

極小アファイン曲面の内部構造

古畑 仁
北海道大学大学院理学研究科

ABSTRACT. We give a necessary and sufficient condition for a statistical structure to be realized as a minimal affine surface in \mathbb{R}^3 .

合宿形式のこの研究集会，久しぶりに参加できて大いに楽しんだ．会場についてから，二日目のショート・コミュニケーションで何か話せ，と仰せつかったことは，困惑したけれども... 夕食でアルコールも少し入り，本格的なミッドナイト・セッション? へ向けての滑らかな移行のための話題提供としては，あまり相応しくなかったかもしれないが，準備をする暇もなかったので，そのとき考えていた次の結果をお話しました．

定理. M を単連結で向きづけられた 2 次元多様体とし， (∇, h) をその上の統計構造とする． (∇, h) が M から $(\mathbb{R}^3, D, \text{Det})$ への極小アファインはめ込みにより誘導されるための必要十分条件は次で与えられる：

1. $\nabla \text{Vol}_h = 0$.
2. $\text{tr}_h\{(Y, Z) \mapsto (\nabla_Y \text{Ric}^\nabla)(Z, X)\} = 0$ が任意の $X \in T_x M$ についてなりたつ．
3. (∇, h) のスカラー曲率が恒等的に 0 である．

極小アファインはめ込みの定義は教科書 [3] にゆずるが， \mathbb{R}^3 の標準的な体積要素 Det から “アファイン的” に M 上に誘導される面積に関する変分問題の臨界点を与えるはめ込みととらえればよい．また， (∇, h) が M 上の統計構造であるとは， ∇ が M 上のねじれの無いアファイン接続， h は M 上の擬リーマン計量であって， ∇h が対称になるものをいう．統計構造 (∇, h) のスカラー曲率とは， ∇ のリッチ曲率テンソル場を h についてトレースをとって得られる関数である． M から \mathbb{R}^3 へのアファインはめ込みが与えられると， M 上に統計構造が誘導されることがわかる (アファイン版コダッチ方程式からの帰結) ．

上の定理は、次に紹介する古典的な結果“3次元ユークリッド空間内の極小曲面の内在的特徴づけ”(たとえば [2] を参照) のアファイン版を試みたものである:

事実 (リッチの定理). (M, g) を単連結な 2 次元リーマン多様体とし, g のガウス曲率 K_g がいたるところ負であると仮定する. リーマン計量 g が M からユークリッド空間 \mathbb{R}^3 への極小はめ込みにより誘導される, すなわち, g が \mathbb{R}^3 内の極小曲面の第 1 基本形式として実現されるための必要十分条件は, リーマン計量 $\sqrt{-K_g}g$ が平坦になることである.

アファイン空間内の曲面の内在的な構造として統計構造を考えることは, いろいろな意味で問題点を含んでいるだろう. しかしながら, 統計構造自体が豊かな幾何学を持っていることが明らかになった暁には, 統計構造をアファイン空間の中によい形で実現する問題の一つの答えとして, 上の定理は意味を持ちうると信じている. なお, この定理は, 高次元化および余次元 2 の極小中心アファインはめ込みへの拡張が容易にできる ([1]). この点は, そのような拡張が難しいリッチの定理の場合とは大きく異なる.

最後に, このユニークな研究集会の発展的継続を願いつつ, 未解決問題を紹介してこのショート・コミュニケーション風? 小文をしめくくろう.

問題. M を単連結な 2 次元多様体とし, (∇, θ) をその上の等積構造とする (すなわち, θ は ∇ に関して平行な面積要素). (∇, θ) が $(\mathbb{R}^3, D, \text{Det})$ への極小アファインはめ込みにより誘導されるための必要十分条件を求めよ.

REFERENCES

- [1] Furuhata, H., Statistical structures induced by minimal affine immersions, Preprint.
- [2] Lawson, H.B.Jr., *Lectures on Minimal Submanifolds, Volume I*, Publish or Perish, 1980.
- [3] Nomizu, K. and Sasaki, T., *Affine Differential Geometry*, Cambridge University Press, 1994.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HOKKAIDO UNIVERSITY, SAPPORO 060-0810, JAPAN

E-mail address: furuhata@math.sci.hokudai.ac.jp