

ローソン対応している埋め込まれた曲面の組について

藤森祥一・古畑 仁
北海道大学大学院理学研究科

(g, ω) を \mathbb{C} 内の単連結領域 D 上で定義された有理型関数 g と正則 1 次形式 ω の組で, ω の零と g の極が一致し, 零の次数は極のその 2 倍に等しいとする. このとき,

$$\Phi_0(z) := \operatorname{Re} \int_{z_0}^z (1 - g^2, \sqrt{-1}(1 + g^2), 2g) \omega$$

とおくと, $\Phi_0 : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ は, 第 1 基本形式 (誘導計量) $I_0 = (1 + |g|^2)^2 |\omega|^2$ をもつ \mathbb{R}^3 内の極小曲面を与える (いわゆる Weierstraß-Enneper の表現公式). 一方, (g, ω) に対して,

$$F^{-1}dF = \begin{bmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{bmatrix} \omega, \quad F(z_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる $F : D \rightarrow SL(2; \mathbb{C})$ をとり,

$$\Phi_1(z) := F(z)F(z)^*$$

とおくと, $\Phi_1 : D \rightarrow \{XX^* \in \operatorname{Her}(2) | X \in SL(2; \mathbb{C})\} \cong H^3(-1)$ は, 第 1 基本形式 $I_1 = I_0$ をもつ双曲空間 $H^3(-1)$ 内の平均曲率 1 の曲面を与える (いわゆる Bryant-Umehara&Yamada の表現公式 [4]). すなわちこれは, 一つの (g, ω) に対して, \mathbb{R}^3 内の極小曲面 $\Phi_0(D)$ と $H^3(-1)$ 内の平均曲率 1 の曲面 $\Phi_1(D)$ の組で, 等長的なものが局所的には構成できることを示している. ここでは, これらの組をローソン対応している曲面の組 (あるいは, これらの曲面はいとこ同士である) とよぶ ([2] 参照).

ローソン対応している曲面の組の大域的な性質, とくに自己交叉性に注目し, 次の結果を得た.

定理 . $\Phi_0 : M \rightarrow \mathbb{R}^3, \Phi_1 : M \rightarrow H^3(-1)$ を各々完備な極小曲面 , 平均曲率 1 の曲面とし , 互いに等長的であるとする . さらに , M が有限型位相で , Φ_1 が固有と仮定する . このとき , Φ_0, Φ_1 がともに自己交叉をもたなければ , Φ_0 は平面 , Φ_1 はホロ球面である .

なお , 現時点では , 仮定の多くは技術的な要請で本質的ではないと考えられる . 証明は , Umehara&Yamada 理論とともに , [1, 3] に多くを依存している . また , W. Rossman 氏にもご協力を頂いた .

REFERENCES

- [1] Collin,P., Hauswirth,L. and Rosenberg,H., The geometry of finite topology Bryant surfaces, Ann. of Math.(2) **153**(2001), 623-659.
- [2] Lawson,H.B., Complete minimal surfaces in S^3 , Ann. of Math.(2) **92**(1970), 335-374.
- [3] Sa Earp,R. and Toubiana,E., On the geometry of constant mean curvature one surfaces in hyperbolic space, Preprint.
- [4] Umehara,M. and Yamada,K., Complete surfaces of constant mean curvature 1 in the hyperbolic 3-space, Ann. of Math.(2) **137**(1993), 611-638.
- [5] 藤森祥一 , 大域的なローソン対応をもつ平均曲率一定曲面について , 北海道大学大学院理学研究科修士論文 , 2002年 .

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HOKKAIDO UNIVERSITY, SAPPORO 060-0810,
JAPAN

E-mail address: furuhata@math.sci.hokudai.ac.jp