

渦度の方向と粘性流体

2014年7月

儀我 美一（東京大学）

- 1. 渦**
- 2. 渦度とは**
- 3. 粘性流体方程式のクレイ社の懸賞金付き未解決問題**
- 4. 渦度の方向による非爆発条件**
- 5. 粘着条件の効果**

1. 渦

Wikipedia

渦：流体やそれに類する物体が回転して発生する**螺旋**状のパターンのこと。
渦巻きなどとも言う。

Wikipedia

vortex: A vortex is a spinning, often turbulent, flow of fluid. Any **spiral** motion with closed streamlines is vortex flow. The motion of the fluid swirling rapidly around a center is called a vortex.

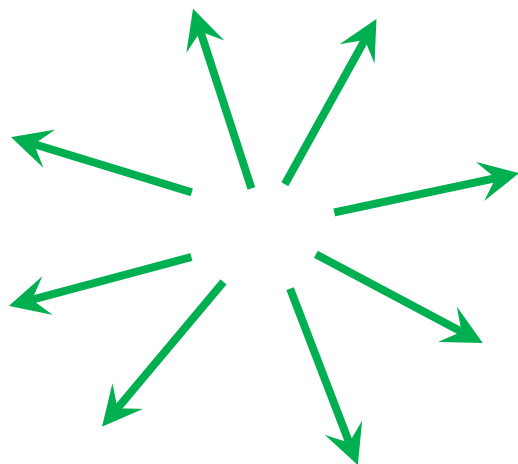
Wikipedia

螺旋（弦巻線）：3次元曲線の一種で、回転しながら回転面に垂直成分のある方向へ上昇する曲線。(helix)

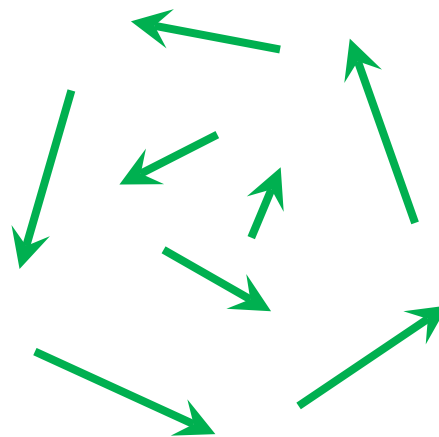
渦巻（螺線）：渦が巻くような、旋回するにつれて中心から遠ざかる（平面）曲線。(spiral)

2. 渦度とは

ベクトル場がどれくらい回転しているかを計る。



渦度小さい

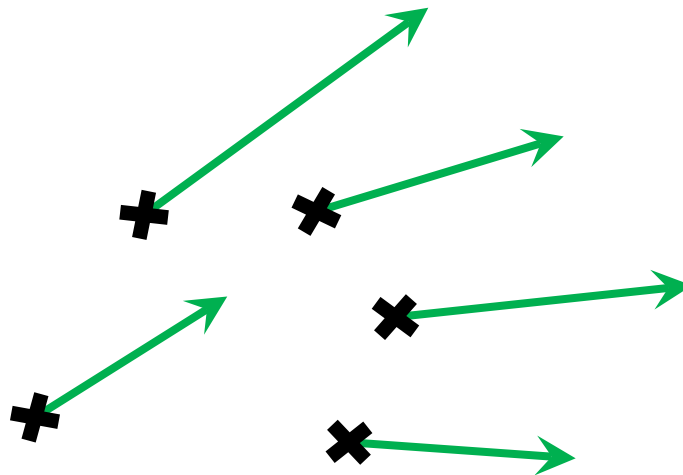


渦度大きい

ベクトル場

空間のベクトル：空間の各点に対してベクトルを対応させる写像

[例：各地点でそこでの風向風速を対応させる写像]



渦度

定義: ベクトル場 $U = (u, v, w)$

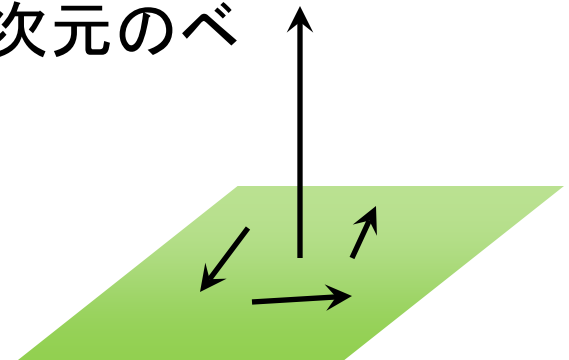
$$u = u(x, y, z), v = v(x, y, z), w = w(x, y, z)$$

に対して

$$\nabla \times U = \text{curl } U = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

をベクトル場 U の渦度場 (vorticity)、例えば $U = (u(x, y), v(x, y), 0)$ といった2次元のベクトル場とすると

$$\text{curl } U = \left(0, 0, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

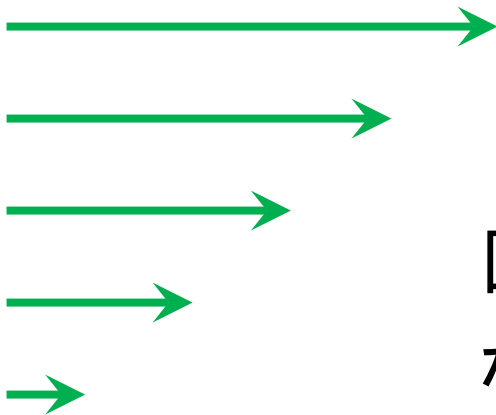


2次元ベクトルの場合の渦度の方向は
平面に直交。

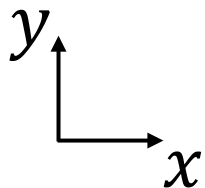
渦度場の計算例

$$U = (cy, 0, 0) \quad c: \text{定数}$$

$$\text{curl } U = (0, 0, -c)$$



回るというより、ねじれる感じ
なので curl という記号を使う。



3. 粘性流体方程式のクレイ社の懸賞金付き未解決問題

3次元の非圧縮性粘性流体の運動方程式であるナビエ・ストークス方程式の初期値問題は、与えられた初速度に対して時間大域的な滑らかな解をただ一つ持つか？

注1：初速度の大きさには制限を課してはいけない。
小さい初期値については解決済。

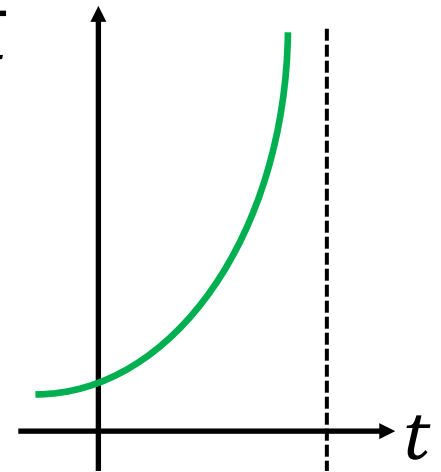
注2：2次元の場合は滑らかな時間大域解をただ一つ持つ。

微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = f(U) \\ U(0) = U_0 \text{ (既知)} > 0 \end{cases}$$

$$f(U) = U^2 \text{ のとき } U(t) = \frac{1}{1/U_0 - t}$$

$$t \rightarrow \frac{1}{U_0} \text{ で「爆発」}$$



ナヴィエ・ストークス方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - \Delta U + (U, \nabla)U + \nabla p = 0, & \operatorname{div} U = 0 \\ U \Big|_{t=0} = U_0 \end{cases}$$

に対しての問題。

2次元と3次元の違い

$\omega = \text{curl } U$ とする。

2次元
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \Delta \omega + (u, \nabla) \omega = 0$$

3次元
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \Delta \omega + (u, \nabla) \omega - (\omega, \nabla) u = 0$$

渦を伸ばす効果

2次元と3次元の違い

- 2次元：渦度はただ移動するだけで大きくなる
ない。
- 3次元：渦度が大きくなる可能性があるか？

4. 渦度の方向による非爆発条件

爆発するならば、渦度場、速度場ともに爆発
渦度の方向はどうか？

P. Constantin – C. Fefferman '93

渦度の方向の変動が大きくならなければ爆発は
起きない(2次元流は爆発しない)。

$$\zeta = \omega / |\omega|, \quad |\zeta(x, t) - \zeta(y, t)| \leq C|x - y|$$

(積分評価による)

渦度の方向による判定法の発展

($|\zeta(x, t) - \zeta(y, t)| \leq C|x - y|^{1/2}$ 等々の条件でも可)

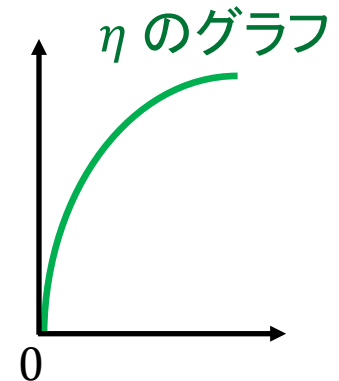
Y. G. – H. Miura '11, Comm. Math. Physics

時間区間 $(0, T)$ で滑らかな解 U が存在するとする。

関数 η と定数 C が存在して $t < T$ で

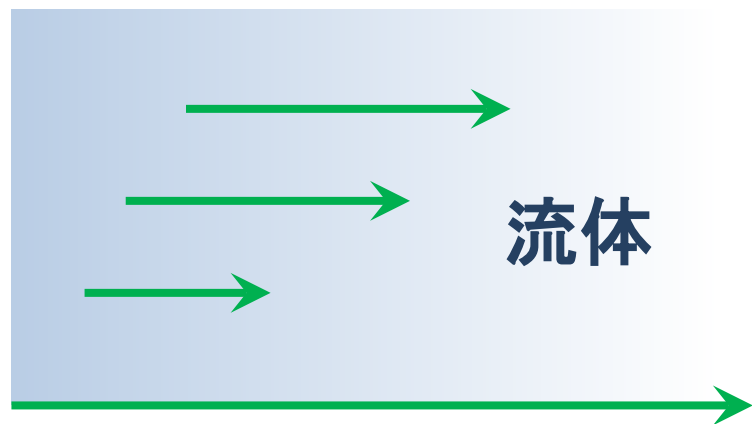
$$|\zeta(x, t) - \zeta(y, t)| \leq \eta(|x - y|)$$

$$|U(x, t)| \leq \frac{C}{(T - t)^{1/2}} \quad (\text{タイプ I}) \text{ が成立。}$$



$\Rightarrow t = T$ で爆発しない (ふくらまし法で2次元問題に帰着)

5. 粘着条件の効果



壁で流速ゼロとするとき、
この問題はどのように
なるか。

渦度は大きくなりやすい。

粘着条件のもとでの 渦度の方向による判定法

Y. G. – P.-Y. Hsu – Y. Maekawa '14, CPDE 出版予定

ナヴィエ・ストークス方程式を半空間 $\{z > 0\}$ で考え、境界 xy 平面上 $U = 0$ とする。時間区間 $(0, T)$ で解 U が存在するとする。

このとき

$$|\zeta(x, t) - \zeta(y, t)| \leq \eta(|x - y|)$$

で $t = T$ でタイプ I ならば、 $t = T$ で爆発しない。

〈爆発するとなると、渦度の方向が非常に乱れている。
この性質は境界条件があってもわからない。〉