HESSIAN STRUCTURE OF AN IMPROPER AFFINE SPHERE

古畑　仁
北海道大学大学院理学研究科

局所強凸な非固有アファイン球面 $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ に対して，ξ を f のブラシュケ法ベクトル場とすると，ガウスの式 $D_X f_* Y = f_* \nabla_X Y + g(X,Y)\xi$ で定まる M 上のアファイン接続とリーマン計量の組 (∇, g) はヘッセ構造になる．ヘッセ幾何学の観点からみて，アファイン微分幾何学的に新しい対象を見いだすこと，すなわち，局所強凸な非固有アファイン球面の「よい」サブクラスを見いだすことはできないだろうか？

まず，ヘッセ構造として，もっとも簡単なものを考えることからはじめたい．その第一歩として，納谷信幾何学賞受賞記念研究集会？[*]では以下の結果を紹介し，特殊な場合（ヘッセ構造が特殊ケーラー構造である場合）の初等的な証明について報告した．

定理１． ヘッセ断面曲率が一定の局所強凸な非固有アファイン球面は，楕円型放物面（の一部）と等積アファイン合同である．

これについて，及川正義 [5] は，曲面の場合に，紹介した方法とは別の証明を与えている．このノートでは，アファイン球面とは限らない場合，すなわち，誘導接続が平坦とは限らない場合の結果を報告することにする．

定義２． 多様体 M 上のアファイン接続 ∇ とリーマン計量 g の組 (∇, g) が統計構造（または，コダッチ構造）であるとは，(1) ∇ が捩れがない，(2) ∇g が対称である，をみたすときをいう．

[*]納谷さん，おめでとうございます！

統計構造 (∇, g) に対して，次の量が定義される．∇^g を g のレヴィ・チヴィタ接続とし，$\gamma = \gamma^{(\nabla,g)} \in \Gamma(TM^{(1,2)})$ を

$$\gamma(X,Y) := \gamma_X Y := \nabla^g_X Y - \nabla_X Y$$

とおく．また，$H = H^{(\nabla,g)} \in \Gamma(TM^{(1,3)})$ を

$$H(X,Y,Z) := (\nabla_Y \gamma)(Z,X)$$

と定める．∇ が平坦の場合，すなわち (∇, g) がヘッセ構造の場合，H は 志磨裕彦 [6] の定義したヘッセ曲率テンソル場である．ヘッセ断面曲率が一定 c とすると，

$$H(X,Y,Z) = (c/2)\{g(Y,Z)X + g(Y,X)Z\}$$

がなりたつ．そこで，統計構造の場合も，この式で断面曲率一定 c という概念を，仮に定めておくことにする．

定義３．多様体 M 上のアファイン接続 ∇ とリーマン計量 g，複素構造 J の組 (∇, g, J) が正則統計構造であるとは，(1) (∇, g) が統計構造，(2) $\omega(X,Y) := g(JX,Y)$ が（ J 不変な）２形式で，(3) $\nabla\omega = 0$，をみたすときをいう．

∇ が平坦の場合，正則統計構造という概念は，特殊ケーラー構造とよばれるものと同じものである（たとえば，[1] 参照）．

$f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ を局所強凸な超曲面とする．ξ を f のブラシュケ法ベクトル場（定義は，たとえば [4] 参照）とすると，上と同様に，ガウスの式 $D_X f_* Y = f_* \nabla_X Y + g(X,Y)\xi$ で定まる M 上のアファイン接続とリーマン計量の組 (∇, g) は統計構造になる．この統計構造を f により誘導された統計構造とよぶ．さらに，誘導された統計構造が正則統計構造となる複素構造 J を許容するとき，$f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ を**正則統計構造をもつ超曲面**という.（ここではとりあえずそう呼んでおく.）

正則統計構造は，黒瀬俊によりはじめて明確に定義された概念である（ [3] などを参照）．また，正則統計構造をもつ超曲面は，昆万佑子 [2] でも研究されている．我々は次を示すことができる．

定理4． 正則統計構造をもつ超曲面は，誘導された統計構造の断面曲率が一定ならば，楕円型放物面（の一部）と等積アファイン合同である．

証明の方針は，下記の補題５および超曲面のアポーラリティ（[4] 参照）より，$\gamma = 0$ を導く．そして，$\gamma = 0$ ならば二次超曲面であるというピック・ベアワルトの定理（[4] 参照）を用いればよい．

補題５． 正則統計構造 (∇, g, J) に対して，つぎがなりたつ．

(1) $\gamma_X JY = J\gamma^*_X Y = -J\gamma_X Y$,

(2) $\nabla_X JY = J\nabla^*_X Y$.

ここで，∇^* は $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z)$ で定まるアファイン接続で，$\gamma^* = \gamma^{(\nabla^*, g)}$ である．

References

[1] O.Baues and V. Cortés, Realisation of special Kähler manifolds as parabolic spheres, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), 2403–2407.

[2] 昆万佑子，Hypersurfaces with almost complex structures in the real affine space, 北海道大学大学院理学研究科修士論文，2005.

[3] 黒瀬俊，統計多様体の幾何学，２１世紀の数学 – 幾何学の未踏峰 –，宮岡礼子・小谷元子編，日本評論社，2004，34–43.

[4] 野水克己・佐々木武，アファイン微分幾何学，裳華房，1994.

[5] 及川正義，放物超球面のヘッセ断面曲率，北海道大学大学院理学研究科修士論文，2005.

[6] 志磨裕彦，ヘッセ幾何学，裳華房，2001.

Department of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo 060-0810, Japan

E-mail address: furuhata@math.sci.hokudai.ac.jp