数学特別講義（情報科学の中の微分幾何学）レポート

集中講義の講義名を明記すること．
解答は日本語または英語を用い，わかりやすく，きれいに作成すること．
解答にはＡ４版の用紙を用い，縦置き横書き，とする．
提出期間は１１月１５日〜１９日，提出場所は数学部門事務室前レポートボックスとする．

次の問題から 2 問以上答えよ．

問題 1 q-指数関数 $\exp_q$ と q-対数関数 $\log_q$ が，互いに逆関数となっていることを示せ．

問題 2 $S = \{p(x;\mu,\sigma)\}$ を対数正規分布族，すなわち $\boldsymbol{R}_+ = \{x|x>0\}$ 上の確率密度関数で

$$p(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left[-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

で与えられるものの全体とする．このとき S の Fisher 計量を求めよ．

問題 3 $S = \{p(x;\xi)\}$ を統計モデルとする．このとき 0-接続は Fisher 計量 g に関する Levi-Civita 接続であることを示せ．

問題 4 S を 3 項分布の全体とする．すなわち，標本空間 $\Omega = \{0,1,2\}$ 上の確率分布

$$p(x;\xi_1,\xi_2) = \begin{cases} 1-\xi_1-\xi_2 & (x=0) \\ \xi_1 & (x=1) \\ \xi_2 & (x=2) \end{cases}$$

の全体を考える．

(1) S が指数型分布族であることを示し，自然座標系を ξ で表せ．
(2) 期待値座標系を求め ξ で表せ．
(3) 期待値座標系に関する S の Fisher 計量を求めよ．

問題 5 S を指数型分布族，$M = \{p(x;u)\}$ を S の曲指数型分布族とする．$q(x)$ を M の外部にある S の点とし，$p(x;\bar{u})$ を Kullback-Leibler ダイバージェンスによる $q(x)$ の e-射影とする.（すなわち，$\bar{u} = \mathrm{argmin}\ KL(p(u)||q(x))$ を満たす.）このとき $p(\bar{u})$ と $q(x)$ を結ぶ e-測地線は，$p(u)$ において M と直交することを証明せよ．

問題 6 q-正規分布 $qN(\mu,\sigma)$ に従っていると考えられる現象（株価の変動率など），またはその片側分布（地震のエネルギーと頻度など）を自由に選び，コンピュータ等を用いて次の推定値を求めよ．ただし標本は 100 個以上程度の個数を用い，どこでどのようなデータを入手したのか，実験の再現ができるように出典を明記すること．また計算手法を説明し，必要に応じてプログラムのソースコードなども添付すること．

(1) （通常の）標本平均，標本分散を求めよ．
(2) パラメータの最尤推定値を求めよ．
(3) パラメータの q-最尤推定値を求めよ．