# Spaces of Nonpositive Constant Hessian Curvature

古畑　仁（北海道大学大学院理学研究院）

本講演*は，黒瀬俊氏（福岡大）との共同研究 [1] に基づく．その解説に [2] があるが，進め方はかなり異なるので，ぜひそちらも参照していただきたい．

なめらかな $n$ 次元多様体 $M$ とその上のねじれのないアファイン接続 $\nabla$，Riemann 計量 $g$ の組が**統計多様体**であるとは，$\nabla g$ が対称 $(0,3)$ テンソル場になることを言った．この範疇で幾何学，とくに部分多様体論を展開したい．そのとき，モデル・アンビエント空間としてふさわしいものは何だろうか．もちろんいろいろな選択がありえるが，本講演ではつぎの空間をまず取り上げるべきであるということを主張したい．

**例 1．** つぎのように $((\mathbb{R}^+)^n, \nabla^n, g_0)$ を定める：

$$(\mathbb{R}^+)^n := \{y = {}^t(y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^n \ : \ y^1 > 0, \cdots, y^n > 0\},$$
$$\nabla^n_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = -\delta_{ij}(y^j)^{-1}\frac{\partial}{\partial y^j}, \qquad g_0 := g_{E^n}|_{(\mathbb{R}^+)^n} = \sum_{j=1}^n (dy^j)^2.$$

ここで，$g_{E^n}$ は $\mathbb{R}^n$ の Euclid 計量である．このとき，$((\mathbb{R}^+)^n, \nabla^n, g_0)$ は統計多様体になる．実際，$\nabla^n g_0 = 2\sum (y^i)^{-1} dy^i \otimes dy^i \otimes dy^i$ となる．$\square$

つぎに，この例の性質を述べるためにいくつか定義を復習しておこう．

**定義 2．** (1) 統計多様体 $(M, \nabla, g)$ が **Hesse 多様体** であるとは，$\nabla$ が平坦であることをさす．(2) Hesse 多様体 $(M, \nabla, g)$ と定数 $c \in \mathbb{R}$ に対して，$(\nabla, g)$ が **Hesse 曲率** $c$（正確には Hesse 断面曲率一定 $c$）であるとは，

$$(\nabla_X K)(Y, Z) = -\frac{c}{2}\{g(X,Y)Z + g(X,Z)Y\}, \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM)$$

がなりたつことをいう．ここで，$K = K^{(\nabla, g)}$ はつぎで定義される $(1,2)$ テンソル場である．

$$K(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla^g_X Y.$$

*浦川肇先生退職記念研究集会．浦川先生に改めて感謝の意を表します．

ここで，$\nabla^g$ は $g$ の Levi-Civita 接続をあらわす．この条件は，$(\nabla, g)$ から $M$ の接束上に自然に構成される Kähler 構造が，正則断面曲率一定 $-c$ をもつことを意味する．符号に注意が必要であるが，ここでは志磨 [4] の定義に従った．さらにこのとき，

$$
\begin{aligned}
R^{\nabla^g}(X,Y)Z = &\ -\frac{1}{4}\{(\nabla_X K)(Y,Z) - (\nabla_Y K)(Z,X)\} \\
= &\ -\frac{c}{4}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}
\end{aligned}
$$

となることがわかり，計量 $g$ は定曲率 $-c/4$ となる． □

**例 3.** $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ に対して，$N_k^n := \mathbb{R}^{n-k} \times (\mathbb{R}^+)^k$，$\nabla^{[k]} := \nabla^{g_{E^{n-k}}} \oplus \nabla^k$，$g_0 = g_{E^n}|_{N_k^n}$ と定める．定め方から，$(N_n^n, \nabla^{[n]}, g_0)$ は例 1 と同じものをあらわし，$(N_0^n, \nabla^{[0]}, g_0)$ は，Euclid 空間にその Levi-Civita 接続を考えたものにほかならない．これらは，Hesse 曲率 0 の Hesse 多様体である． □

**例 4.** 有限集合 $\Omega := \{1,2,\ldots,n+1\}$ 上の正の確率密度関数をつぎのようにあらわす.

$$
\begin{aligned}
p(x,\eta) &:= \begin{cases} \eta^i, & x = i \in \{1,2,\ldots,n\}, \\ 1 - \displaystyle\sum_{l=1}^n \eta^l, & x = n+1 \end{cases} \\
&= \exp\left( \sum_{i=1}^n \log \frac{\eta^i}{1-\sum_{l=1}^n \eta^l}\delta_{ix} - \log \frac{1}{1-\sum_{l=1}^n \eta^l} \right).
\end{aligned}
$$

ここで，パラメータ $\eta = {}^t(\eta^1,\ldots,\eta^n)$ は $\Delta^n := \{\eta \in (\mathbb{R}^+)^n \ : \ \sum_{j=1}^n \eta^j < 1\}$ の元である．$\Delta^n$ を $\Omega$ 上の正の確率密度関数全体 (をあらわすパラメータ空間) と理解する．$g_F$ を $\Delta^n$ 上の Fisher 情報計量，$\nabla^{(e)}$ を $\Delta^n$ 上の指数型接続とすると，$(\Delta^n, \nabla^{(e)}, g_F)$ は Hesse 曲率 $-1$ の Hesse 多

様体である．$\partial_i := \partial/\partial\eta^i$ とかくとき，$(\nabla^{(e)}, g_F)$ はつぎで与えられる．

$$\begin{aligned} g_F(\partial_i, \partial_j) &:= \sum_{x\in\Omega}\{\partial_i \log p(x,\eta)\}\{\partial_j \log p(x,\eta)\}p(x,\eta) \\ &= \cdots = (\eta^i)^{-1}\delta_{ij} + (1 - \sum_{l=1}^{n}\eta^l)^{-1}, \\ g_F(\nabla^{(e)}_{\partial_i}\partial_j, \partial_k) &= \sum_{x\in\Omega}\{\partial_i\partial_j \log p(x,\eta)\}\{\partial_k \log p(x,\eta)\}p(x,\eta) \\ &= \cdots = -(\eta^i)^{-2}\delta_{ij}\delta_{jk} - (1 - \sum_{l=1}^{n}\eta^l)^{-2}. \end{aligned}$$

□

**補題と定義 5**．(1) $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{g})$ を統計多様体，$f : M \to \widetilde{M}$ をはめ込みとし，$M$ 上に $g$ と $\nabla$ をつぎで定める：

$$g = f^*\widetilde{g}, \quad g(\nabla_X Y, Z) = \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X f_* Y, f_* Z), \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

このとき，$(\nabla, g)$ は $M$ 上の統計構造になる．これを，$f$ によって $(\widetilde{\nabla}, \widetilde{g})$ から**誘導された統計構造**とよぶ．

(2) 統計多様体 $(M, \nabla, g)$ から $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{g})$ へのはめ込み $f$ が**統計はめ込み**であるとは，$f$ によって $(\widetilde{\nabla}, \widetilde{g})$ から誘導された統計構造が $(\nabla, g)$ に一致するときをいう．

(3) 2 つの統計はめ込みの合成はまた統計はめ込みである． □

**注意 6**．(1) つぎで定める $f$ は，例 4 の Hesse 多様体 $(\Delta^n, \nabla^{(e)}, g_F)$ から例 1 の Hesse 多様体 $((\mathbb{R}^+)^{n+1}, \nabla^{n+1}, g_0)$ への統計はめ込みを与える．

$$f : \Delta^n \ni \eta \mapsto \begin{bmatrix} 2\sqrt{p(1,\eta)} \\ \vdots \\ 2\sqrt{p(n+1,\eta)} \end{bmatrix} \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}.$$

ここで，$p$ は例 4 のものである．像 $f(\Delta^n)$ は半径 2 の超球面の各座標が正なる部分（第 1 象限）になる．

(2) Lê [3] によると，任意の統計多様体 $(M, \nabla, g)$ に対して，十分大きな自然数 $N$ をとると統計はめ込み $\varphi : (M, \nabla, g) \to (\Delta^N, \nabla^{(e)}, g_F)$ が存在する． □

注意 6 から，任意の統計多様体 $(M, \nabla, g)$ は十分大きな $N$ 次元の Hesse 曲率 0 の Hesse 多様体 $((\mathbb{R}^+)^N, \nabla^N, g_0)\bigl(= (N_N^N, \nabla^{[N]}, g_0)\bigr)$ の統

計部分多様体と理解できる．このことは，例 1 が統計部分多様体論のアンビエント空間としてまずはじめに研究されるのにふさわしいという主張を後押しするだろう．また，つぎの定理 7 と 8 から，これ (を含む例 3) は Hesse 曲率 0 の Hesse 多様体の中で，ある意味で標準的なものであることが分かり，その重要性をさらに主張したくなる．

**定理 7．** $(M, \nabla, g)$ を $n$ 次元単連結 Hesse 多様体で，Hesse 曲率 0 のものとする．このとき，$k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ と統計はめ込み $\iota : (M, \nabla, g) \to (N_k^n, \nabla^{[k]}, g_0)$ が存在する．さらに，$\nabla$ が完備ならば $\iota(M) = N_k^n$ である． □

$\iota$ は統計はめ込みという言い方をしているが，次元が等しいので「局所同型写像が存在する」といってもよい．同様な結果は，Hesse 曲率が負で一定の場合にも証明できる．

**定理 8．** $(M, \nabla, g)$ を $n$ 次元単連結 Hesse 多様体で，Hesse 曲率 $-1$ のものとする．このとき，統計はめ込み $\iota : (M, \nabla, g) \to (\Delta^n, \nabla^{(e)}, g_F)$ が存在する．さらに，$\nabla$ が完備ならば $\iota(M) = \Delta^n$ である． □

**問題 9．** Hesse 曲率が一定となる Hesse 多様体を分類せよ

について，本研究 (定理 7 と 8) で Hesse 曲率が非正の場合はわかったといってよいが，正の場合は未解決である．正規分布全体のなす空間に Fisher 情報計量と混合型接続を考えると，2 次元 Hesse 多様体で Hesse 曲率が 8 になる．これは Riemann 多様体としてみると，定曲率 $-2$ の双曲平面にほかならない．Hesse 曲率が正で一定となる Hesse 多様体のクラスには，このような興味深い対象が属しているが，2 次元の場合ですら分類は完成していない（くわしくは [2] を参照せよ）．

## 参考文献


[1] Furuhata H. and Kurose T., Hessian manifolds of nonpositive constant Hessian sectional curvature, Preprint.

[2] 黒瀬俊，定曲率ヘッセ多様体の分類，京都大学数理解析研究所講究録 **1623**(2009), 22–29.

[3] Le H.V., Statistical manifolds are statistical models, J. Geom. **84**(2005), 83–93.

[4] Shima H., Hessian manifolds of constant Hessian sectional curvature, J. Math. Soc. Japan **47**(1995), 735–753.


http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~furuhata/