佐々木構造をもつ統計多様体

古畑　仁（北海道大学大学院理学研究院）

本講演では，長谷川和泉，奥山幸彦，佐藤公威，Mohammad Hasan Shahid との共同研究 [3] の一部を紹介する．対象は断らない限り滑らかなもので，主に局所的な性質を問題にしている．

多様体とその捩じれのないアファイン接続と Riemann 計量の 3 つ組 (M, ∇, g) が**統計多様体**であるとは，Codazzi 方程式 $(\nabla_X g)(Y, Z) = (\nabla_Y g)(X, Z)$ が任意のベクトル場 $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ についてなりたつことをさす．∇ として g の Levi-Civita 接続を取ると，$\nabla g = 0$ となるから，Riemann 多様体とその Levi-Civita 接続の組は，統計多様体の最も素朴な例である．見方を変えると，統計多様体という概念は，Riemann 多様体という概念の拡張，あるいは変形ということができるだろう．さて，この考察を推し進めると，Kähler 多様体の統計多様体版は何かが問題になる．それについて，高野嘉寿彦による Kähler-like 統計多様体なる概念 ([7] 参照) があり，それとは別に，黒瀬俊 [4] が正則統計多様体 (holomorphic statistical manifold) という概念を提案している．奇数次元の場合も同様な疑問は研究に値して，本講演は，**Sasaki 多様体の統計多様体版は何か**，という問題に対して，一つの提案を行う．高野 [6] は Kähler-like 統計多様体と同じアイディアで奇数次元の研究も行っているが，ここでは正則統計多様体の奇数次元版を与えることになる．

★

まず，統計多様体に関して簡単に整理しておく．統計多様体の微分幾何学的基礎については，[1] 等を参照せよ．統計多様体の起源の一つは情報幾何学にあるが，それについて最近の文献をあげる力量は筆者にはない．[5] およびそれに掲載された文献を参照されたい．以下，X, Y, Z 等はベクトル場をあらわし，混乱の恐れのない時は，任意のベクトル場 X に対して，などと明記していない．

定義と命題 1. (i) アファイン接続 ∇^* が，∇ の g に関する**双対接続**であるとは， $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z)$ をみたすことをいう．(∇, g) が M 上の統計構造ならば，(∇^*, g) もそうである．
(ii) 統計構造 (∇, g) に対して，

$$K_X Y = \nabla_X Y - \widehat{\nabla}_X Y \tag{1}$$

とおくと，$K \in \Gamma(TM^{(1,2)})$ は

$$K_X Y = K_Y X, \quad g(K_X Y, Z) = g(Y, K_X Z) \tag{2}$$

をみたす．ここで，$\widehat{\nabla}$ は g の Levi-Civita 接続をあらわす．逆に，Riemann 計量 g に対して，与えられた $K \in \Gamma(TM^{(1,2)})$ が (2) をみたすとき，組 $(\nabla := \widehat{\nabla} + K, g)$ は統計構造になる． □

定義と命題 2. (i) (M, ∇, g) を統計多様体とする．R^{∇} あるいはたんに R で ∇ の曲率テンソル場を，R^{∇^*} あるいは R^* で ∇^* の曲率テンソル場を，$R^{\widehat{\nabla}}$ あるいは $\widehat{R}$ で g の Levi-Civita 接続 $\widehat{\nabla}$ の曲率テンソル場を表す．このとき，

$$\begin{aligned} S(X,Y)Z &:= \frac{1}{2}\{R(X,Y)Z + R^*(X,Y)Z\} \\ &= \widehat{R}(X,Y)Z + [K_X, K_Y]Z \end{aligned}$$

とかき，この $S \in \Gamma(TM^{(1,3)})$ をここでは仮に (∇, g) の**統計曲率テンソル場** (statistical curvature tensor field) とよぶ．
(ii) $c \in \mathbb{R}$ とする．統計多様体 (M, ∇, g) が**定曲率** c であるとは，$R(X,Y)Z = c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}$ がなりたつことをいう．また，統計多様体 (M, ∇, g) が**定統計曲率** c であるとは， $S(X,Y)Z = c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}$ がなりたつことをいう．統計多様体が定曲率 c ならば，定統計曲率 c である． □

ここで，Kähler 多様体の統計多様体版の定義を与えよう．
定義 3. (M, ∇, g) を統計多様体とする．(g, J) を M 上の Kähler 構造 ($J \in \Gamma(TM^{(1,1)})$ は概複素構造) とし，ω を $\omega(X,Y) = g(X, JY)$ と定める．(M, ∇, g, J) が**正則統計多様体**であるとは，ω が ∇ について平行な 2-形式になるときをいう． □

このとき，$\nabla_X(JY) = J\nabla^*_X Y$ がなりたつ．なお，∇ が平坦のとき，正則統計多様体はスペシャル Kähler 多様体とよばれている．

注意 4. (∇, g) が M 上の統計構造，(g, J) が M 上の Kähler 構造のとき，(M, ∇, g, J) が正則統計多様体になるための必要十分条件は，

$$K_X JY + JK_X Y = 0$$

で与えられる．

★ ★

矢野健太郎，昆正博 [8] に沿って,（天下り的ではあるが）佐々木多様体の定義をしておく．Riemann 多様体 (M, g) 上に $\phi \in \Gamma(TM^{(1,1)})$ と $\xi \in \Gamma(TM)$ が与えられているとする．

定義 5. 3 つ組 (g, ϕ, ξ) が M 上の**概接触計量構造** (almost contact metric structure) であるとは，

$$\begin{aligned} &\phi\, \xi = 0, \quad g(\xi, \xi) = 1, \\ &\phi^2 X = -X + g(X, \xi)\xi, \\ &g(\phi X, Y) + g(X, \phi Y) = 0 \end{aligned}$$

がなりたつことをいう． □

このとき，$\eta \in \Gamma(TM^*)$ と $\omega \in \Gamma(TM^{(0,2)})$ を

$$\eta(X) = g(X, \xi), \quad \omega(X, Y) = g(X, \phi Y) \tag{3}$$

で定めると，

$$\begin{aligned} &\eta(\phi X) = 0, \\ &g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

がなりたつ．接触幾何学を意識した記述では，(ϕ, ξ, η, g) のように 4 つ組で書くほうが主流だろう．

定義 6. 概接触計量構造 (g, ϕ, ξ) が **佐々木構造**であるとは，

$$(\widehat{\nabla}_X \phi)Y = g(Y, \xi)X - g(Y, X)\xi \tag{4}$$

がなりたつことをいう． □

このとき，

$$\widehat{\nabla}_X \xi = \phi X \tag{5}$$

がなりたつ．いよいよ我々の佐々木統計多様体の定義であるが，つぎのようにするとよい．

定義 7. 4 つ組 (∇, g, ϕ, ξ) が**佐々木統計構造**であるとは，(∇, g) が統計構造，(g, ϕ, ξ) が佐々木構造で，かつ

$$K_X \phi Y + \phi K_X Y = 0 \tag{6}$$

をみたすときをいう．ここで，$K \in \Gamma(TM^{(1,2)})$ は統計構造より (1) から定まるテンソル場である． □

これはつぎのように言い換えられる．

定理 8. (M, ∇, g) を統計多様体，(g, ϕ, ξ) を M 上の概接触計量構造とする．(∇, g, ϕ, ξ) が佐々木統計構造であるための必要十分条件は，

$$\nabla_X(\phi Y) - \phi \nabla^*_X Y = g(Y, \xi)X - g(Y, X)\xi, \tag{7}$$

$$\nabla_X \xi = \phi X + g(\nabla_X \xi, \xi)\xi \tag{8}$$

がなりたつことである． □

(∇, g, ϕ, ξ) が M 上の佐々木統計構造ならば，(∇^*, g, ϕ, ξ) もそうである．

★ ★ ★

よく知られたように，複素 Euclid 空間の超球面は佐々木多様体の典型的な例である．この上に佐々木統計構造を与えておこう．統計多様体のコンパクトな例がおもて？に登場することも珍しい．

例 9. S^{2n+1} を複素 Euclid 空間 $\mathbb{C}^{n+1} = (\mathbb{R}^{2n+2}, g_0, J_0)$ の半径 1 の超球面とし，単位法ベクトル場を N，誘導計量 (標準的な超球面の計量) を g とかく．J_0 から自然に誘導される S^{2n+1} の $(1,1)$-テンソル場を ϕ とかき，$\xi = -J_0 N$ とおく．このとき，$X, Y \in \Gamma(TS^{2n+1})$ に対して，$K_X Y = g(X, \xi)g(Y, \xi)\xi$ とおくと，(2) と (6) が確かめられ，これで構成される $(S^{2n+1}, \nabla, g, \phi, \xi)$ は佐々木統計多様体になる．これは，定統

計曲率 1 である (さらに，統計曲率テンソル場を用いて古典的な場合と同様に定義ができる ϕ-断面曲率も 1 になる). □

この例をみると，正則統計多様体の超曲面として実現される佐々木統計多様体について興味がわく．それに関してはつぎがなりたつ．

定理 10. $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{g}, J)$ を正則統計多様体とし，M をその実超曲面とする．N を M の単位法ベクトル場，g を誘導計量とする．$\nabla, \phi, \xi, A, A^*$ 等をつぎで定める：

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)N, \qquad \widetilde{\nabla}_X N = -AX + \tau(X)N,$$
$$\widetilde{\nabla}^*_X Y = \nabla^*_X Y + h^*(X,Y)N, \qquad \widetilde{\nabla}^*_X N = -A^*X + \tau^*(X)N,$$
$$\xi = -JN, \qquad JX = \phi X + \eta(X)N.$$

このとき，(∇, g, ϕ, ξ) が M 上の佐々木統計構造になるための必要十分条件は，

$$AX = X + g(AX - X, \xi)\xi, \quad A^*X = X + g(A^*X - X, \xi)\xi$$

である． □

参考文献

[1] H. Furuhata and I. Hasegawa, Submanifold theory in holomorphic statistical manifolds, S. Dragomir, M.H. Shahid, and F.R. Al-Solamy (eds), *Geometry of Cauchy-Riemann Submanifolds*, Springer Singapore (2016), 179–215.

[2] H. Furuhata, I. Hasegawa, Y. Okuyama and K. Sato, Kenmotsu statistical manifolds and warped product, Preprint.

[3] H. Furuhata, I. Hasegawa, Y. Okuyama, K. Sato and M.H. Shahid, Sasakian statistical manifolds, Preprint.

[4] 黒瀬俊，統計多様体の幾何学，宮岡礼子・小谷元子 編「２１世紀の数学」，日本評論社 (2004), 34–43.

[5] 松添博 編，統計多様体の幾何学の新展開，数理解析研究所講究録 1916，(2014).

[6] K. Takano, Statistical manifolds with almost contact structures and its statistical submersions, J. Geom. **85**(2006), 171–187.

[7] 高野嘉寿彦，幾何学的構造をもつ統計多様体について，ミニワークショップ統計多様体の幾何学とその周辺 (2)，2010 年北海道大学，講演資料: `http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~furuhata/workshop/stat/10/takano.pdf`

[8] K. Yano and M. Kon, *Structures on manifolds*, World Scientific (1984).

`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~furuhata/`

「多様体上の計量と幾何構造」(2017 年 3 月 1 日 – 4 日，名城大) 予稿