定曲率 Hesse 多様体のモデルについて

古畑　仁（北海道大学大学院理学研究院）

なめらかな n 次元多様体 M とその上のねじれのないアファイン接続 ∇，擬 Riemann 計量 g の組が**統計多様体**であるとは ∇g が対称 $(0,3)$ テンソル場になることを言った．さらに，統計多様体 (M,∇,g) が **Hesse 多様体** であるとは ∇ が平坦であることをさす．(∇,g) から M の接束上に自然に構成される Kähler 構造が正則断面曲率一定 $-c\in\mathbb{R}$ をもつとき，Hesse 多様体 (M,∇,g) は**定 Hesse 曲率** c であるという (志磨 [4] 参照．符号に注意すること)．

本講演では，このような空間を構成し分類する問題について，黒瀬俊氏（福岡大）との共同研究 [2] に基づき，完成している部分および未解決な部分について紹介したい．

講演で詳細に触れることはできないが，この問題は大雑把にいうと，定曲率 $-c/4$ の擬 Riemann 多様体 (M,g) 上の $(1,2)$ テンソル場 K でつぎをみたすものを分類することに帰着する．

(i) $K(X,Y)=K(Y,X)$，(ii) $g(K(X,Y),Z)=g(Y,K(X,Z))$,

(iii) $-\dfrac{c}{4}\{g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\}=K(Y,K(X,Z))-K(X,K(Y,Z))$,

(iv) $$\begin{aligned}(\nabla^g K)(X,Y;Z)=&-\frac{c}{2}\{g(Z,X)Y+g(Z,Y)X\}\\&-K(Z,K(X,Y))+K(K(Z,X),Y)+K(X,K(Z,Y)).\end{aligned}$$

ここで，∇^g は g の Levi-Civita 接続，X,Y,Z は M の任意の接ベクトルである．

参考文献

[1] Furuhata H., Statistical hypersurfaces in the space of Hessian curvature zero, Preprint.

[2] Furuhata H. and Kurose T., Hessian manifolds of nonpositive constant Hessian sectional curvature, Preprint.

[3] 黒瀬俊，定曲率ヘッセ多様体の分類，京都大学数理解析研究所講究録 **1623**(2009), 22–29.

[4] Shima H., Hessian manifolds of constant Hessian sectional curvature, J. Math. Soc. Japan **47**(1995), 735–753.

http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~furuhata/