集中講義（名古屋工業大学大学院情報工学専攻，情報工学特別講義）

「ベクトル空間内の曲面の微分幾何学入門」

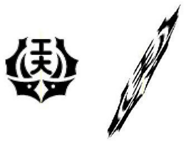
担当： 古畑　仁 （北海道大学大学院理学研究院数学部門）

２００８年6月5日（木）〜6日（金）

逆行列をもつ２行２列行列 $A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{bmatrix}$ （$a_j^i \in \mathbb{R},\, a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2 \neq 0$）を用いて，

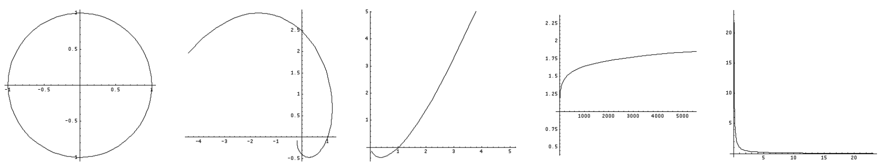
$$\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \mapsto A\,\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

とあらわされる写像を平面内の中心アファイン変換（centroaffine transformation）とよびます．



中心アファイン変換で不変な図形の性質をどのように調べたらよいでしょうか？言い換えると，中心アファイン変換で写りあうものは同じものと理解するとき，その図形に対してどのような「意味のある量」を定義できるでしょうか？

この講義では，このような問題に対して微分幾何学的なアプローチを紹介します．まず，平面内のなめらかな曲線について，よく知られた「曲率」の概念を簡単に触れた後，中心アファイン幾何学における「曲率」を定義し，中心アファイン曲率一定曲線を紹介します．つぎに，空間内の曲面について議論を進めます．微分幾何学を学んだ方はもちろん，はじめての方にも楽しんでもらえるように，微分積分学，線形代数学を予備知識としてお話します．



参考文献：

[1] 高桑昇一郎，微分方程式と変分法 ― 微分積分で見えるいろいろな現象，共立出版

[2] 田沢義彦，曲線論・曲面論 ― Mathematica で探索する古典微分幾何学，ピアソンエデュケーション

[3] 野水克己・佐々木武，アファイン微分幾何学 ―アファインはめ込みの幾何，裳華房

ホームページ：　`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~furuhata/`

以上．

課題：下記の中から２問選んで提出せよ．締切，提出先については講義時に指示する．ただし，講義の感想も添付すること．なお，問題３，４については，印刷したものだけではなく，PDF ファイル（あるいは HTML ファイルと GIF ファイル等）にして電子メールでも提出することが望ましい．

問題１．中心アファイン幾何学の工学への応用の実例または可能性についてまとめよ．

問題２．$x : I \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^2$ の中心アファイン曲率がつぎで与えられることを示せ．

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\det(x(t)\ \frac{dx}{dt}(t))}{\varepsilon\det(\frac{dx}{dt}(t)\ \frac{d^2x}{dt^2}(t))}\right\}^{1/2}\frac{d}{dt}\left\{\log\frac{\det(x(t)\ \frac{dx}{dt}(t))^3}{\varepsilon\det(\frac{dx}{dt}(t)\ \frac{d^2x}{dt^2}(t))}\right\}$$

問題３．平面曲線について，s を中心アファイン弧長パラメータとし，κ を中心アファイン曲率とするとき，$\kappa(s) = s$ となる曲線を描画せよ．ただし，画像だけではなく，描画の方法の解説もつけること．

問題４．つぎで与えられる Tzitzeica 曲面を描画せよ．また，中心アファイン変換を施すとき，曲面がどう変わるかを観察し,「魅力的に見える」画像を選び出せ．ただし，画像だけではなく，描画の方法等の解説もつけること．
(i) $xyz = 1$.
(ii) $(x^2 + y^2)z = 1$.

参考文献の追加：
[4] Li, A.M., Li, H. and Simon, U., Centroaffine Bernstein problems, Differential Geom. Appl. **20**(2004), 331–356.
[5] Neuman, F., Centroaffine invariants of plane curves in connection with the theory of the second-order linear differential equations, Arch. Math.(Brno), **4**(1968), 201–216.
[6] Rogers, C. and Schief, W. K., Bäcklund and Darboux transformations, Cambridge University Press, 2002.
[7] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Titeica.html

以上.