定幅曲線

湯澤 明夏　境 達郎　亀崎 良助　高山 剛史

July 20, 2006

1　定幅曲線の性質

1.1　定幅曲線とは

定幅曲線とは、任意方向の平行直線で挟み込んだ時、常にその間の距離が一定であるような凸図形を指す。つまり、幅が一定と言うことである。このような図形のうち最も簡単な物は円だが、他にも定幅曲線は無限に存在する。

例えば、図 1（別紙）は正三角形の各頂点を中心として一辺の長さを半径とする円弧によってできる曲線で、ルーローの三角形と呼ばれるが、これは非常に有名な定幅曲線でありロータリーエンジンにも利用されている。これ以外にも、ルーローの三角形上に中心を持つ定半径の円を描いた際にできる包絡線も定幅曲線になる。また、正五角形、正七角形などの正奇数角形の各頂点を中心として最も長い対角線の長さを半径とする円弧によってできる曲線も定幅曲線になり、それらはルーローの五角形、七角形などと呼ばれる。定幅曲線は一般に、どの二本も平行でない n 本の直線から作ることができる。

1.2　定幅曲線の利用

定幅曲線は様々な場面で利用されている。例えば、上述したようにルーローの三角形はロータリーエンジンの中に組み込まれている。また、イギリスの硬貨はルーローの七角形の形をしている。

ルーローの三角形は定幅曲線であるため、どの方向から平行線で挟んでも幅は一定である。ゆえに幅が d のルーローの三角形は、一辺の長さ d の正方形に内接しながら（四辺に接しながら）回転することができる。この性質を利用すると、回転しながら正方形（厳密には角が少し膨らんでいる）の形を彫ることが出来るドリルが作れる。

1.3　定幅曲線の面積

自分たちが今回のテーマにしたのは、この定幅曲線の面積についてである。与えられた幅 d を持つ定幅曲線のうち面積が最大になる図形、最小になる図形はそれぞれ何か。この問題のうち前者を中心に議論を進めていく。

2　バルビエ（Barbier）の定理と証明

2.1　バルビエ（Barbier）の定理

バルビエの定理（1860 年）とは「幅 d の定幅曲線の周の長さは πd である」という定理である。上述した問題の解答にはこの定理が必要であるため、この証明を行なう。

まずは定理の証明のために必要な準備をし、最後に証明を行う。これらの準備の中でも最初に述べておくべきことをここに書いておく。

- 太文字はベクトルを表す。矢印はつけない。
- ベクトルの成分は縦書きで表す。
- ベクトルの内積を微分する時、関数の積の微分公式が適用できる。たとえばベクトル **a** とベクトル **b** の内積 **a**・**b** を微分すると、**a**'・**b**+**a**・**b**' となる。これは **a** の成分を $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$、**b** の成分を $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ などとおいて、以下のようにして確かめることができる。

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})' &= \left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right\}' = (a_1b_1 + a_2b_2)' \\
&= (a_1'b_1 + a_1b_1') + (a_2'b_2 + a_2b_2') \\
&= (a_1'b_1 + a_2'b_2) + (a_1b_1' + a_2b_2') \\
&= \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \end{pmatrix} = \mathbf{a}'\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}'
\end{aligned}
$$

  また、この式を利用して、ベクトルの内積で部分積分もできる。
- 微小量をあらわす dx などは約分などができるものと仮定する。
- 以下の曲線は一般に、連続かつ 2〜3 回程度微分が可能なものとする。

2.2　フレネ・セレ（Frenet-Serret）の公式

最初に、フレネ・セレの公式について扱う。
ある曲線をΓとし、これをパラメータ表示（媒介変数表示）して$x = x(t)$、$y = y(t)$（t は媒介変数）とする。曲線Γ上の点を位置ベクトルで表して

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}\,(t) = \begin{pmatrix} x\,(t) \\ y\,(t) \end{pmatrix}$$

とおく。これを t で微分して

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\left|\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

となる。また、t が 0 から t まで動く時に曲線Γ上の点が動く距離を$s = s(t)$とすると、弧長の公式（数学C）と上の式より

$$s = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^t \left|\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right| dt \tag{1}$$

ここで$\left|\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right|$は正だから、s は t の単調増加関数となり、従って t は s の単調増加関数となる。つまり$\frac{dt}{ds} > 0$。また、位置ベクトルのパラメータを t ではなく s として

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}\,(s) = \begin{pmatrix} x\,(s) \\ y\,(s) \end{pmatrix}$$

とする。(1) 式の両辺を t で微分すると

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right|$$

だから、$\frac{dt}{ds} > 0$ より

$$\left|\frac{d\mathbf{p}}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right| \cdot \left|\frac{dt}{ds}\right| = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = 1$$

よって、

$$\mathbf{e}_1 = \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix}$$

とおくと、$\mathbf{e}_1$ の大きさは 1 で、単位ベクトルとなる。また、このベクトルと平行な直線の傾きは

$$\frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{dy}{dx}$$

だから、このベクトルの向きはこの点における曲線 Γ の接線方向である。このため $\mathbf{e}_1$ は接ベクトルと呼ばれる。次に、$\mathbf{e}_1$ を正の向きに 90 °回転して得られる単位ベクトルを $\mathbf{e}_2$ とする。この $\mathbf{e}_2$ は単位法線ベクトルと呼ぶ。（図 3 参照）

$\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_1$ の内積は $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$ だから、この両辺を s で微分して

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{ds} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \cdot \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = 0$$

ゆえに

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{ds} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$$

したがって $\frac{d\mathbf{e}_1}{ds}$ は $\mathbf{e}_1$ と直交するため、$\frac{d\mathbf{e}_1}{ds}$ は $\mathbf{e}_2$ と平行となり、

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = \kappa \mathbf{e}_2 \tag{2}$$

とおける（κ は定数）。同様に

$$\frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = \mu \mathbf{e}_1 \tag{3}$$

とおける (μ は定数)。ここで、$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ の両辺を s で微分すると

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{ds} \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \cdot \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = 0$$

であり、これに (2)、(3) を代入すると $\kappa + \mu = 0$ となる。したがってまとめると、

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = \kappa \mathbf{e}_2$$

$$\frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = -\kappa \mathbf{e}_1$$

これをフレネ・セレの公式と呼ぶ。

2.3　曲率

フレネ・セレの公式における κ の値を曲率と呼ぶ。

$\mathbf{e}_1$ がｘ軸と成す角を θ とすると、$\mathbf{e}_1$ は単位ベクトルだから

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{d\theta} = \mathbf{e}_2$$

となる。このため

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = \frac{d\mathbf{e}_1}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} = \mathbf{e}_2 \cdot \frac{d\theta}{ds}$$

となる。これとフレネ・セレの公式の第一式を比較して

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$$

となる。つまり曲率とは曲線の進行方向 θ の弧長ｓに対する変化の割合に等しい。したがって $\kappa > 0$ なら左へ曲がり、$\kappa < 0$ なら右に曲がる。

因みに、κ の逆数の絶対値は曲率半径と呼ばれ、その点において曲線 Γ に接する円の半径を表す。

2.4　バルビエ（Barbier）の定理の証明

ある凸閉曲線（平面を二つの領域に分ける図形のうち、凸な図形）において、図 2（別紙）のように曲線を平行直線で挟んだときに接する点の一方を A とし、点 A における単位法線ベクトルを θ（$\mathbf{e}_1$ が x 軸と成す角）の関数として $\mathbf{e}_2(\theta)$ とする。もう一方の点を B とし、点 B における単位法線ベクトルを $\mathbf{e}_2(\theta+\pi)$ とする。また、それぞれの点の位置ベクトルを $\mathbf{p}(\theta)$、$\mathbf{p}(\theta+\pi)$ とし、平行直線間の距離を $W(\theta)$ とする。

ここで、平行直線で分けられる三つの領域のうち凸閉曲線を含まず、かつ点 A を含む直線が境界線となる領域に原点をとり、この原点を通り二本の平行直線に平行な直線を m とする。この m に A、B から下ろした垂線の足をそれぞれ C、D とする。

このとき、内積を考えると $\mathbf{p}(\theta)\cdot\mathbf{e}_2(\theta)=AC$、$-\mathbf{p}(\theta+\pi)\cdot\mathbf{e}_2(\theta+\pi)=BD$ となるため、$W(\theta)=BD-AC=-\mathbf{p}(\theta+\pi)\cdot\mathbf{e}_2(\theta+\pi)-\mathbf{p}(\theta)\cdot\mathbf{e}_2(\theta)$ となる。ここで凸閉曲線の周長を L とおき、$W(\theta)$ を 0 から π までで積分すると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} W(\theta)d\theta &= \int_0^{\pi}\{-\mathbf{p}(\theta+\pi)\cdot\mathbf{e}_2(\theta+\pi)-\mathbf{p}(\theta)\cdot\mathbf{e}_2(\theta)\}d\theta \\
&= -\int_0^{\pi}\mathbf{p}(\theta)\cdot\mathbf{e}_2(\theta)d\theta-\int_0^{\pi}\mathbf{p}(\theta+\pi)\cdot\mathbf{e}_2(\theta+\pi)d\theta \\
&= -\int_0^{\pi}\mathbf{p}(\theta)\cdot\mathbf{e}_2(\theta)d\theta-\int_{\pi}^{2\pi}\mathbf{p}(\theta)\cdot\mathbf{e}_2(\theta)d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi}\mathbf{p}(\theta)\cdot\mathbf{e}_2(\theta)d\theta \\
&= -\int_0^{L}\mathbf{p}(s)\cdot\mathbf{e}_2(s)\kappa ds \qquad \leftarrow \kappa=\frac{d\theta}{ds} \\
&= -\int_0^{L}\mathbf{p}(s)\cdot\frac{d\mathbf{e}_1(s)}{ds}ds \qquad \leftarrow \frac{d\mathbf{e}_1(s)}{ds}=\kappa\mathbf{e}_2 \\
&= -[\mathbf{p}(s)\cdot\mathbf{e}_1(s)]_0^L+\int_0^L\frac{d\mathbf{p}(s)}{ds}\cdot\mathbf{e}_1 ds \\
&= \int_0^L|\mathbf{e}_1(s)|^2 ds \\
&= \int_0^L ds \\
&= L
\end{aligned}
$$

ゆえに、

$$\int_0^{\pi} W(\theta)d\theta = L$$

となるため、$W(\theta)=d$（幅が一定）のとき $\pi d=L$ となる。これでバルビエの定理が証明された。

3　定幅曲線の面積

3.1　面積最大の定幅曲線

単純閉曲線の周の長さを L、囲む面積を A とすると、

$$L^2 \geq 4\pi A$$

が成り立ち、等号はこの閉曲線が円のときのみ成り立つ。これを等周不等式という。

この等周不等式とバルビエの定理から、与えられた幅 d を持つ定幅曲線の周長は πd（一定）で、面積が最大になるのはこの定幅曲線が円になる時であり、その面積は $(\pi d)^2 = 4\pi A$ より $A = \frac{d^2\pi}{4}$ となる。

3.2　面積最小の定幅曲線

与えられた幅を持つ定幅曲線の中で囲む面積が最小のものはルーローの三角形であるという、ブラシュケ・ルベーグ（Blaschke-Lebesgue）の定理がある。この定理の証明は煩雑なため省略する。

以上の議論から、与えられた幅を持つ定幅曲線のうち、面積が最大のものは円、最小のものはルーローの三角形となる。

このため、もし自動販売機が硬貨の幅だけで硬貨の種類を認識しているとすると、硬貨を円形にするのは最も資源の無駄遣いに当たり、ルーローの三角形にすべきである。

References

[1] 荻上紘一,『共立講座　21 世紀の数学　第 6 巻　多様体』, 共立出版株式会社, 1997 年

[2] 投稿 124, http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/mathbun/mathbun124.htm

[3] 楕円の平行曲線（その２）, http://www.geocities.jp/ikuro_kotaro/koramu/247_daen2.htm

[4] ru-ro, http://genryu.cside4.com/yoshitago/rurosubete.htm

図 1

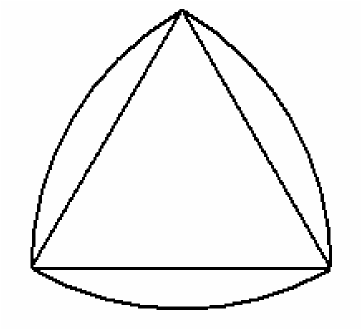

図 2

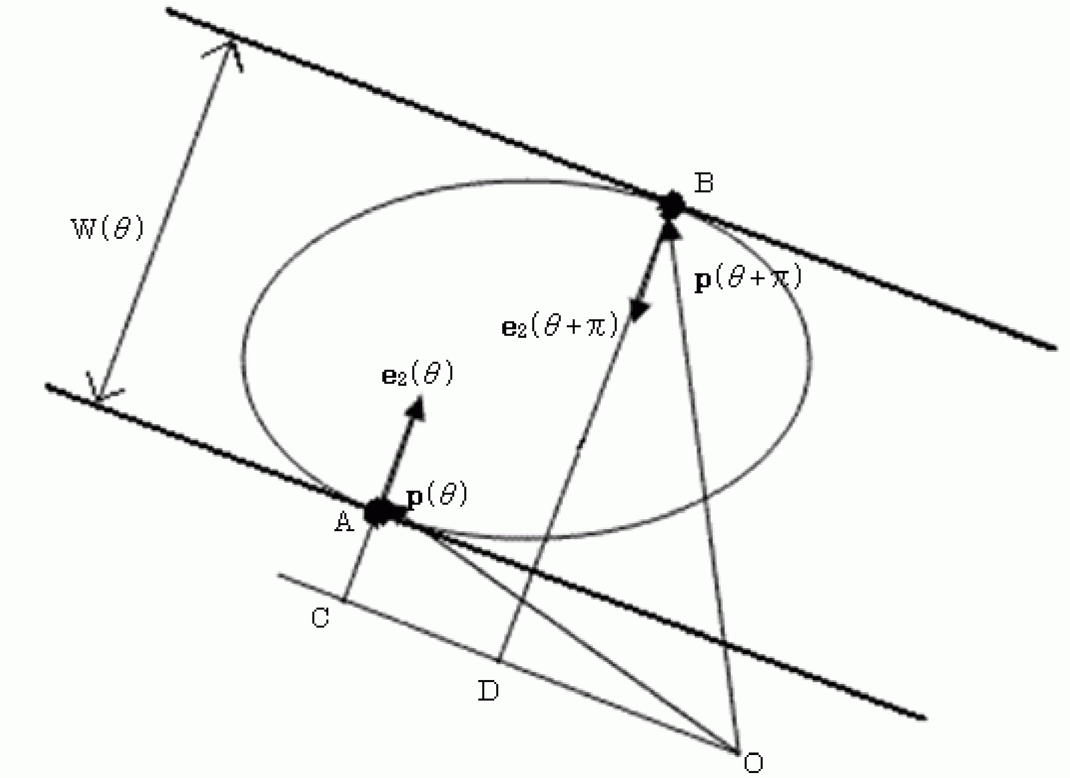

図 3