Affine Immersions and Holomorphic Statistical Structures

古畑　仁　（北海道大学大学院理学研究科）

本講演では，統計多様体のよい複素版は何か，というテーマに関連した最近の結果や問題等を述べたい．ここでは，講演に即したものにはならないかもしれないが，統計多様体の定義等の基本的な部分を中心にまとめておくことにした．また，全体を等して黒瀬（[5]，２００３年北海道大学でのシンポジウムの講演記録）を参照していただきたい．

本稿を通して，多様体や写像などは滑らかなものを扱い，いちいち断らない．また，M で n 次元多様体をあらわすことにするが，大域的な概念はほとんど使わない．

定義１．∇ を M 上の捩れのないアファイン接続，g を M 上の（擬）リーマン計量とする．(∇, g) が M 上の**統計構造**（statistical structure）であるとは，$(0,3)$ テンソル場 ∇g が対称であるときをいう．　□

この奇妙な名前の由来は，つぎの例にみるように，情報幾何学に現れるからである．

例２．(1) $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^n) \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$ で径数づけられた，(X, dx) 上の確率分布関数 $p(\cdot, \theta)$ が与えられているとする．微分と積分の順序交換が自由にできるというような設定のもとで，さらに

$$g := \sum \left\{ \int_X \frac{\partial \log p}{\partial \theta^i}(x,\theta) \frac{\partial \log p}{\partial \theta^j}(x,\theta) p(x,\theta) dx \right\} d\theta^i d\theta^j$$

が Θ 上の各点で非退化という仮定をおく．このとき，実数 α に対して，

$$\begin{aligned}\Gamma^{(\alpha)}_{ijk}(\theta) \;:=\; & \int_X \left\{ \frac{\partial^2 \log p}{\partial \theta^i \partial \theta^j}(x,\theta) \right. \\ & \left. + \frac{1-\alpha}{2} \frac{\partial \log p}{\partial \theta^i}(x,\theta) \frac{\partial \log p}{\partial \theta^j}(x,\theta) \right\} \frac{\partial \log p}{\partial \theta^k}(x,\theta) p(x,\theta) dx\end{aligned}$$

とし，

$$\Gamma^{(\alpha)}_{ijk} = g(\nabla^{(\alpha)}_{\frac{\partial}{\partial \theta^i}} \frac{\partial}{\partial \theta^j}, \frac{\partial}{\partial \theta^k})$$

で $\nabla^{(\alpha)}$ を定めると，$(\nabla^{(\alpha)}, g)$ は，Θ 上の統計構造になる．また，$\nabla^{(0)}$ は g のレヴィチヴィタ接続であることもわかる．

(2) 平均が μ，分散が σ^2 の正規分布は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \in X = \mathbb{R}$$

とあらわされるが，$\theta^1 := \dfrac{1}{2\sigma^2}$, $\theta^2 := \dfrac{\mu}{\sigma^2}$ とし，$F_1(x) = -x^2, F_2(x) := x$, $\phi(\theta) := \dfrac{1}{4}\dfrac{(\theta^2)^2}{\theta^1} + \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{\pi}{\theta^1}\right)$ とおくと，

$$\begin{aligned}&p(x,\theta) := \exp\left\{F_1(x)\theta^1 + F_2(x)\theta^2 - \phi(\theta)\right\},\\ &\theta \in \Theta := \{(\theta^1,\theta^2) \in \mathbb{R}^2 \,|\theta^1 > 0\}\end{aligned}$$

と変形できる．上記のように定義した $\nabla^{(1)}$ は平坦で，(θ^1, θ^2) がそのアファイン座標を与えている（すなわち，$\Gamma^{(1)}_{ijk} = 0$ である）．また，

$$g_{ij} = \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^i\partial\theta^j}$$

がなりたつ． □

この例のように，ある平坦接続に関するアファイン座標について，ある関数のヘッシアンでかけている計量は，ヘッセ計量とよばれている．統計構造の幾何学の立場から言えば，つぎのようにかける．

M 上の統計構造 (∇, g) が**ヘッセ構造**（Hessian structure）であるとは，∇ が平坦なことをいう．

統計構造は，そのよいサブクラスとしてヘッセ構造を含んでいることに注意したい．ヘッセ多様体の幾何学は志磨 [10] に，研究の成果がまとめられている．

ここで，もうひとつ統計構造の大切な例を挙げておこう．部分多様体論的な見方で，著者はこちらの興味で研究を始めた．

例 3．超曲面 $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ に対して，ガウスの公式

$$D_X f_* Y = f_* \nabla_X Y + h(X,Y)\xi$$

で，(∇, h) を定義する．ここで，D は $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準接続で，ξ は f の横断的なベクトル場で $D_X\xi$ が f_*TM 成分のみのものをあらわしてい

る（単位法ベクトル場はもちろんこの性質をもつが，とくに単位法ベクトル場でなくてもよい）．第２基本形式に相当する h が各点で非退化と仮定する（たとえば超曲面が局所凸と仮定する）と，コダッチ方程式から，(∇, h) は統計構造であることがわかる． $\square$

この例から，統計構造のことをコダッチ構造とよぶ場合がある．著者自身もコダッチ構造とよんでいたが，最近は少なくとも国内では統計構造とよぶ機会が増えた．

さて，M が複素多様体の場合，その複素構造 J と統計構造にどのような関係を要請すれば，複素統計多様体とよぶのにふさわしいだろうか．この問には，もちろん，いろいろな解答がありうるはずである．統計構造のよいサブクラスであるヘッセ構造については，つぎのような概念が知られている．

$J \in \Gamma\left(TM^{(1,1)}\right)$ を M の複素構造，(∇, g) を M のヘッセ構造とする．このとき，(∇, g, J) が**特殊ケーラー構造**（special Kähler structure）であるとは，$\omega(X,Y) := g(X, JY)$ と定めるとき，ω が ∇ に関して平行な２形式になることをいう．

特殊ケーラー多様体は，接束に自然に超ケーラー構造が入るといった顕著な性質をもつ．この概念は，別の文脈で研究されている対象であり（[3] 参照），ここでの述べ方はそれらと違っているが，同じものを指している．つぎの注意は，それを説明するためのものである．

g を M 上の擬リーマン計量，∇ を M 上の捩れをもたないアファイン接続，J を M 上の複素構造とする．$\omega(X,Y) := g(X, JY)$ と定めるとき，２形式である（すなわち，g は J についてエルミート的）と仮定する．このとき，つぎがなりたつ：

(a) ∇ の g に関する共役接続 $\overline{\nabla}$ が捩れをもたないことと，(∇, g) が統計構造であることは同値である．実際，

$$(\nabla_X g)(Y,Z) - (\nabla_Y g)(X,Z) = g\left(T^{\overline{\nabla}}(X,Y) - T^{\nabla}(X,Y), Z\right)$$

がなりたつ．ここで，$\overline{\nabla}$ は次の式で定義されている：$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \overline{\nabla}_X Z)$. また，$T^{\nabla}$ は ∇ の捩率テンソル場を表している．

(b) $\nabla^J_X Y := J\nabla_X(J^{-1}Y)$ と定めるとき，$\nabla\omega = 0$ であることと ∇^J が ∇ の g に関する共役接続であることは同値である．実際，

$$(\nabla_X\omega)(Y, J^{-1}Z) = Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla^J_X Z)$$

がなりたつ．

(c) $d^\nabla J(X,Y) := (\nabla_X J)Y - (\nabla_Y J)X$ とおくと，$d^\nabla J = 0$ であることと ∇^J が捩れをもたないことは同値である．実際，

$$T^{\nabla^J}(X,Y) - T^\nabla(X,Y) = J^{-1}d^\nabla J(X,Y)$$

がなりたつ．

つぎに，特殊ケーラー多様体が，例 3 の立場からも解釈できることを説明する．コルテスら [2] の結果を述べるために，ブラシュケ超曲面論を簡単に復習しておく（詳細は [8] を参照していただきたい）．

はめ込み $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ とその横断的ベクトル場 ξ に対して，つぎの $\nabla, h, S, \tau, \theta$ を定義する；

$$\begin{aligned}
&D_X f_* Y = f_*\nabla_X Y + h(X,Y)\xi,\\
&D_X\xi = -f_* SX + \tau(X)\xi,\\
&\theta(X_1, \ldots, X_n) := \mathrm{Det}(f_*X_1, \ldots, f_*X_n, \xi).
\end{aligned}$$

ここで，Det は $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準的な体積要素をあらわしている．h の非退化性は，ξ のとり方によらないことがわかるので，h が非退化なとき，f を非退化という．

f が非退化であると仮定すると，つぎをみたす ξ が符合を除いて一意的に存在する；

$$\tau = 0, \quad \theta = \omega_h.$$

ここで，ω_h は擬リーマン計量 h の体積要素をあらわす．この ξ を非退化はめ込み f のブラシュケ法ベクトル場（Blaschke normal vector field）とよぶ．

このとき，h を非退化はめ込み f のブラシュケ計量（Blaschke metric），∇ をブラシュケ接続（Blaschke connection），S をブラシュケ形作用素（Blaschke shape operator）などという．なお，通常は，ブ

ラシュケではなく，アファインという形容詞をつけてよばれることが多い．

$\tau = 0$ という条件から例 3 でみたようにして，非退化はめ込みから統計構造 (∇, h) が誘導される．

非退化はめ込み $f: M \to \mathbb{R}^{n+1}$ が**非固有なアファイン球面**（improper affine sphere）であるとは，ブラシュケ形作用素が恒等的に消える（$S = 0$）ときをいう．

これは，ブラシュケ法ベクトル場が平行であることを意味する．ちなみに，ブラシュケ法ベクトル場が一点を指すときを固有なアファイン球面とよび，ブラシュケ形作用素が恒等変換の 0 でない定数倍になることで特徴付けられる．

非固有なアファイン球面から誘導される統計構造は，ヘッセ構造であることに注意する．これは，ガウスの方程式

$$R(X,Y)Z = h(Y,Z)SX - h(X,Z)SY$$

より，ただちにわかる．

定理 4（コルテス [2]）．$M = (M, J)$ を m 次元複素多様体とし，M 上の正則関数 $F: M \to \mathbb{C}$ で

$$h := \sum \operatorname{Im}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^i \partial z^j} dz^i d\overline{z}^j\right)$$

が非退化なものが与えられているとする．このとき，M から $\mathbb{R}^{2m+1}$ への写像

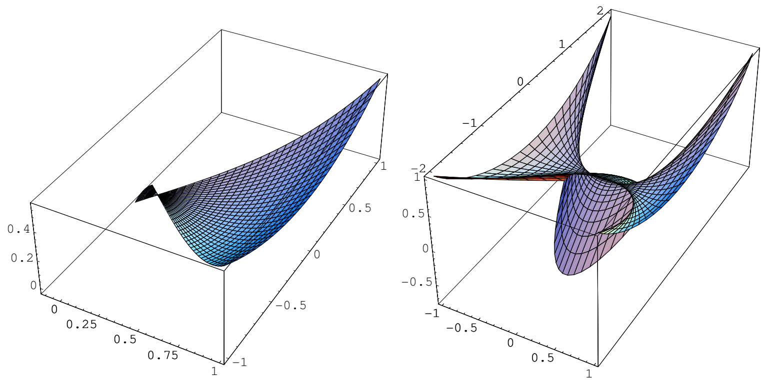
$$f : M \ni z = (z^1, \dots, z^m) \mapsto \begin{bmatrix} \operatorname{Re} z^1 \\ \vdots \\ \operatorname{Re} z^m \\ \operatorname{Re} \dfrac{\partial F}{\partial z^1}(z) \\ \vdots \\ \operatorname{Re} \dfrac{\partial F}{\partial z^m}(z) \\ \operatorname{Im} F(z) - \sum \operatorname{Im} z^i \operatorname{Re} \dfrac{\partial F}{\partial z^i}(z) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m+1}$$

は，非固有アファイン球面となる．また，ブラシュケ計量は h で与えられ，(∇, h, J) は特殊ケーラー構造となる． $\square$

たとえば，$F(z) := (1/2)\sqrt{-1}z^2$ とすると，

$$f(x+\sqrt{-1}y) = {}^t\left(x, -y, \frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$$

となり，楕円型放物面を与える．



これは，$F(z) = (1/3)\sqrt{-1}z^3$ と $F(z) = (1/4)\sqrt{-1}z^4$ の場合を描画させたものである．

また，$\mathbb{R}^5$ のなかの非固有アファイン超球面の具体例を調べる研究はあまりないと思われるが，上の公式を使うと簡単に構成できる．たとえば，

$$f(x+\sqrt{-1}y, u+\sqrt{-1}v) := u\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \\ 0 \\ x^2+y^2 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2x \\ 0 \\ 2xy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ -2xy \\ 0 \end{bmatrix}$$

は，$M := \{(x,y,u,v) | x \neq 0\}$ 上で定義された例で，何らかの意味で特徴づけられるとおもしろいだろう．

M が曲面（1 次元複素多様体）のとき，ブラシュケ計量が定値となる非固有アファイン球面は，局所的にはすべてこのようにして得られることがわかる．一般の次元のときは，よくわかっていない．

問題 5．非固有アファイン球面のなかで，このようにして構成されるものはどのくらいあるか，調べよ． □

なお，不定値計量をもつ場合の表現公式は，ブラシュケ [1]（曲面の場合）や黒瀬の研究がある．また，マルティネス [7] により，曲面の場合の積分系の表現公式が得られている．

さて，例 3 の立場からの統計多様体の複素版としては，複素超曲面から誘導される統計構造を考えることができる．

命題 6．$M = (M, J)$ を m 次元複素多様体，$f : M \to (\mathbb{R}^{2m+2}, \widetilde{J}) = \mathbb{C}^{m+1}$ を正則はめ込み，$\xi \in \Gamma(f^{-1}T\,\mathbb{R}^{2m+2})$ を f の横断的なベクトル場で各点 $x \in M$ で，分解

$$T_{f(x)}\,\mathbb{R}^{2m+2} = f_* T_x M \oplus \mathbb{R}\,\xi_x \oplus \mathbb{R}\,\widetilde{J}\xi_x$$

を与えるものとする．

$$\begin{aligned} D_X f_* Y &= f_* \nabla_X Y + h(X, Y)\xi + T(X, Y)\widetilde{J}\xi, \\ D_X \xi &= -f_* SX + \tau(X)\xi + P(X)\widetilde{J}\xi \end{aligned}$$

で，∇, h, T, S, τ, P を定義する．このとき，$\tau = P = 0$，および h を非退化と仮定すると，(∇, h, J) は，つぎをみたす．
(1) (∇, h) は統計構造である．
(2) $\nabla J = 0$ がなりたつ． □

一般に上の性質 (1), (2) および
(3)　$h(JX, JY) = h(X, Y)$
をみたす (∇, h, J) を考えると，

$$\nabla h = 0$$

となることがわかり，よい一般化とはいえない．

なお，複素アファインはめ込みは，最近では黒須 [6] らの研究がある．
また，例 2 の立場から，統計多様体の複素版が提案されていないようである．情報幾何学の中で，複素構造が興味深い対象とはいえないのか，著者にはよくわからない．

さて，特殊ケーラー構造を参考にして，統計構造のよい複素版として，つぎの概念が黒瀬により提案された．接続の平坦性をはずして，特殊ケーラー構造を一般化したものである．

定義 7．$J \in \Gamma\left(TM^{(1,1)}\right)$ を M の複素構造，(∇, g) を M の統計構造とする．このとき，(∇, g, J) が**正則統計構造**（holomorphic statistical structure）であるとは，$\omega(X,Y) := g(X, JY)$ と定めるとき，ω が ∇ に関して平行な 2 形式になることをいう． □

黒瀬 [5] は「適合する複素構造をもつ統計多様体」とよんでいるが，本人の許可?を取って，ここではこの名称を採用した．しかしながら，これから述べる結果は，超曲面として実現するという制約のもとでは，これが特殊ケーラー構造の本当の一般化にはなりにくいことを意味する．

定理 8．非退化はめ込み $f : M \to \mathbb{R}^{2m+1}$ が正則統計構造 (∇, h, J) を誘導すると仮定する．$m := \dim_{\mathbb{C}} M \geq 2$ ならば，f は非固有アファイン球面である．とくに，(∇, h, J) は特殊ケーラー構造になる． □

証明は，昆のプレプリント [4] を参照していただきたい．また，より強い仮定の下で，さらにはめ込みの形を決定するという問題では，たとえば，つぎがわかる．この結果の曲面の場合の証明は，及川 [9] を参照していただきたい．

定理 9．ヘッセ断面曲率が一定の局所強凸な非固有アファイン球面は，楕円型放物面（の一部）と等積アファイン合同である． □

ここで，ヘッセ断面曲率が一定であるとは，つぎのように定義される．

統計構造 (∇, g) に対して，∇^g を g のレヴィチヴィタ接続とし，$H \in \Gamma(TM^{(1,3)})$ を

$$\begin{aligned}\gamma(X,Y) &:= \gamma_X Y := \nabla^g_X Y - \nabla_X Y, \\ H(X,Y,Z) &:= (\nabla_Y \gamma)(Z,X)\end{aligned}$$

と定める．

このとき，統計構造 (∇, g) のヘッセ断面曲率が一定 c であるとは，

$$H(X,Y,Z) = (c/2)\{g(Y,Z)X + g(Y,X)Z\}$$

がなりたつことである．

∇ が平坦の場合，すなわち (∇, g) がヘッセ構造の場合，H は 志磨 [10] の定義したヘッセ曲率テンソル場であり，ヘッセ断面曲率が一定という概念もそこで定義されたものと一致している．なお，例２ (2) の統計構造は，ヘッセ断面曲率が正で一定となる例を与えている．

また，統計構造 (∇, g) に対して，

$$\alpha(X) := \operatorname{tr}\gamma_X,$$
$$\beta(X, Y) := (\nabla_X \alpha)\, Y$$

で定義される $\alpha \in \Gamma\,(T^*M)$ は (∇, g) の第１コシュール形式（the first Koszul form），$\beta \in \Gamma\left(TM^{(0,2)}\right)$ は第２コシュール形式とよばれ，重要な役割を果たす．

とくに，上のようにブラシュケ超曲面として実現されるときは，第１，第２コシュール形式が消えなくてはいけないことがわかり，それが強い制約になっている．

References

[1] W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie II*, Springer, 1923.

[2] V. Cortés, A holomorphic representation formula for parabolic hyperspheres, Banach Center Publ. 57 (2002), 11–16,

[3] D.S. Freed, Special Kähler manifolds, Comm. Math. Phys. 203 (1999), 31–52.

[4] 昆万佑子，Hypersurfaces with almost complex structures in the real affine space, 北海道大学大学院理学研究科修士論文，2005.

[5] 黒瀬俊，統計多様体の幾何学，２１世紀の数学 – 幾何学の未踏峰 –，宮岡礼子・小谷元子編，日本評論社，2004，34–43.

[6] S. Kurosu, On a complex equiaffine immersion of general codimension, SUT J. Math. 39 (2003), 183–209.

[7] A. Martinez, Improper affine maps, Math. Z. 249 (2005), 755–766.

[8] 野水克己・佐々木武，アファイン微分幾何学，裳華房，1994.

[9] 及川正義，放物超球面のヘッセ断面曲率，北海道大学大学院理学研究科修士論文，2005.

[10] 志磨裕彦，ヘッセ幾何学，裳華房，2001.

E-mail address: `furuhata@math.sci.hokudai.ac.jp`