# HATTORI-STALLINGS RANK について

秋田 利之

## 1. はじめに

この文章では Hattori-Stallings rank という群環上の有限生成射影加群の不変量を紹介します。有限群の通常表現は有限生成射影加群となりますが, その Hattori-Stallings rank は指標と同じ情報を与えます。したがって Hattori-Stallings rank は指標の概念を無限群に拡張したものだといえます。

簡単な応用は例 3 で触れていますが、本格的な応用には触れられなかったので論文 [1], [3], [5] などを参照してください。また Hattori-Stallings rank の性質に関する Bass 予想と有名な予想がありますが まだ未解決です。Bass 予想については [5] を参照してください。

## 2. Hattori-Stallings rank

以下断わらない限り加群はすべて有限生成と仮定します。$kG$ を群 $G$ の体 $k$ 上の群環, $P$ を射影 $kG$-加群とします。$P$ が射影加群であることから $P \oplus P' = F \cong (kG)^n$ となる射影 $kG$-加群 $P'$ と自由 $kG$-加群 $F$ とが存在します。$p : F \longrightarrow P$ を射影, $i : P \hookrightarrow F$ を包含写像とします。$\imath : F \longrightarrow F$ を $\imath = i \circ \mathrm{id}_P \circ p$ により定義します:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\imath"] \arrow[d] & F \\ P \arrow[r, "\mathrm{id}_P"] & P. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$F$ の基底を適当に選ぶことにより $\imath$ は $kG$ 上の正方行列 $A$ により表わせます。可換環であれば $A$ のトレース $\mathrm{tr}A$ が $P$ の不変量となるのですが、今の場合 $kG$ が非可換環なので $\mathrm{tr}A$ は基底の取り方に依存します。基底に依存しない量を構成するために次のような操作をします。$[kG, kG]$ を $\{r_1 r_2 - r_2 r_1 | r_1, r_2 \in kG\}$ で生成される $kG$ の (additive な) 部分群とします。

$$T(kG) = kG/[kG, kG]$$

を商群, $\pi : kG \longrightarrow T(kG)$ を射影とします。$[kG, kG]$ は一般にはイデアルではないので, $T(kG)$ は環にはなりません。

$\pi(\mathrm{tr}A)$ は $F$ の基底によらないことが容易にわかります。そこで次のように定義します。

**定義 2.1.** $P$ を射影 $kG$-加群とします。上の記号のもとで

$$R(P) = \pi(\mathrm{tr}A) \in T(kG)$$

を $P$ の **Hattori-Stallings rank** (あるいは Hattori-Stallings trace) と呼びます。$R(P)$ は $P$ の不変量です。

群環上の射影加群の Hattori-Stallings rank は [6] と [7] で同時期に独立に定義されました。

さて $g, g' \in G$ に対して $[g, g'g^{-1}] = gg'g^{-1} - g'$ であることに注意すると, $T(kG)$ は $G$ の共役類を基底とする $k$ 上のベクトル空間と同型です。したがって $T(kG)$ の元は有限和

$$\sum_{g \in \mathcal{C}} t(g) \cdot [g]$$

で書きあらわせます。ここで $\mathcal{C}$ は $G$ の共役類の代表元の集合, $t : G \to k$ は class function で有限個の $g \in \mathcal{C}$ を除いて $t(g) = 0$, $[g]$ は $g \in G$ の共役類を表わします。また $g \in G$ に対して $\pi(g) = 1 \cdot [g]$ となります。

上の同一視のもとで射影 $kG$-加群 $P$ の Hattori-Stallings rank $R(P)$ は

$$R(P) = \sum_{g \in \mathcal{C}} R(P)(g) \cdot [g] \in T(kG)$$

と書きあらわすことができます。とくに

$$r(P) = R(P)(1) \in k$$

と書くことにします。$r(P)$ は体の元なので取り扱いが $R(P)$ そのものより簡単になります。また群 $G$ を強調したいときには $r_G(P)$, $R_G(P)$ と書くことにします。

注意 1. Hattori-Stallings rank は群環に限らず一般の環の場合にも定義できることが上の考察から見て取れると思います。実際 [6] は可換とは限らない環上の射影加群の rank を定義することを目的としています。

## 3. Hattori-Stallings rank の性質

Hattori-Stallings rank の性質を簡単に述べておきましょう。証明は [1], [3] などを見てください。

(a) **加法性** $P_1$, $P_2$ を射影加群とします。そのとき

$$R(P_1 \oplus P_2) = R(P_1) + R(P_2)$$

ただし右辺の和は $T(kG)$ の中の和です。これは rank というからには当然成り立って欲しい性質です。

(b) **部分群との関係** $H$ を $G$ の指数が有限な部分群とします。$P$ が射

影 $kG$-加群ならば $P$ の $kH$ への制限は射影 $kH$-加群となり, 任意の $h \in H$ に対して

$$R_H(P)(h) = (C_G(h) : C_H(h)) \cdot R_G(P)(h)$$

が成り立ちます。ここで $C_G(h)$ は $h$ の $G$ における中心化群です。とくに

$$r_H(P) = (G : H) \cdot r_G(P)$$

となります。

(c) **Induced module との関係** $f : G \to H$ を群準同型とします。$f$ は自然な準同型 $f : kG \to kH$, $T(f) : T(kG) \to T(kH)$ を誘導します。$P$ を射影 $kG$-加群とします。そのとき $f : kG \to kH$ に関する induced module $kH \otimes_{kG} P$ は射影 $kH$-加群となり, その Hattori-Stallings rank は

$$R_H(kH \otimes_{kG} P) = T(f)(R_G(P)) \tag{1}$$

で与えられます。

(d) $k$ をとくに標数 0 の体とします。$k$ 上のベクトル空間 $V$ の Hattori-Stallings rank が $V$ の次元に等しくなることに注意すれば, 性質 (c) においてとくに $H = \{1\}$ とおくことにより

$$\dim_k k \otimes_{kG} P = \sum_{g \in \mathcal{C}} R_G(P)(g)$$

が得られます。

## 4. 例

具体的な射影加群にたいして Hattori-Stallings rank がどのようになるかを見ることにします。

**例 1.** $F = (kG)^n$ ならば $R_G(F) = n \cdot [1]$ (rank という名前がつくからには当然成り立って欲しい性質)。

**例 2** (指標との関係)**.** $G$ を有限群, $k$ を標数 0 の体とします。$V$ を $G$ の $k$ 上の有限次元線型表現とします。このとき $V$ は $kG$ 上の有限生成射影加群となります。したがって $V$ に対して指標と Hattori-Stallings rank の両方が定義されますが,

$$R_G(V)(g) = \frac{\chi_V(g^{-1})}{|C_G(g)|}$$

となります [6]。ただし $\chi_V$ は $V$ の指標です。したがって有限群の通常表現の場合には Hattori-Stallings rank は指標と同じ情報を与えるわけです。またこの例から $R_G(P)(g)$ が一般には整数でないことがわかります。

**例 3** (Permutation module)**.** 体を有理数体 $\mathbb{Q}$ に固定します。群 $G$ が集合 $X$ に (左から) 作用しているとします。$X$ が $G$-有限とは

1. $X/G$ が有限集合。
2. 各 $x \in X$ にたいし $x$ での固定部分群 $G_x$ が有限部分群。

と定義します。これは有限群の有限集合上の作用の拡張になっています。

さて $\mathbb{Q}[X]$ を $X$ からつくられる permutation module とします。$\mathbb{Q}[X]$ は $X$ を基底とする $\mathbb{Q}$ の線型空間で $G$ の $X$ への作用を線型に拡張したものです。

$\mathbb{Q}[X]$ は有限生成射影 $\mathbb{Q}G$-加群になります。これは次のようにすればわかります。$X/G$ を $X$ の $G$-軌道の代表元の集合とすると, $X$ は

$$X \approx \coprod_{x\in X/G} G/G_x$$

と分解します。このことから $\mathbb{Q}[X]$ は次のように分解します:

$$\mathbb{Q}[X] \cong \bigoplus_{x\in X/G} \mathbb{Q}[G/G_x]$$

ここで $\mathbb{Q}[G/G_x]$ は $G$-集合 $G/G_x$ から得られる permutation module で同型

$$\mathbb{Q}[G/G_x] \cong \mathbb{Q}G \otimes_{\mathbb{Q}G_x} \mathbb{Q}$$

がなりたちます (ただし $\mathbb{Q}$ は自明な $\mathbb{Q}G_x$-加群とみます)。$G_x$ は仮定により有限群ですから $\mathbb{Q}$ は 射影 $\mathbb{Q}G_x$-加群となり, したがって性質 (c) から各 $\mathbb{Q}[G/G_x]$ は射影 $\mathbb{Q}G$-加群になります。その直和ですから $\mathbb{Q}[X]$ も射影加群になります。

したがって $\mathbb{Q}[X]$ の Hattori-Stallings rank が定義されます。

$$\begin{aligned} R_G(\mathbb{Q}[X]) &= \sum_{x\in X/G} R_G(\mathbb{Q}G \otimes_{\mathbb{Q}G_x} \mathbb{Q}) && (2)\\ &= \sum_{x\in X/G} i^G_{G_x}(R_{G_x}(\mathbb{Q})), && (3)\end{aligned}$$

ただし $i^G_{G_x} : T(\mathbb{Q}G_x) \rightarrow T(\mathbb{Q}G)$ は $G_x \hookrightarrow G$ から自然に誘導される準同型です。とくに

$$r_G(\mathbb{Q}[X]) = \sum_{x\in X/G} \frac{1}{|G_x|}$$

となります。

$X$ が $G$-有限な $G$-集合とすると, $g \in G$ が有限位数の元ならば不動点集合 $X^g$ は $C_G(g)$-有限な $C_G(g)$-集合になっていることに注意します (ちなみに $g \in G$ が無限位数なら $X^g = \emptyset$)。実は次の結果が知られています。

**命題 1.** 例 *3* の仮定のもとで

$$R_G(\mathbb{Q}[X])(g) = r_{C_G(g)}(\mathbb{Q}[X^g]) \tag{4}$$

が成り立ちます。

これは K. S. Brown の (より一般的な) 結果 [3] から導けますが, $G$-集合に関する初等的な (でも繁雑な) 考察からも出せます。

$$|X/G| = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}G} \mathbb{Q}[X]$$

であることに注意すると, 性質 (d) と命題 1 から

$$|X/G| = \sum_{g \in \mathcal{C}} r_{C_G(g)}(\mathbb{Q}[X^g]) \tag{5}$$

となります。

上の式 (5) を有限群の場合にあてはめて見ましょう。有限群 $G$ が有限集合 $X$ に (左から) 作用しているとき, 軌道の数 $|X/G|$ は次のようにあらわされます:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| \tag{6}$$

この式を Hattori-Stallings rank の式から導出してみます。$C_G(g)$ が有限群ですから, 例 2 により $r_{C_G(g)}(\mathbb{Q}[X^g]) = |X^g|/|C_G(g)|$ となります。したがって式 (5) より

$$|X/G| = \sum_{g \in \mathcal{C}} \frac{|X^g|}{|C_G(g)|} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in \mathcal{C}} \frac{|G|}{|C_G(g)|} |X^g|$$

ここで $|G|/|C_G(g)|$ が $g$ の共役類の個数であることに注意すると

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

となります。よって式 (6) が示せました。

## References


[1] H. Bass, Euler characteristics and characters of discrete groups, *Invent. Math.* **35** (1976), 155–196

[2] ———, Traces and Euler characteristics, Homological group theory (C. T. C. Wall ed.), *London Math. Soc. Lecture Notes 36*, Cambridge University Press, Cambridge, 1979, 1–26.

[3] K. S. Brown, Complete Euler characteristics and fixed-point theory, *J. Pure Appl. Algebra* **24** (1982), 103–121.

[4] ———, *Cohomology of Groups*, Graduate texts in mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1982.

[5] B. Eckmann, Cyclic homology of groups and the Bass conjecture, *Comment. Math. Helv.* **61** (1986), 193–202.

[6] A. Hattori, Rank element of a projective module, *Nagoya J. Math.* **25** (1965), 113–120.

[7] J. Stallings, Centerless groups–an algebraic formulation of Gottlieb's theorem, *Topology* **4** (1965), 129–134.

福岡大学応用数学科
*E-mail address*: `akita@ssat.fukuoka-u.ac.jp`