

境界における流体の渦の生成について

前川泰則 (神戸大学)

渦の特徴付け

北海道大学 2012. 8. 6 - 8.

1. 粘性流体と非粘性流体

水のような流体は体積変化の無い非圧縮流体と見なせる。
本講演では常に非圧縮流体を考える。

1. 粘性流体と非粘性流体

水のような流体は体積変化の無い**非圧縮流体**と見なせる。
本講演では常に非圧縮流体を考える。

流体自身の運動によってもたらされる変形に対する抵抗の度合いを**粘性**という。

水の場合，粘性は小さいと考えられる。

例えば，20°Cの水の動粘性係数は $1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 。

1. 粘性流体と非粘性流体

水のような流体は体積変化の無い**非圧縮流体**と見なせる。
本講演では常に非圧縮流体を考える。

流体自身の運動によってもたらされる変形に対する抵抗の度合いを**粘性**という。

水の場合，粘性は小さいと考えられる。

例えば，20°Cの水の動粘性係数は $1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 。

理想的に粘性が無いと見なした流体を**非粘性流体**（理想流体）
といい，**オイラー方程式**でその運動は記述される。

2. ダランベールのパラドックス

物体の境界付近の流れにおいては、粘性の効果を無視することはできないことが知られている。

2. ダランベールのパラドックス

物体の境界付近の流れにおいては，粘性の効果を無視することはできないことが知られている．

理想流体は，境界において境界に沿って流れる．
つまり，時刻 t ，位置 x での流体の速度場を

$$\vec{u}(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$$

としたとき，境界上では

$$\vec{u}(x, t) \cdot \vec{n}(x) = 0 .$$

(ここで， $\vec{n}(x)$ は境界上の点 x における単位法線ベクトル)

2. ダランベールのパラドックス

物体の境界付近の流れにおいては，粘性の効果を無視することはできないことが知られている．

理想流体は，境界において境界に沿って流れる．
つまり，時刻 t ，位置 x での流体の速度場を

$$\vec{u}(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$$

としたとき，境界上では

$$\vec{u}(x, t) \cdot \vec{n}(x) = 0 .$$

(ここで， $\vec{n}(x)$ は境界上の点 x における単位法線ベクトル)

しかし，境界の接方向については理想流体は自由に動ける．そのため，例えば2次元渦無し理想流体の中では物体は流体からの力を受けないことになるが，これは経験則に反している．

3. 境界付近の流れと粘性効果

粘性を考慮した流体を粘性流体といい、Navier-Stokes 方程式でその運動は記述される。

3. 境界付近の流れと粘性効果

粘性を考慮した流体を粘性流体といい, **Navier-Stokes** 方程式でその運動は記述される.

粘性流体は, 境界上の点 x で no-slip 境界条件

$$\vec{u}(x, t) = 0$$

を典型的に満たすことが知られている.

3. 境界付近の流れと粘性効果

粘性を考慮した流体を粘性流体といい、Navier-Stokes 方程式でその運動は記述される。

粘性流体は、境界上の点 x で no-slip 境界条件

$$\vec{u}(x, t) = 0$$

を典型的に満たすことが知られている。

つまり、境界付近では流体粒子が境界に粘着しようとするので、摩擦が働くことになり、物体が力を受ける。

4. 渦度場

速度場 $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ に対して,

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} u_3 - \partial_{x_3} u_2 \\ \partial_{x_3} u_1 - \partial_{x_1} u_3 \\ \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1 \end{pmatrix}$$

を渦度場という。

4. 渦度場

速度場 $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ に対して,

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} u_3 - \partial_{x_3} u_2 \\ \partial_{x_3} u_1 - \partial_{x_1} u_3 \\ \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1 \end{pmatrix}$$

を渦度場という。2次元平面における流れに対しては,

$$\omega = \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1$$

と定義され, 渦度場はスカラー場である。

5. 境界における渦度場

- 理想流体の場合

Lagrangeの渦定理： 渦は流れに沿って生成も消滅もしない。

5. 境界における渦度場

- 理想流体の場合

Lagrangeの渦定理： 渦は流れに沿って生成も消滅もしない。

理想流体に対しては，境界上の流体粒子は境界上にとどまる．
よって，Lagrangeの渦定理より，以下が成り立つ．

5. 境界における渦度場

- 理想流体の場合

Lagrangeの渦定理： 渦は流れに沿って生成も消滅もしない。

理想流体に対しては，境界上の流体粒子は境界上にとどまる．
よって，Lagrangeの渦定理より，以下が成り立つ．

定理： 初期時刻において境界上での渦度場が $\vec{0}$ とする．このとき，**任意の時刻において境界上での渦度場は $\vec{0}$** である．

つまり，理想流体では境界上での本質的な渦の生成は起こらない．

5. 境界における渦度場

- 粘性流体の場合

境界上ではno-slip境界条件

$$\vec{u}(x, t) = 0$$

が成り立っているとする。このとき、一般には境界上で渦が生成される。

5. 境界における渦度場

- 粘性流体の場合

境界上ではno-slip境界条件

$$\vec{u}(x, t) = 0$$

が成り立っているとする．このとき，一般には境界上で渦が生成される．

特に，初期時刻 $t = 0$ に境界付近で渦度場が恒等的に $\vec{0}$ であったとしても，一般には瞬時に境界上で渦度場が生成される．

5. 境界における渦度場

- 粘性流体の場合

境界上ではno-slip境界条件

$$\vec{u}(x, t) = 0$$

が成り立っているとする．このとき，一般には境界上で渦が生成される．

特に，初期時刻 $t = 0$ に境界付近で渦度場が恒等的に $\vec{0}$ であったとしても，一般には瞬時に境界上で渦度場が生成される．

この境界上での渦の生成は粘性係数が小さいほど強い．

6. 境界での渦の生成

しかし、境界上で渦度場がどのように生成されるのかについては未だわかっていないことが多い。

6. 境界での渦の生成

しかし、境界上で渦度場がどのように生成されるのかについては未だわかっていないことが多い。

主な理由：渦度場の満たす境界条件は複雑（非線形かつ非局所的）で解析が難しい。

6. 境界での渦の生成

しかし，境界上で渦度場がどのように生成されるのかについては未だわかっていないことが多い．

主な理由：渦度場の満たす境界条件は複雑（非線形かつ非局所的）で解析が難しい．

2次元流体の場合，渦度場の満たす方程式から，少なくとも

< 渦のエネルギーの時間変化 >

= - < 粘性による領域全体での渦の線形消散 >

+ < 渦の境界上での線形的な生成エネルギー >

+ < 渦の境界上での非線形相互作用 >

という等式が成り立つことがわかる．

6. 境界での渦の生成と渦度場のダイナミクス

前述の等式のうち，特に渦の境界上での非線形相互作用については，**粘性が小さい場合**，解析するのが非常に難しい．

6. 境界での渦の生成と渦度場のダイナミクス

前述の等式のうち，特に渦の境界上での非線形相互作用については，**粘性が小さい場合**，解析するのが非常に難しい．

数値計算による研究などでは，

初期時刻に境界から離れた場所に局所渦を配置し，Navier-Stokes 方程式を数値的に解くことで，

境界上で生成される渦と元々境界から離れた場所にあった渦の相互作用が調べられている．

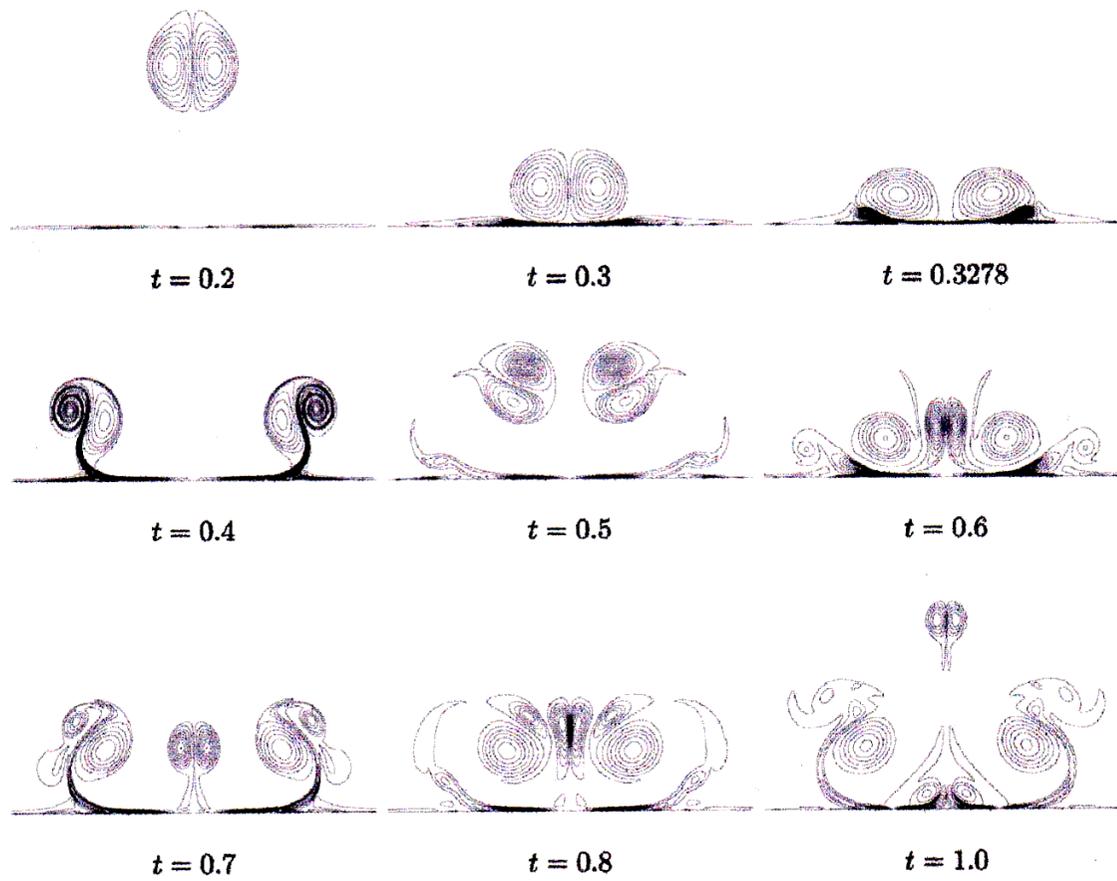


FIG. 2. Sequence of vorticity contour plots showing the flow evolution of a dipole colliding with a no-slip wall for integral-scale Reynolds number $Re = 2500$. The contour levels are drawn for $\dots, -100, -60, -20, 20, 60, 100, \dots$

Extract from Nguyen-Farge-Schneider (Phys.Rev.Lett. 2011):
(the horizontal direction is \longrightarrow)

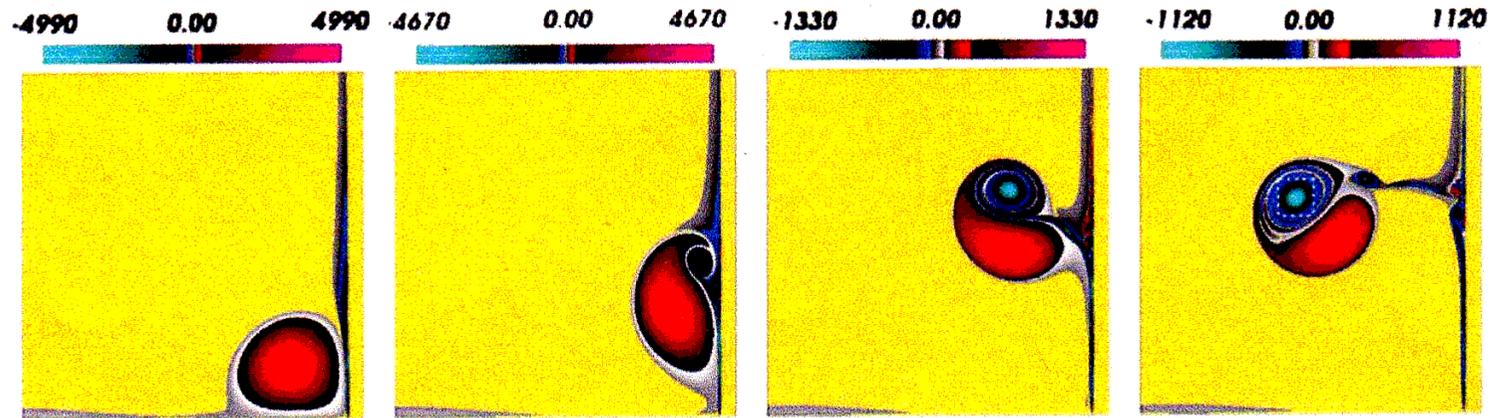


FIG. 1 (color online). Vorticity in the subdomain $[0.708, 0.962] \times [0.5, 0.754]$ at $t = 0.36, 0.4, 0.45,$ and 0.495 (left to right) for $Re = 7880$. The white dotted box at $t = 0.495$ frames region B (see text). Black pixels correspond to $\omega = \pm 300$ in all pictures.

7. 初期渦度場が適当な2極渦の時の大まかなダイナミクス

Step 1. 局所渦が境界に近づいていく．一方で，瞬時に強い渦度場が境界上生成され，渦層を形成する．

7. 初期渦度場が適当な2極渦の時の大まかなダイナミクス

Step 1. 局所渦が境界に近づいていく．一方で，瞬時に強い渦度場が境界上生成され，渦層を形成する．

Step 2. 局所渦が境界にぶつかり，渦層の巻き上げが起こる．

7. 初期渦度場が適当な2極渦の時の大まかなダイナミクス

Step 1. 局所渦が境界に近づいていく．一方で，瞬時に強い渦度場が境界上生成され，渦層を形成する．

Step 2. 局所渦が境界にぶつかり，渦層の巻き上げが起こる．

Step 3. 局所渦と境界上で生成された渦が相互作用し，第二の2極渦を形成する．

7. 初期渦度場が適当な2極渦の時の大まかなダイナミクス

Step 1. 局所渦が境界に近づいていく。一方で、瞬時に強い渦度場が境界上生成され、渦層を形成する。

Step 2. 局所渦が境界にぶつかり、渦層の巻き上げが起こる。

Step 3. 局所渦と境界上で生成された渦が相互作用し、第二の2極渦を形成する。

Step 4. 第二の2極渦が境界から離れる(リバウンド現象)。

7. 初期渦度場が適当な2極渦の時の大まかなダイナミクス

今のところ，数学的に解析出来ていることは Step 1 のみ．

実際，Step 1 については Prandtl の漸近展開を数学的に証明できる．

7. 初期渦度場が適当な2極渦の時の大まかなダイナミクス

今のところ，数学的に解析出来ていることは Step 1 のみ．

実際，Step 1 については Prandtl の漸近展開を数学的に証明できる．つまり，流れを

- 境界から離れた領域では理想流体
- 境界付近では渦層

の二つに分解して近似することができる．

7. 初期渦度場が適当な2極渦の時の大まかなダイナミクス

- 理想流体の場合の局所渦のダイナミクス

局所渦は境界に近づいたあと，境界に沿って動く．

7. 初期渦度場が適当な2極渦の時の大まかなダイナミクス

- 理想流体の場合の局所渦のダイナミクス

局所渦は境界に近づいたあと，境界に沿って動く．

境界付近での渦層の形成は起こらない（Lagrangeの渦定理）．

7. 初期渦度場が適当な2極渦の時の大まかなダイナミクス

- 理想流体の場合の局所渦のダイナミクス

局所渦は境界に近づいたあと，境界に沿って動く．

境界付近での渦層の形成は起こらない（Lagrangeの渦定理）．

また，局所渦のリバウンド現象も生じない．

8. 今後の課題

1. Prandtlの漸近展開が期待できない場合の数学解析

- ・ 特殊な初期値に対する考察
- ・ 普遍的に成り立つ評価
- ・ 境界上で生成された渦が流れに本質的な影響を及ぼす場合にも渦の局所性は保たれるか (渦度の極めて強い領域は境界付近に限られるか) .

2. カルマン渦の数学解析