and A. Romero [4] のアイディアを用いる.

§ 多重調和はめ込みの存在問題

リーマン多様体からユークリッド空間への等長的極小はめ込みが存在するとき, リーマン多様体のリッチ曲率は半負定値であることがすぐにわかる. 逆にこのようなリーマン多様体が与えられたとき, 等長的極小はめ込みが存在するだろうか. 等長的極小はめ込みが存在するためのリーマン多様体の必要十分条件を求めることは重要な課題である.

この方面での古典的な結果は, G. Ricci-Curbastro による次の定理である. (M, g) を単連結な 2 次元リーマン多様体で負のガウス曲率 K をもつと仮定する. このとき, M から $\mathbf{R}^3$への等長的極小はめ込みが存在するための必要十分条件は, g を共形変形してできる計量$-Kg$ がガウス曲率 1 をもつことである. この結果を等長的多重調和はめ込みに対して拡張したい.

問題. 擬ユークリッド空間 $\mathbf{R}_N^{N+P}$ が与えられたとする. ケーラー多様体 M から $\mathbf{R}_N^{N+P}$への等長的多重調和はめ込みが存在するための M の必要十分条件を求めよ.

この問題について, 小域的な設定でもっとも簡単な場合について考える. まず, $\mathbf{R}_1^3$内の平均曲率 0 の空間的曲面のガウス曲率は非負であることに注意する.

定理. $M = (M^2, g)$ を単連結な 2 次元リーマン多様体とし, そのガウス曲率 K が正と仮定する. このとき, M から $\mathbf{R}_1^3$への平均曲率 0 の等長はめ込みが存在するための必要十分条件は次で与えられる. $\widehat{g} := Kg$ とし, $\widehat{g}$のガウス曲率を$\widehat{K}$とおくと, $\widehat{K} = -1$ がなりたつ.

この定理は初等的ではあるが, 文献が見あたらなかったので, ここで証明を与えることにする. まずそのためにいくつか準備をする.

e_1, e_2を TM の g に関する正規直交標構とし, θ^1, θ^2をその双対とする ($\theta^i(e_j) = \delta^i_j$). g のレビ・チビタ接続 ∇ の e_jに関する接続形式を$\omega = \omega^1_2$とかく ($\nabla e_j = \omega^i_j e_i$). このとき, 構造方程式は次のようにかける.

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= -\omega \wedge \theta^2, \\ d\theta^2 &= \omega \wedge \theta^1, \\ d\omega &= K\theta^1 \wedge \theta^2. \end{aligned}$$

また, $\theta := \theta^1 + \sqrt{-1}\theta^2$, $e := (1/2)(e_1 - \sqrt{-1}e_2)$ とおくとき,

$$\theta(e) = \overline{\theta}(\overline{e}) = 1, \quad \theta(\overline{e}) = \overline{\theta}(e) = 0, \quad \nabla e = -\sqrt{-1}\omega e$$

がなりたつ. このとき, 上の構造方程式をかきなおすと次のようになる ((M, g) の構造方程式).

$$\begin{aligned} d\theta &= \sqrt{-1}\omega \wedge \theta, && (1) \\ d\omega &= -\frac{K}{2\sqrt{-1}}\theta \wedge \overline{\theta}. && (2) \end{aligned}$$

定理を示すためには, 擬リーマン幾何学の範囲で部分多様体の基本定理を述べなくてはならない. f を M から $\mathbf{R}^3_1$への等長はめ込みとする. e_3を f の単位法ベクトルとすると, e_3は時間的である ($\langle e_3, e_3\rangle = -1$). その第 2 基本形式 $I\!I(X,Y)e_3 := D_X f_* Y - f_* \nabla_X Y$ の係数である M 上の対称 2 テンソル $I\!I$ も第 2 基本形式とよぶことにする. $I\!I$ に対して M 上の 1 形式 ω^3_j, αを

$$\begin{aligned} \omega^3_j(e_k) &:= I\!I(e_k, e_j), \\ \alpha &:= \omega^3_1 + \sqrt{-1}\omega^3_2 \end{aligned} \tag{3}$$

で定義する.

補題. $M = (M^2, g)$ を単連結な 2 次元リーマン多様体とする.
(ア) M から $\mathbf{R}^3_1$への等長はめ込み f が存在したとする. その第 2 基本形式 $I\!I$ に対して (3) で定義されるαは, 次のガウス方程式 (4), コダッチ方程式 (5) をみたす.
(イ) M 上の対称 2 テンソル $I\!I$ が与えられたとする. $I\!I$ に対して M 上の 1 形式αを (3) で定義する. αが (4), (5) をみたすと仮定すると, M から $\mathbf{R}^3_1$への等長はめ込みで, その第 2 基本形式が $I\!I$ となるものが存在する.

$$d\omega = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\alpha \wedge \overline{\alpha}, \tag{4}$$

$$d\alpha = \sqrt{-1}\omega \wedge \alpha. \tag{5}$$

このガウス方程式, コダッチ方程式は

$$\begin{aligned} d\omega &= -\ \omega^3_1 \wedge \omega^3_2, \\ d\omega^3_1 &= \ \omega^3_2 \wedge \omega, \\ d\omega^3_2 &= -\ \omega^3_1 \wedge \omega \end{aligned}$$

をかきなおしたものである. また, 比較のためにアンビエント空間が $\mathbf{R}^3$の場合をかいておく: $d\omega = \omega^3_1 \wedge \omega^3_2$, $d\omega^3_1 = \omega^3_2 \wedge \omega$, $d\omega^3_2 = -\omega^3_1 \wedge \omega$.

一方, f の平均曲率 H は, $\alpha(e)$ で与えられることに注意する. 実際, $2\alpha(e) = (\omega^3_1 + \sqrt{-1}\omega^3_2)(e_1 - \sqrt{-1}e_2) = \omega^3_1(e_1) + \omega^3_2(e_2) + \sqrt{-1}(\omega^3_2(e_1) - \omega^3_1(e_2)) = 2H$ となる.

定理の証明.

必要性.

平均曲率 0 の等長はめ込み $f : M \to \mathbf{R}^3_1$が存在したとする．補題 (ア) より, (4), (5) がなりたつ.

$\widehat{\theta} := \alpha$とおく．平均曲率が 0 であることとガウス曲率が正であることより, 0 にならない関数λが存在して$\widehat{\theta} = \lambda\overline{\theta}$とかける．$\widehat{g} := \widehat{\theta}\overline{\widehat{\theta}} = |\lambda|^2 g$ とおく．$\widehat{\theta}$と双対となる, $\widehat{g}$のユニタリー標構を$\widehat{e}$とし, $\widehat{g}$のレビ・チビタ接続の$\widehat{e}$に関する接続形式を$\widehat{\omega}$, ガウス曲率を$\widehat{K}$とする．$\widehat{\omega}$は実 1 形式であることに注意する．このとき, $(M, \hat{g})$ の構造方程式

$$
\begin{aligned}
d\widehat{\theta} &= \sqrt{-1}\widehat{\omega} \wedge \widehat{\theta}, && (6)\\
d\widehat{\omega} &= -\frac{\widehat{K}}{2\sqrt{-1}}\widehat{\theta} \wedge \overline{\widehat{\theta}} && (7)
\end{aligned}
$$

がなりたつ.

この$\widehat{K}$は Kg のガウス曲率になっている．実際, (2), (4) より

$$
-\frac{K}{2\sqrt{-1}}\theta \wedge \overline{\theta} = d\omega = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\widehat{\theta} \wedge \overline{\widehat{\theta}} = -\frac{|\lambda|^2}{2\sqrt{-1}}\theta \wedge \overline{\theta}
$$

となり, $|\lambda|^2 = K$ を得る.

(7), (4) より $d\widehat{\omega} = -(\widehat{K}/2\sqrt{-1})\alpha \wedge \overline{\alpha} = -\widehat{K}d\omega$ がわかり, (6), (5) とω, $\widehat{\omega}$ が実であることから$\omega = \widehat{\omega}$がわかる．これらから$\widehat{K} = -1$ となる.

十分性.

補題 (イ) よりガウス・コダッチの方程式 (4),(5) をみたす$\alpha = \omega_1^3 + \sqrt{-1}\omega_2^3$を構成すればよい．$\widehat{\theta} := \sqrt{K}\ \overline{\theta}$とし, 実関数$\phi$に対して $\widehat{\theta}_\phi := e^{\sqrt{-1}\phi}\widehat{\theta}$ と定義する．$\alpha := \widehat{\theta}_\phi$ とおき, (4),(5) をみたすようなϕが存在することを示す.

定義より$\alpha(e) = 0$ となるから, 等長はめ込みが構成されたとすると, その平均曲率は 0 になっていることに注意する.

$\widehat{e}_\phi$を$\widehat{\theta}_\phi$の双対である, $\widehat{g} = K\theta\overline{\theta} = \widehat{\theta}_\phi\overline{\widehat{\theta}_\phi}$ のユニタリー標構とする．$\widehat{g}$のレビ・チビタ接続の$\widehat{e}_\phi$に関する接続形式を$\widehat{\omega}_\phi$とする．また, $\widehat{e} := \widehat{e}_0$, $\widehat{\omega} := \widehat{\omega}_0$ とかく．このとき, $\widehat{\omega}_\phi$は実 1 形式で次をみたす

($(M,\hat{g})$ の構造方程式).

$$
\begin{aligned}
d\widehat{\theta}_\phi &= \sqrt{-1}\widehat{\omega}_\phi \wedge \widehat{\theta}_\phi, && (8)\\
d\widehat{\omega}_\phi &= -\frac{\widehat{K}}{2\sqrt{-1}}\widehat{\theta}_\phi \wedge \overline{\widehat{\theta}_\phi} = -\frac{\widehat{K}}{2\sqrt{-1}}\widehat{\theta} \wedge \overline{\widehat{\theta}}. && (9)
\end{aligned}
$$

定義と (2) より $(1/2\sqrt{-1})\alpha \wedge \overline{\alpha} = -(K/2\sqrt{-1})\theta \wedge \overline{\theta} = d\omega$ であるから, ガウス方程式 (4) は任意のϕについてなりたっている.

定義と (8) より $d\alpha = d\widehat{\theta}_\phi = \sqrt{-1}\widehat{\omega}_\phi \wedge \widehat{\theta}_\phi = \sqrt{-1}\widehat{\omega}_\phi \wedge \alpha$ であるから, コダッチ方程式 (5) は

$$\widehat{\omega}_\phi = \omega \tag{10}$$

と同値である.

以上から, (10) をみたすϕが存在することを示せば証明が終わる. $\widehat{K} = -1$ と (9), (2) より $d\widehat{\omega}_\phi = (1/2\sqrt{-1})\widehat{\theta} \wedge \overline{\widehat{\theta}} = -(K/2\sqrt{-1})\theta \wedge \overline{\theta} = d\omega$, とくに $d\widehat{\omega} = d\omega$ を得る. よって, 実関数ψが存在して$\widehat{\omega} - \omega = d\psi$ とかける. 一方, (8) より$\widehat{\omega}_\phi = \widehat{\omega} + d\phi$ がなりたつことがわかる. $\phi := -\psi$とおくと, $\widehat{\omega}_\phi$は (10) をみたす. □

参考文献

[1] Abe, K. and Magid, M. A., *Relative nullity foliations and indefinite isometric immersions*, Pacific J. Math. **124** (1986), 1–20.

[2] Calabi, E., *Quelques applications de l'analyse complexe aux surfaces d'aire minima*, Topics in complex manifolds (by Rossi, H.), Univ. Montreal, 1968, pp. 59–81.

[3] Dajczer, M. and Rodriguez, L., *Rigidity of real Kaehler submanifolds*, Duke Math. J. **53** (1986), 211–220.

[4] Estudillo, F. J. M. and Romero, A., *On maximal surfaces in the n-dimensional Lorentz-Minkowski space*, Geom. Dedicata **38** (1991), 167–174.

[5] Furuhata, H., *Construction and classification of isometric minimal immersions of Kähler manifolds into Euclidean spaces* , Bull. London Math. Soc. **26** (1994), 487–496.

[6] Furuhata, H., *Moduli space of isometric pluriharmonic immersions of Kähler manifolds into indefinite Euclidean spaces*, Preprint.

[7] Furuhata, H., *Isometric pluriharmonic immersions of Kähler manifolds into semi-Euclidean spaces*, Thesis, Tôhoku Univ., 1995.

[8] Ishihara, T., *Maximal spacelike submanifolds of a pseudoriemannian space of constant curvature* , Michigan Math. J. **35** (1988), 345–352.
[9] Nishikawa, S., *On maximal spacelike hypersurfaces in a Lorentzian manifold*, Nagoya Math. J. **95** (1984), 117–124.