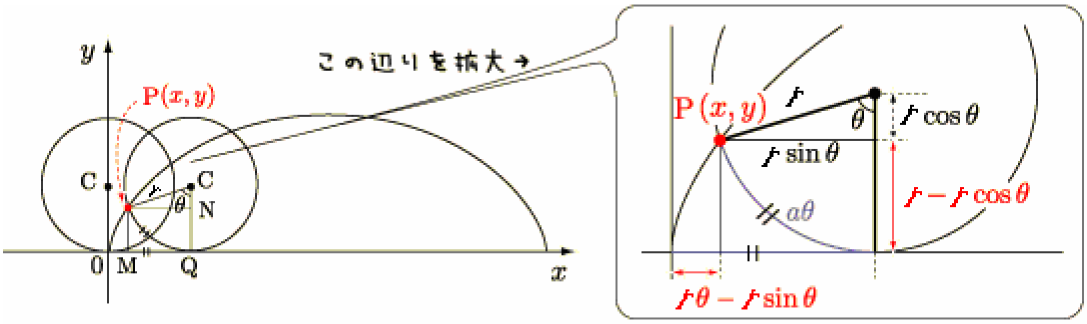
最速降下問題

グループ A　新井洋輔　宮本郁己　森佳祐　鈴鹿正顕

サイクロイド曲線

ある直線上で円板を滑ることなく転がしたときに円周上のある一点が描く軌跡の事。



半径 r の円を原点で x 軸に接するような状態から転がし、その転がした角度を θ とおくと、原点あった円周上の点が描く軌跡は上の図より、θ を媒介変数として

$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad \cdots ①$$

と表すことができる。

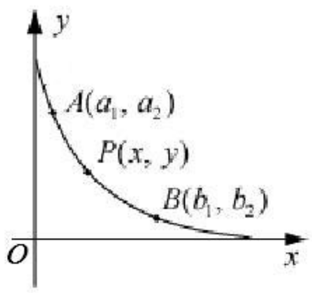
問題

ある鉛直平面上に与えられた 2 点（同一鉛直線上にはない）間を曲線で結び、その曲線に沿って質点をそっと滑り落とすとき、質点が最も短い時間で滑り落ちる曲線はどんな曲線か？

目標

2 点間を最も短い時間で滑り落ちる曲線がサイクロイド曲線であることを証明したい。

Ⅰ．質点が 2 点間を滑り落ちるのにかかる時間を求める。



xy 平面上において求めたい曲線を $y = \varphi(x)$ とおく。t を時刻、T を質点が 2 点間を滑り落ちるのにかかる時間とし、時刻 t に質点がある地点を $P(x, y)$ とする。
また、滑り落とす質点の質量を m、重力による加速度を g、質点の速さを $v(t)$、AP 間の曲線に沿った距離を $s(t)$ とする。
このとき問題より $t = 0$ において質点は点 A にあり、質点の初速は 0 といえる。

2 点 A, P に質点があるときの質点がそれぞれ持つ力学的エネルギー U_A, U_P は

$$U_A = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + mga_2$$

$$U_P = \frac{1}{2}m\{v(t)\}^2 + mgy$$

と表される。
このとき力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m0^2 + mga_2 = \frac{1}{2}m\{v(t)\}^2 + mgy$$

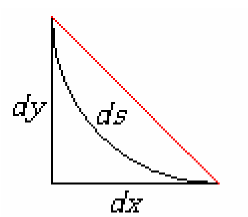
が成立し、同式を整理して

$$v(t) = \sqrt{2g(a_2 - y)}$$

を得る。
質点の移動距離 $s(t)$ の微小変化分 ds は下図の赤線のように近似できるので

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$



と表すことができる。（弧長の定理より）
速さ $v(t)$ は

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

であることから

$$v(t) = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

が導かれ、同式より

$$dt = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{v(t)} dx$$

となる。
ゆえに降下時間T は

$$T = \int_{x=a_1}^{x=b_1} dt$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{v(t)} dx$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2g(a_2 - y)}} dx$$

となり、したがって

$$T = \int_{a_1}^{b_1} \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2g(a_2 - y)}} dx$$

となる。

Ⅱ．T が最小値をとる条件を求める。

簡易化のために

$$\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2g(a_2-y)}} = f(y, \frac{dy}{dx}) = f(y, \nu) \qquad (\frac{dy}{dx} = \nu)$$

とおく。

$y=\varphi(x)$ のとき、T が最小値となると仮定する。

ここで、曲線 $y=\varphi(x), (a_1 \le x \le b_1)$ に対しえて

$$F(\varphi) = \int_{a_1}^{b_1} f\left(\varphi(x), \frac{d\varphi}{dx}(x)\right)dx$$

をおき、その極値を考える。

$h(a_1)=h(b_1)=0$ をみたす 0 でない任意の関数 $h(x)$ を用いて新たな関数

$$y=\varphi(x)+\varepsilon h(x)$$

を作る。ε が定まると T も一つだけ定まるので、T は ε の関数 $T(\varepsilon)$ と考えることができる。

また、ε が連続的に変化するとき、T も連続的に変化することから、

$$T'(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left\{F(\varphi+\varepsilon h) - F(\varphi)\right\} \quad \cdots ②$$

が存在するといえる。

このとき

$$F(\varphi) = \int_{a_1}^{b_1} f\left(\varphi(x), \frac{d\varphi}{dx}(x)\right)dx$$

$$F(\varphi+\varepsilon h)=\int_{a_1}^{b_1} f\left(\varphi(x)+\varepsilon h(x),\frac{d\varphi}{dx}(x)+\varepsilon\frac{dh}{dx}(x)\right)dx$$

$$=\int_{a_1}^{b_1}\left\{ f\left(\varphi(x),\frac{d\varphi}{dx}(x)\right)+\frac{\partial f(y,\nu)}{\partial\varphi(x)}\varepsilon h(x)+\frac{\partial f(y,\nu)}{\partial\frac{d\varphi}{dx}(x)}\cdot\varepsilon\frac{dh}{dx}(x)+(\varepsilon^2\text{の項})+\cdots\right\}dx$$

である。

なお 2 つ目の式の変形は 2 変数関数のテーラー展開によって導出される。また上の式は

$f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y},\ f_v=\dfrac{\partial f}{\partial v}$ に $y=\varphi(x), v=\dfrac{d\varphi}{dx}(x)$ を代入したものである。

よって

$$T'(0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left\{F(\varphi+\varepsilon h)-F(\varphi)\right\}$$

$$=\int_{a_1}^{b_1}\left\{\frac{\partial f(y,\nu)}{\partial\varphi(x)}h(x)+\frac{\partial f(y,\nu)}{\partial\frac{d\varphi}{dx}(x)}\cdot\frac{dh}{dx}(x)\right\}dx$$

となる。

仮定より $\varepsilon=0$ のとき、$T(\varepsilon)$ は極値をとるので

$$\frac{dT(\varepsilon)}{d\varepsilon}=T'(\varepsilon),\quad T'(0)=0$$

が成り立つ。

よって

$$\int_{a_1}^{b_1}\left\{\frac{\partial f(y,\nu)}{\partial\varphi(x)}h(x)+\frac{\partial f(y,\nu)}{\partial\frac{d\varphi}{dx}(x)}\cdot\frac{dh}{dx}(x)\right\}dx=0 \quad \cdots③$$

が成り立つ。

このとき

$$\int_{a_1}^{b_1} f_v \frac{dh}{dx}(x)dx = \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial f}{\partial v}\left(\varphi(x), \frac{d\varphi}{dx}(x)\right)\cdot\frac{dh}{dx}(x)dx = \left[f_v h(x)\right]_{a_1}^{b_1} - \int_{a_1}^{b_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)h(x)dx$$

$$= -\int_{a_1}^{b_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)h(x)dx$$

であることから③は、

$$\int_{a_1}^{b_1} f_y h(x)dx - \int_{a_1}^{b_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)h(x)dx = 0$$

となり

$$\int_{a_1}^{b_1}\left(f_y - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \nu}\right)\right)h(x)dx = 0$$

となる。

これが $h(a_1) = h(b_1) = 0$ をみたす任意関数 $h(x)$ について成り立つから

$$f_y = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) \quad \cdots \text{(注 1)}$$

従って $y = \varphi(x)$ は

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \nu}(\varphi(x), \frac{d\varphi(x)}{dx})\right) \quad \cdots④$$

を満たす。

なお $\frac{\partial f}{\partial \nu}(\varphi(x), \frac{d\varphi(x)}{dx})$ は $f\left(\varphi(x), v\right)$ を v で偏微分したのちに $\nu = \frac{d\varphi(x)}{dx}$ を代入したものである。

(注 1)

一般に連続関数 $f(t) \quad (t_0 \le t \le t_1)$ が $h(t_0) = h(t_1) = 0$ である任意の連続関数 $h(t)$ に対して常に $\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt = 0$ であれば $f(t) \equiv 0$ である。

(証明)

$f(t) \ne 0$ となる t が $t_0 \le t \le t_1$ の範囲内に存在すると仮定する。

$h(x)$ は任意な関数であるから、 $f(a) \ne 0$ のとき、常に $f(a)h(a) > 0$ を満たすような $h(x)$ を考える。

このとき

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt > 0$$

となり、矛盾が生じる。

よって任意の関数$h(t)$ **に対して常に**$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt = 0$ **であれば** $f(t) \equiv 0$ **である。**

(注 1 終)

III. 条件を満たす $\varphi(x)$ を求める。

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{2g(a_2-y)}}\frac{2v}{2\sqrt{1+v^2}}=\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\sqrt{2g(a_2-y)}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_2-y}}\right)'=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2g}}\times\frac{\frac{-1}{2\sqrt{a-y}}}{a_2-y}=\frac{-\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{2\sqrt{2g}(\sqrt{a_2-y})^3}$$

従って④の式は

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\sqrt{2g(a_2-y)}}\right)-\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{2\sqrt{2g}\sqrt{a_2-y}^3}=0$$

となり、これを整理していくと

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\sqrt{2g(a_2-y)}-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\sqrt{2g(a_2-y)}\right)}{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}2g(a_2-y)}-\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{2\sqrt{2g}\sqrt{a_2-y}^3}=0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\sqrt{2g(a_2-y)}-\frac{dy}{dx}\left(\frac{2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}}{2\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dy}\right)^2}}\sqrt{2g(a_2-y)}+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\frac{-2g\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{2g(a_2-y)}}\right)=0$$

となる。よって

$$-\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}\sqrt{a_2-y}}=0$$

両辺に $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\sqrt{2g(a_2-y)}$ **をかけて、**

$$\frac{d^2y}{dx^2}(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2)2g(a_2-y)-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2}2g(a_2-y)+g(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2)^2g=0$$

これより

$$2\frac{d^2y}{dx^2}(a_2-y)=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1$$

$$\frac{2\dfrac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}-\frac{1}{a_2-y}=0$$

となる。

$\frac{dy}{dx}$ をかけて、x で積分すると、

$$\int\frac{2\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}dx-\int\frac{\dfrac{dy}{dx}}{a_2-y}dx=0$$

となり、よって

$$\log(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2)+\log(a_2-y)=C_1 \qquad (C_1\text{は積分定数})$$

$$\Leftrightarrow \log\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}(a_2-y)=C_1$$

$$\Leftrightarrow \left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}(a_2-y)=C_2 \qquad (C_2=e^{c_1})$$

これより

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{C_2}{a_2-y}-1=\frac{y-a_2+C_2}{a_2-y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{y-a_2+C_2}{a_2-y}}$$

この微分方程式を解くと $y=\varphi(x)$ は θ を媒介変数として

$$\begin{cases} x = \dfrac{-C}{2}(\theta - \sin\theta) \\ y = \dfrac{-C}{2}(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad \cdots（注 2）$$

となる。

$-\dfrac{C}{2} = r$ とおくと、この式は先ほど出した①のサイクロイド曲線の方程式を満たす。

これにより最速降下曲線が、サイクロイド曲線であることがわかった。

（注 2）

微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{b-y}{y-a}}$ を解く。（ここでは $a = a_2$、$a_2 - C = b$ とおく）

（解）

$$y = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\theta \quad \cdots㊀$$

とおくと

$$\begin{cases} b - y = \dfrac{b-a}{2}(1 - \cos\theta) \\ y - a = \dfrac{b-a}{2}(1 + \cos\theta) \end{cases} \quad \cdots㊁$$

㊀より

$$dy = -\frac{b-a}{2}\sin\theta \cdot d\theta \quad \cdots㊂$$

また $\dfrac{dy}{dx}$ は㊁をもちいると、

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos z\theta}} = \sqrt{\frac{\dfrac{1-\cos\theta}{\theta}}{\dfrac{1+\cos\theta}{\theta}}} = \sqrt{\frac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}} = \tan\frac{\theta}{2} \quad \cdots㊃$$

と表せ、従って㊂、㊃より

$$-\frac{b-a}{2}\sin\theta\frac{d\theta}{dx} = \frac{dy}{dx} = \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{b-a}{2} 2\cdot\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\frac{d\theta}{dx}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow -(b-a)\cos^2\frac{\theta}{2}\frac{d\theta}{dx}=1$$

$$\Leftrightarrow -\int\frac{b-a}{2}(1+\cos\theta)d\theta=\int dx$$

これより

$$x=-\frac{b-a}{2}(\theta+\sin\theta)+C \qquad (C\text{は積分定数})$$

これに $a=a_2, b=a_2-C$ を代入すると先ほどの式になる。

（注 2 終）

参考資料　「最速降下問題について　北海道小樽桜陽高等学校　佐藤公威　著」
http://www.nikonet.or.jp/spring/rakka/rakka.htm

参考図書　「岩波講座　現代数学への入門「力学と微分方程式」　高橋陽一郎　著」

この資料に関するコメント

一般教育演習 目で見る数学入門 担当：古畑　仁

２００６年９月１日

微分積分を履修していないので偏微分も知らないという学生たち，彼らが協力してまとめ上げたこの資料は，数学的に細かな点で目をつぶってもらわなければいけないところもありますが，かなり立派なものに仕上がったといってもよいでしょう．

たとえば，４ページ３行目は $f(y,\nu) := \dfrac{\sqrt{1+\nu^2}}{\sqrt{2g(a_2-y)}}$ とすべきでしょうし，５ページ２行目は，

$$\int_{a_1}^{b_1} \left\{ f(\varphi(x), \frac{d\varphi}{dx}(x)) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(x), \frac{d\varphi}{dx}(x))h(x) + \frac{\partial f}{\partial \nu}(\varphi(x), \frac{d\varphi}{dx}(x))\frac{dh}{dx}(x) \right) \varepsilon + \left(\varepsilon^2 \text{ の項}\right) + \cdots \right\} dx$$

とかくべきです（ほかにも同様な修正が必要な箇所があります）．

彼らは，Hugo Steinhaus の Mathematical Snapshots を読んで，題材を選び，それについて自分たちでテキストを探してきました．それを用いて勉強したことについて発表会を行いました．そのときの資料がこのファイルです．同じようにして，定幅曲線についてまとめたグループＢのみなさんの資料も立派なものですので，合わせてご覧頂ければ幸いです．