

STATISTICAL STRUCTURES OF MINIMAL AFFINE SURFACES

古畑 仁
北海道大学大学院理学研究科

ABSTRACT. We give a necessary and sufficient condition for a statistical structure to be realized as a minimal affine surface in \mathbb{R}^3 .

この講演では、次の結果を報告した：

定理 ([2]) M を単連結で向きづけられた 2 次元多様体とし、 (∇, h) をその上の統計構造とする。 (∇, h) が $(\mathbb{R}^3, D, \text{Det})$ 内の極小アファイン曲面により誘導されるための必要十分条件は次で与えられる：

1. $\nabla \text{Vol}_h = 0$.
2. $\text{tr}_h\{(Y, Z) \mapsto (\nabla_Y \text{Ric}^\nabla)(Z, X)\} = 0$ が任意の $X \in T_x M$ についてなりたつ。
3. (∇, h) のスカラー曲率が恒等的に 0 である。

ここで、 (∇, h) が M 上の統計構造であるとは、 ∇ が M 上のねじれないアファイン接続、 h は M 上の擬リーマン計量であり、 ∇h が対称になるときをいう ([1], [3])。極小アファイン曲面の正確な定義は教科書 [6] にゆずるが、 \mathbb{R}^3 の標準的な体積要素 Det から“自然に” M 上に誘導される面積に関する変分問題の臨界点ととらえればよい。

この定理は、ユークリッド空間内の極小曲面のリーマン構造を特徴づけたリッチの定理 (たとえば, [4] を参照) のアファイン版を試みたものである。極小曲面の内在的な特徴づけをするという観点に立つと、次がより自然な設定であろう：

問題 M を単連結な 2 次元多様体とし、 (∇, θ) をその上の等積構造とする (すなわち、 θ は ∇ に関して平行な面積要素)。 (∇, θ) が $(\mathbb{R}^3, D, \text{Det})$ 内の極小アファイン曲面により誘導されるための必要十分条件を求めよ。

なお，この定理は，高次元化および余次元 2 の極小中心アファインはめ込みへの拡張が容易にできる ([2]) . その際，[5], [3] が重要な役割を果たすことを指摘しておきたい .

REFERENCES

- [1] Amari, S. and Nagaoka, H., *Methods of Information Geometry*, Translations of Mathematical Monographs **191**, Amer. Math. Soc., 2000.
- [2] Furuhata, H., Statistical structures induced by minimal affine immersions, Preprint.
- [3] Kurose, T., Conformal-projective geometry of statistical manifolds, Preprint.
- [4] Lawson, H.B.Jr., *Lectures on Minimal Submanifolds, Volume I*, Publish or Perish, 1980.
- [5] Matsuzoe, H., On realization of conformally-projectively flat statistical manifolds and the divergences, *Hokkaido Math. J.* **27**(1998), 409–421.
- [6] Nomizu, K. and Sasaki, T., *Affine Differential Geometry*, Cambridge University Press, 1994.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HOKKAIDO UNIVERSITY, SAPPORO 060-0810,
JAPAN

E-mail address: `furuhata@math.sci.hokudai.ac.jp`