

アファイン曲面の中心について

古畑 仁
北海道大学大学院理学研究科

$f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を局所強凸な曲面とし, $\xi \in \Gamma(f^{-1}T\mathbb{R}^3)$ をそのブラシュケ法ベクトル場 (アファイン法ベクトル場) とする. \mathbb{R}^3 をベクトル空間と思って, 各点 $u \in M$ に対して,

$$f(u) = f_*Z_u + \rho(u)\xi_u$$

で $Z_u, \rho(u)$ を定めることにより, M 上のベクトル場 Z と関数 ρ を定義する (この $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ はアファイン支持関数とよばれている.) このとき,

$$c_f(u) := f_*Z_u = f(u) - \rho(u)\xi_u$$

とかき, $c_f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を f の中心写像という.

固有アファイン球面とよばれるクラスは, 興味深い対象として Tzitzéica 以来古くから認識されているが, f がその固有アファイン球面のときは, c_f は定値写像で, その点はアファイン球面の中心になるのが, この写像の名前の由来である.

陶山芳彦遺暦記念研究集会*では Luc Vrancken との共同研究で得られた以下の結果を報告した. 詳細は [2] に譲るが, ここでは, そこには掲載しなかった画像を抄録しておく. 定理にあらわれる曲面を Mathematica の最も簡単な機能を用いて描画させたものである. アファイン微分幾何学の世界で, 有用かつ美しく興味深い絵をいつか描いてみたいものである. なお, 基本的な用語等に関しては, [1, 3] も参照のこと.

また, 定理や曲面の番号は, 参照のときの便利を考慮して [2] に従っている.

定理 5.5. 局所強凸な曲面 $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対して, ある定ベクトル $v \in \mathbb{R}^3$ が存在して c_{f+v} と $f+v$ が中心アファイン合同であるための

*陶山先生, おめでとうございます!

必要十分条件は, f がつぎの曲面のいずれかと等積アフィン合同になることである .

2.4: $(u, v, (u^2 + v^2)/2)$

2.5: $(u, v, u^{-a}v^{-b})$

2.6: $(u, v, (u^2 + v^2)^b \exp(-a \arctan(u/v)))$

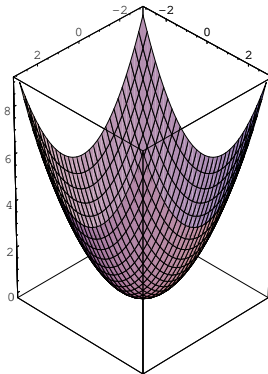
2.7: $(u, v, -u(a \log u + b \log v))$

2.9: $(e^{2v}, \sqrt{2}ue^{2v}, 2(u^2 + v)e^{2v})$

ただし, a, b は定数をあらわし, 各々のみたすべき条件はあとに明記してある .

例 2.4 (楕円型放物面) .

$$f(u, v) := \begin{bmatrix} u \\ v \\ \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \end{bmatrix} .$$



```
ParametricPlot3D[Evaluate[example24[u, v]],
{u, -3, 3}, {v, -3, 3}, ViewPoint -> {10, 10, 10}]
```

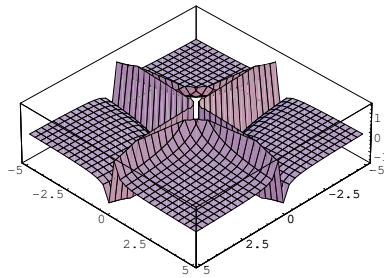
$$c(u, v) = Af(u, v), \quad A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

非固有アフィン球面の中心写像は, はめ込みになることがわかる . さらに, 定理のような性質をもつ非固有アフィン球面は, 楕円型放物面だけである .

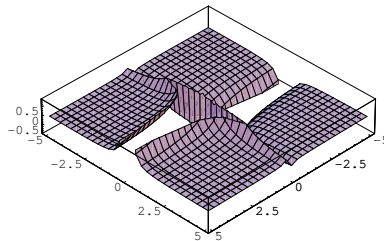
例 2.5.

$$f_{ab}(u, v) := \begin{bmatrix} u \\ v \\ u^{-a}v^{-b} \end{bmatrix},$$

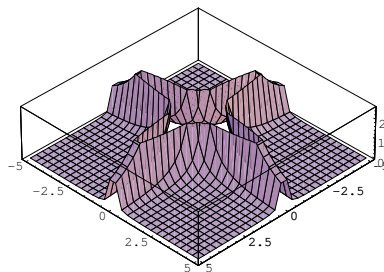
$ab(a + b - 1) \neq 0$ and $(1 - 2a + b)(1 + a - 2b)(a + b - 2) \neq 0$.



```
ParametricPlot3D[Evaluate[example25[1, 1][u, v]],
{u, -5, 5}, {v, -5, 5}, ViewPoint -> {10, 10, 10}]
```



```
ParametricPlot3D[Evaluate[example25[1, 2][u, v]],
{u, -5, 5}, {v, -5, 5}, ViewPoint -> {10, 10, 10}]
```



```
ParametricPlot3D[Evaluate[example25[2, 2][u, v]],
{u, -5, 5}, {v, -5, 5}, ViewPoint -> {10, 10, 10}]
```

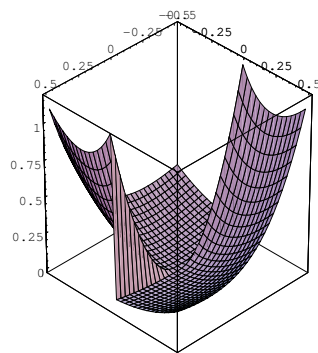
$$c(u, v) = Af_{ab}(u, v),$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{1-2a+b}{-2a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+a-2b}{-2b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a+b-2}{-2} \end{bmatrix}.$$

例 2.6.

$$f_{ab}(u, v) := \begin{bmatrix} u \\ v \\ (u^2 + v^2)^b \exp\left(-a \arctan \frac{u}{v}\right) \end{bmatrix},$$

$(2b-1)(a^2 + b^2) \neq 0$ and $b \neq -1$.



`ParametricPlot3D[Evaluate[example26[1, 1][u, v]],
{u, -0.5, 0.5}, {v, -0.5, 0.5}, ViewPoint -> {10, 10, 10}]`

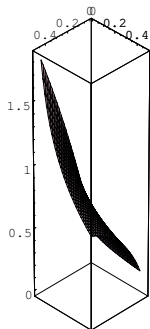
$$c(u, v) = Af_{ab}(u, v),$$

$$A := \frac{1}{2}(a^2 + 4b^2)^{-1} \begin{bmatrix} 3a^2 + 4b(1+b) & -2a(1-2b) & 0 \\ 2a(1-2b) & 3a^2 + 4b(1+b) & 0 \\ 0 & 0 & 2(a^2 + 4b^2)(1+b) \end{bmatrix}.$$

例 2.7.

$$f_{ab}(u, v) := \begin{bmatrix} u \\ v \\ -u(a \log u + b \log v) \end{bmatrix},$$

$b(a+b) \neq 0$ and $a - 2b \neq 0$.



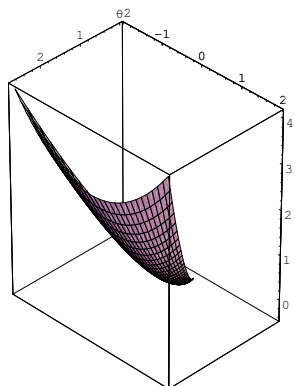
```
ParametricPlot3D[Evaluate[example27[1, 1][u, v]],
{u, 0.05, 0.5}, {v, 0.05, 0.5}, ViewPoint -> {10, 10, 10}]
```

$$c(u, v) = Af_{ab}(u, v),$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{2ab} & 0 \\ -(a+b) & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

例 2.9.

$$f(u, v) = \begin{bmatrix} e^{2v} \\ \sqrt{2}ue^{2v} \\ 2(u^2 + v)e^{2v} \end{bmatrix}.$$



```
ParametricPlot3D[Evaluate[example29[u, v]],
{u, -0.5, 0.5}, {v, -0.5, 0.5}, ViewPoint -> {10, 10, 10}]
```

$$c(u, v) = Af(u, v),$$
$$A := \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

REFERENCES

- [1] 古畑仁, Affine immersions and holomorphic statistical structures, 第52回幾何学シンポジウム講演要旨, (2005), 332–340.
- [2] Furuhata, H. and Vrancken, L., The center map of an affine immersion, Preprint (Hokkaido University Preprint Series in Mathematics, 665).
- [3] 野水克己・佐々木武, アファイン微分幾何学, 裳華房, 1994.

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~furuhata/>