第１１回

偏微分方程式論札幌シンポジウム

予　稿　集

１９８６．８．１９～８．２２

第11回偏微分方程式論
札幌シンポジウム

下記の要領でシンポジウムを行ないますので、ご案内申しあげます。

代表者　上　見　練太郎

記

1.　日　時　　1986年8月19日（火）　～　8月22日（金）

2.　場　所　　北海道大学理学部数学教室　4－508室

3.　講　演

3月19日（火）

9：30　～　10：30　　神　部　　勉（東大理）

渦運動における音波の発生

11：00　～　12：00　　儀　我　美　一（北大理）

渦と粘性

13：30　～　14：45　　＊

15：00　～　16：00　　松　村　昭　孝（京大工）

一次元粘性流体の漸近挙動について

8月20日（水）

9：30　～　10：30　　谷　内　俊　弥（名大理）

Ideal　M H D

11：00　～　12：00　　岩　崎　敷　久（京大数理研）

Effectively hyperbolic equations の応用について

13：30　～　14：45　　＊

Ideal MHDの方程式における適合問題

15：00　～　15：30　　卯　沢　　卓（北大理）

未　　定

15：45　～　16：15　　渋　谷　昌　之（都立大理）

Yang-Mills gradient flows について

8月21日（木）

9：30 ～ 10：30　　堤　誉志雄（広島大総科）

Scattering problem for the nonlinear Schrodinger equations

11：00 ～ 12：00　　桜井　力（埼玉大理）

Schrodinger 方程式の grazing ray について

13：30 ～ 14：45　　＊

15：00 ～ 15：30　　坂口　茂（都立大理）

ある準線型楕円型デリクレ問題の解の凸性について

15：45 ～ 16：15　　内藤久資（名大理）

調和写像と Eells - Sampson の放物型方程式の大域解の存在について

8月22日（金）

9：30 ～ 10：30　　井川　満（阪大理）

波動方程式に対するいくつかの凸な物体の外部問題について

11：00 ～ 12：00　　森本芳則（名大工）

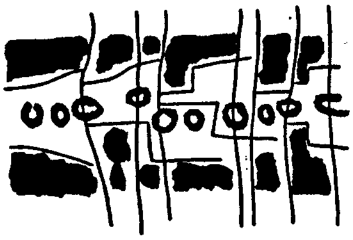
Criteria for hypoellipticity

＊この時間は講演者を囲んでの自由な質問の時間とする予定です。

連絡先　北海道大学理学部数学教室

TEL　011－716－2111

内線　2679（河合）



解 説

渦運動と音

神 部 勉

音波の放射のためには固体の存在が必ずしも不可欠ではなく，流れ場自体も音を発生する．渦度の分布は非圧縮性の速度場をつくるが，その渦運動がどのように音波を放射するのであろうか．それが主題である．また検出された音の波形も示す．

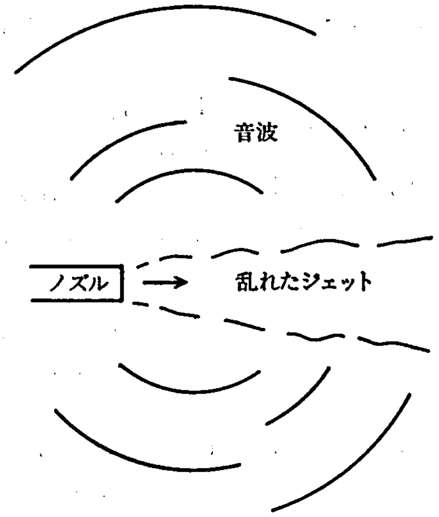
1. はじめに

渦運動というのは流体運動の一つの基本要素と言ってもよいかと思う．渦というときに思い浮かぶのは，コーヒーカップの中のクリームの渦，洗面台の栓を抜いたとき生ずる排水時の渦，鳴門の渦などがあろう．これらも渦運動には違いないが，ここで音の発生と関連させて考察する渦運動というのは，渦度場のダイナミクスという意味に解釈していただきたい．渦度(vorticity)はいうまでもなく速度場の rot として定義される量である．各点で渦度ベクトルに接する曲線は渦線といわれる．実験的に容易につくることができて，しかも対称性のよい渦線の代表例は渦輪(vortex ring)であろう．これは渦線が円形をしており，器用な人がよく煙草の煙で作る輪もその一種である．ここで問題とするのは，渦のどのような運動が，どのような機構で音の放射に関係するかということ，また渦輪の速さと音の強さとの関係等，どのような法則性があるかということである．

流れの一つの状態として乱流がある．乱流の中では渦度は複雑なダイナミクスに従って変動している．そのような場からの音の放射も考えることができよう．特に乱流ジェットについては，それが発生する音はジェット騒音として知られている(第1図)．歴史的にはその問題が発端となって，この方面の研究が発展してきた．[1]

渦と物体の相互作用によっても音波が励起される．例えば，風の中の電線の出す音はその例である(第8図)．また楽器の尺八やフルートでは，固いエッジに口から息を吹きつけて音を出す．その

東京大学理学部物理学教室
113 東京都文京区本郷 7-3-1



第 1 図

音源機構にも渦・エッジの相互作用があると考えられている．[2] ただし，楽器の場合は共鳴機構も備えているから，音源そのものは必ずしも強い必要はない．

いろいろと例を挙げてみたが，本解説では流体力学的な基本機構に注目し，流れの場から縦波(音波)が励起されるメカニズムに焦点をあてて考察してみたい．[3,4]

2. 流れの場

流体の各点 $x=(x_i)$，各時刻 t で速度成分が $v_i(x, t)$ と表わされるとする．流体の中の一点とその近傍に注目するとき，その微小なかたまりの空間的および時間的な局所運動は(並進運動)＋(剛体回転)＋(純粋変形) の各成分に分解できる．第二項の剛体回転の角速度は渦度 $\boldsymbol{\omega}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ の1/2に等しい．また第三成分の速度はあるスカラー関数の gradとして表すことができる．もっと一般的な性

質をいえば，よく知られているように，ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ は，ソレノイダルな場 $\boldsymbol{v}_S$ ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_S=0$) と渦なしの場 $\boldsymbol{v}_P$ ($\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}_P=0$) とに分解できる: $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_S+\boldsymbol{v}_P$ ($\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}_S\fallingdotseq 0$, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_P\fallingdotseq 0$). 別の言い方をすると，成分 $\boldsymbol{v}_S$ は一般に渦度 $\boldsymbol{\omega}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}_S$ を有する非圧縮性の場を表わすのに対し，成分 $\boldsymbol{v}_P$ の方は圧縮性のポテンシャル場を表わしている．

渦度 $\boldsymbol{\omega}$ を電磁気学での電流ベクトル $\boldsymbol{j}$ に対応させると，$\boldsymbol{\omega}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ の関係から，$\boldsymbol{v}$ は磁場 $\boldsymbol{H}$ に対応している．そこでベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を導入すると，ビオ・サバールの関係によって，速度 $\boldsymbol{v}$ が

$$\boldsymbol{v}(x,t)=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{\omega}(y,t)}{|x-y|}\mathrm{d}^3y \qquad (1)$$

と表わせて，これは $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0$ の性質を有する．いま問題を簡単にするために，$\boldsymbol{\omega}$ の分布は空間のある限られた領域Dにのみあるものと仮定する．以下においてしばしば，Dから十分離れた点での場を知ることが必要となる．いま $x=|x|$ が $y=|y|$ に比べて十分に大きいとして，

$$\frac{1}{|x-y|}=\frac{1}{x}-y_i\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{x}+\frac{1}{2}y_iy_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{x}+\cdots \qquad (2)$$

と展開する．(ここで和記号の省略規則に従い，同じ添字 i が二度あらわれるときは，$i=1,2,3$ について和をとるものとする.) 領域Dの外では速度は渦なしなので，$\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}\,\Phi$ の形に表わすと，
ﾏｲﾅｽ?
速度ポテンシャル Φ は

$$\Phi(x)=\frac{1}{4\pi}P_i\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{x}-Q_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{x}+O(x^{-4}) \quad (3)$$

と表わすことができる．ここで

$$P_i=\frac{1}{2}\int(y\times\omega)_i\mathrm{d}^3y\ ,\quad Q_{ij}=\frac{1}{12\pi}\int y_i(y\times\omega)_j\mathrm{d}^3y\ , \qquad (4)$$

と定義される．展開の初項として $1/x$ に比例する項もあるはずであるが，いまの場合その係数 $\int\omega_i\mathrm{d}^3y$ の値は0となる．この展開形より，渦領域Dから十分離れた点では，速度 $v_i=\partial\Phi/\partial x_i$ は $O(x^{-3})$ となることがわかる．

以下の目的は，このような非圧縮性の速度場から圧縮性の場が励起される現象を明らかにすることである．このとき重要な役割を演じるのは，場の非線形効果と音速の有限性とである．

3. 渦運動とまわりの波動領域

粘性なしの流体の運動を考えよう．その方程式は

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\rho v_i=0 \qquad (質量保存) \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\rho v_iv_j=-\frac{\partial p}{\partial x_i} \qquad (運動量保存) \quad (6)$$

$$\mathrm{d}p=c^2\mathrm{d}\rho \qquad (断熱関係式) \quad (7)$$

で与えられる．ここで ρ は密度，p は圧力，$c=\sqrt{(\partial p/\partial\rho)_s}$ は音速を表わす．非粘性流体の運動ではエントロピー s は保存され，状態方程式として式(7)を使うことにする．式(5)に $\partial/\partial t$, (6)に $\partial/\partial x_i$ を作用させ，$\partial^2\rho v_i/\partial t\partial x_i$ を消去し，さらに(7)を使って ρ を消去すると，

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}p-\nabla^2p=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(\rho v_iv_j) \qquad (8)$$

を得る．この式でもし右辺が0なら，音波の単純な伝播を表わす式であるが，右辺の ρv_iv_j を含む項があるため，伝播のみならず音の発生をも表わしている．すなわち，音源が ρv_iv_j という非線形項に由来することを示している．このような項から生ずる音を Lighthill[1] は aerodynamic sound (空力音) と呼び，流れから発生する音の場が，十分遠方では強さ ρv_iv_j の四重極音源の放射と同等であることを指摘した．ここでは少し別の角度から渦運動による音の発生の問題を考察してみたい．

前節で仮定したように，空間的に局在した渦度場があり，それによって流れの場が誘起されているとする．このとき遠くの速度は $O(x^{-3})$ で減衰する．この渦度場の空間スケールが l，速度の大きさが u で代表されるとしよう．流れの場が時間的に変動することで，どのような縦波が励起されるであろうか．また渦運動の近くに物体がある場合とない場合とでどのような違いがあるであろうか．

静止状態では流体は一様な密度 ρ_0，圧力 p_0，音速 c をもつものとする．また速さ u は音速 c に比べて十分小さいと仮定する:

$$M=\frac{u}{c}\ll 1\ .$$

方程式(8)の左辺第二項 $O(\Delta p/l^2)$ と右辺 $O(\rho_0u^2/l^2)$ とがバランスすると考えると，圧力変動は $\Delta p\sim\rho_0u^2=\rho_0c^2M^2$ の大きさで，式(7)より，密度変動は $\Delta\rho$

$\sim\rho_0 M^2$, 従って $\Delta\rho/\rho_0 \sim M^2 \ll 1$ で, 密度変動は十分小さいことがわかる. そこで式(8)の右辺で $\rho=\rho_0$ (定数) とおき, c も定数として扱う.

他方, 時間変動のスケールは $\tau=l/u$ の程度であるとすると, この変動場のつくる音の波長は $\lambda=c\tau=l/M$ の程度となろう. 従って λ は渦度場のスケール l よりもずっと大きい. いま式 (8) の左辺二項の比をとると

$$O\left(\frac{1}{c^2}p_{tt}\right)\Big/O(\nabla^2 p)=l^2/c^2\tau^2=l^2/\lambda^2=M^2\ll 1\,,$$

従って第一項の寄与は非常に小さいことになり, それを省略すると, 式(8)は

$$-\nabla^2 p=\rho_0\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}v_i v_j \qquad (9)$$

と書ける. これは $c=\infty$ としたことと同じである. 実はこの式は非圧縮場の方程式を表している. というのは, $\rho=\rho_0$ とすると, 式(5)は $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0$ となり, さらに式(6)の div をとれば, やはり(9)が得られるからである.

次にもっと大きなスケール, すなわち λ の数倍のスケールでの現象を考えてみよう. 長さを λ で規格化すると, 左辺二項の比は

$$O\left(\frac{1}{c^2}p_{tt}\right)\Big/O(\nabla^2 p)=\frac{\lambda^2}{c^2\tau^2}=1$$

となり, 同程度の大きさとなる. これに対し, 右辺の方は $x\to\infty$ で $v_i=O(x^{-3})$ となることから, 相対的に $O(M^3)$ の項を省略する近似で, 式(8)は

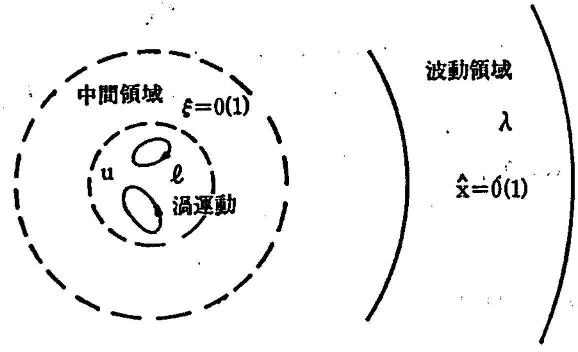
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\nabla^2 p=0 \qquad (10)$$

となる. 十分遠方では, 波動の伝播領域があることを示唆している. 当然のことながら, 大きなスケールでは, 音速の有限性を考慮しなければならない.

式(8)に戻り, 速度場 $\boldsymbol{v}(x)$ が非圧縮であるとして音源項の意味を考えてみよう. $\boldsymbol{v}$ をフーリエ表示すると, $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$ は, 波数 $\boldsymbol{q}$ の成分 $\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{q})$ に対し $\boldsymbol{q}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{q})=0$ を意味する. 一方音源項 $\rho_0\partial^2(v_i v_j)/\partial x_i x_j$ の波数 $\boldsymbol{k}$ の成分は

$$-\rho_0\int(\boldsymbol{k}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{q}))\,(\boldsymbol{k}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}))\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{q}$$

と書ける. スペクトル $\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{q}), \hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})$ から $\boldsymbol{k}$ 方向の成分をとり, それらの積を積分する. それが圧力スペクトル $\hat{p}(\boldsymbol{k})$ を強制的に励起することを述べている. 非圧縮場といえどもこれらの因子はゼロとならない.



第2図 二つのスケール l, λ と流れ場の構造.

我々の問題では時間変動は一つのスケール l/u を仮定しているが, 長さについては二つの異なるスケール l と λ が存在する. l でスケールされる局所的な渦運動の場を内部領域, λ でスケールされる波動の場を外部領域と呼ぶことにする (第2図). それぞれの領域での解を求め, 両者を接続して, 渦運動による音の放射の解を導いてみよう.

4. 流れ場の圧力と波動場の圧力

(a) 内部領域

内部領域を支配するのは次のオイラー方程式である:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0,\ \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho_0}\mathrm{grad}\,p\,. \qquad (11)$$

M→0
Mach→0

ここで, $\boldsymbol{L}=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ と書き, ベクトル恒等式を使うと

$$\boldsymbol{L}=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}+\mathrm{grad}\,\frac{v^2}{2} \qquad (12)$$

と書ける. そこでオイラーの式(11)の rot をとると

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\omega}+\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})=0\,. \qquad (13)$$

これは $\boldsymbol{\omega}$ の運動を支配する方程式である.

他方, 圧力 p は方程式(9)から決定されるが, $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$ を使うと, $-\nabla^2 p=\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{L}$ と書くことができる. この式を p に関するポアソン方程式とみて, グリーン関数 $G(x,y)$ を導入すると ($\nabla^2 G=-\delta(x-y)$), $p=\int G\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{L}\,\mathrm{d}y$ の形に書ける. そこで一度部分積分すると

$$p_1(x,t)=-\rho_0\int\boldsymbol{L}(y,t)\cdot\nabla_y G(x,y)\,\mathrm{d}^3y \qquad (14)$$

を得る．ただし，$p_1 = p - p_0$ は内部領域の圧力変動分を表わしている，また ∇_y は y に関する ∇ 演算子である．

(b)　外部領域　(近似法 matched lim)

内部渦運動の圧力の式(14)を得たので，次は外部の音波の圧力の式を求めよう．この領域は波動方程式(10)で記述される．放射場の一般表現は多重極展開の形で表わせる．すなわち，$a(t)$ を任意の関数とし，$x = |x|$ とするとき，$x^{-1}a(t-x/c)$ が解であるばかりでなく，座標 x_i に関する任意回の導関数も解となる ($t-x/c$ は遅延時間である)．

いま内部領域の無次元変数を

$$x' = x/l\ ,\quad t' = t/\tau$$

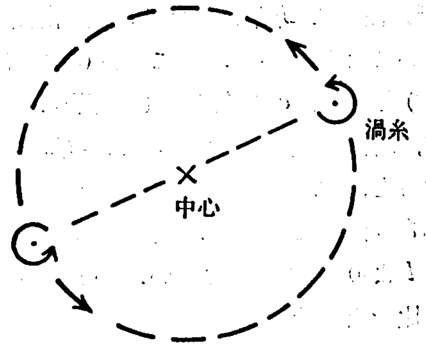
と書くことにする．外部では長さスケールが $\lambda = l/M$ であることを考慮して，外部無次元変数は $\hat{x} = x/\lambda = Mx'$ で定義する．このとき，遅延時間 $(t-x/c)$ の無次元形は $t' - Mx' = t' - \hat{x}$ となる．このようにして，外部領域の音波の圧力は，形式的に M 展開の形で

$$p_0(\hat{x}, t') = M\frac{A_0(t'-\hat{x})}{\hat{x}} + M^2\frac{\partial}{\partial \hat{x}_i}\frac{A_i(t'-\hat{x})}{\hat{x}} + M^3\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_i \partial \hat{x}_j}\frac{A_{ij}(t'-\hat{x})}{\hat{x}} + \cdots \tag{15}$$

と表わせる ($\hat{x}_i = x_i/\lambda$)．ここで，$A_0(t')$, $A_i(t')$, $A_{ij}(t')$, … は変数 t' の未定の関数で，圧力の次元をもつ量である．内部圧力の式から，これらの関数を決定できるなら，渦運動による音の発生が表現できたことになる．

(c)　解の接続

内部領域の圧力 p_1 と外部領域の圧力 p_0 の接続は次のような考えにもとづいて行われる．現実の現象では内部の渦運動から外部の波動状態へは連続的に移行する．圧力の式にもそのような連続性を付与できるためには，まず一方の表現から他方の表現へ移行する中間領域が存在することが必要である．さらに，その遷移領域において，以下の意味において両表現が漸近的に一致するという条件を課すことにする (method of matched asymptotic expansions).[5)] 遷移領域は内部変数 x' でみると，x' が十分大きな値をとる領域であろうし，外部変数 $\hat{x}$ でみると原点に十分近いところであろう．そこで新しい変数 $\xi = M^{\alpha}x'$ (α は $0<\alpha<1$ の



第3図　一対の回転渦糸.

定数)を定義すると，$x' = M^{-\alpha}\xi$, $\hat{x} = M^{1-\alpha}\xi$ であり，$M \to 0$ の極限において，$\xi = O(1)$ の領域では $x' \to \infty$, $\hat{x} \to 0$ となり，これを中間領域と考えることができよう (第2図)．そこで解の接続条件を

$$\lim_{M\to 0} p_1(\xi) = \lim_{M\to 0} p_0(\xi) \quad (\xi = \text{fixed}) \tag{16}$$

と与える．このような方法で，$A_0(t)$, $A_i(t)$, $A_{ij}(t)$, … を決定することにする．この方法が渦音問題で最初に使われたのは，互いに回転する一対の渦糸による音の放射問題であった (第3図).[6)]

5. 自由空間での渦音放射

物体のない無限流体中での渦音の表現を求めよう．自由空間でのグリーン関数 G はよく知られているように

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|}$$

である．これを内部解(14)に代入するとき，$y = O(l)$ であることに注意しよう．いま外部解との接続を考慮すると，$x \gg y$ での表式が必要となる．そこで式(2)の展開をし，∇_y を作用させると，

$$\nabla_y G(x, y) = -\frac{1}{4\pi}\nabla\frac{1}{x} + \nabla_y \times g + O(x^{-4}) \tag{17}$$

の形に書くことができる．ただし

$$g(x, y) = \frac{1}{4\pi x^5}(x\cdot y)(x \times y)$$

である.[11)] というのは $\nabla_y \times g = (3x(x\cdot y) - x^2 y)/4\pi x^5$ の関係があるからである．式(17)を(14)に代入すると，初項からの寄与は消える．第二項に関しては一度部分積分すると，被積分関数は $-\rho_0(\nabla \times L)\cdot g$ の形になるが，式(12)を使うと，$\nabla \times L = \nabla \times (\omega \times v)$ と書けて，さらに式(13)からこれは $-\partial\omega/\partial t$ に等しい．このようにして，若干整理して書くと，

$$p_1(x,t)=\rho_0\dot{Q}_{ij}(t)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{x}+O(x^{-4}) \qquad (18)$$

($\dot{Q}_{ij}=\mathrm{d}Q_{ij}/\mathrm{d}t$) を得る．ここで Q_{ij} は式(4)で定義された量であり，$Q_{ii}=0$ となることを使った．渦度 $\boldsymbol{\omega}$ の分布が知られたとすると，$Q_{ij}(t)$ が定まり，さらに $x\to\infty$ での $p_1(x,t)$ も定まる．この p_1 の漸近形(18)は四重極ポテンシャルの形をしている．

最後の式を中間変数 ξ_i で表わすために，$x_i=(l/M^\alpha)\xi_i$ の関係を代入すると，次の表式を得る:

$$p_1(\boldsymbol{\xi},t')=\rho_0\frac{M^{3\alpha}}{l^3}\dot{Q}_{ij}\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\frac{1}{\xi}+O(M^{4\alpha}). \qquad (19)$$

次に外部の音波の圧力の漸近形を $\hat{x}\to0$ として求めよう．$\hat{x}\ll1$ のときは $A(t-\hat{x})=A(t)-\dot{A}\hat{x}+1/2\ddot{A}\hat{x}^2+\cdots$ と展開できる．さらに $\hat{x}_i=M^{1-\alpha}\xi_i$ によって中間変数で表わすと，式(15)は

$$p_0(\boldsymbol{\xi},t')=M^\alpha A_0\frac{1}{\xi}+M^{2\alpha}A_i\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{1}{\xi}+M^{3\alpha}A_{ij}\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\frac{1}{\xi}+\cdots$$

と書ける．これを式(19)と比べると，$A_0=0$，$A_i=0$，$A_{ij}=(\rho_0/l^3)\dot{Q}_{ij}(t)$ とすべきことが導かれる．このようにして，式(15)より外部解は

$$p_0=\frac{\rho_0M^3}{l^3}\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}_i\partial\hat{x}_j}\frac{Q_{ij}(t'-\hat{x})}{\hat{x}} \qquad (20)$$

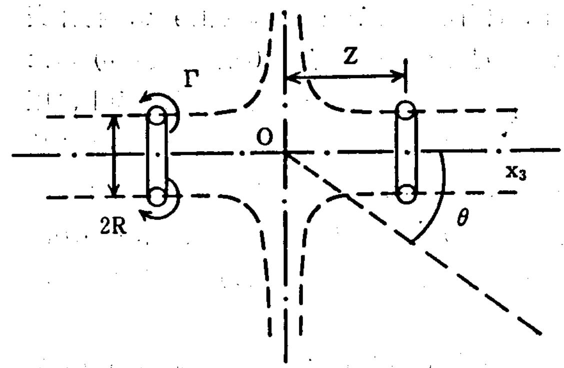
と表わせることがわかった．内部領域で渦度 ω の運動があると，ω の二次モーメント Q_{ij} が変動し，それが音波となって外界に伝わるものと解釈することができる．この波はいま得られた解の形から，四重極放射である．(面白いことに，中間領域での速度場は非圧縮であると同時に渦なしで，場の性質も中間的である．)

実際の音波の観測は十分遠方 ($\hat{x}\to\infty$) で行われることが多い．このときの音圧の式は簡単になって，

$$p_0^\infty=\frac{\rho_0}{c^2}\dddot{Q}_{ij}\left(t-\frac{x}{c}\right)\frac{x_ix_j}{x^3} \quad (\hat{x}\to\infty) \qquad (21)$$

となる．[7] ここで右辺は次元のある量で表わした．右辺の係数は時間に関し3階微分となり，遅延時間 $t-x/c$ での値をとる．$\hat{x}\to\infty$ での式は音の遠方場といわれる．

最終的に得られた式(21)のスケーリング則をみるために，長さを l，速度を u で規格化する．このとき t 及び Q_{ij} が l/u 及び ul^4 で規格化されることを使うと，



第4図 二つの渦輪と衝突軌跡(破線)．

$$p_0^\infty\propto\frac{\rho_0u^4}{c^2}\frac{l}{x}=\rho_0u^2M^2\frac{l}{x}$$

という法則を得る．音の強さ I は p^2/ρ_0c で与えられるから，有名な8乗則 $I\propto u^8$ が得られる．[1]

渦輪の正面衝突

渦運動による四重極放射の典型例として，二つの渦輪の正面衝突による音の放射をみてみよう．これは実験的に検出が試みられた最初の例である．[8] 第4図のように，同じ半径 R，同じ強さ Γ の二つの渦輪が x_3 軸を対称軸とし，$x_3=0$ に関し鏡面対称に配置されて，お互いに近づき衝突をするものとする．対称面からの距離を Z とすると，渦輪は接近するにつれ ($Z\to0$)，半径 R は増大する．このとき

$$2Q_{11}=2Q_{22}=-Q_{33}=-\frac{1}{6}Q(t),\quad Q_{ij}=0\ (i\neq j)$$

となる．Q_{ij} は一つのスカラー関数 $Q(t)=-2\Gamma R^2(t)Z(t)(\Gamma>0)$ だけによって表わされる．これらを(21)に代入すると

$$p_0^\infty=(\rho_0/4c^2)\dddot{Q}(t-x/c)\frac{1}{x}\left(\cos^2\theta-\frac{1}{3}\right)$$

を得る ($\cos\theta=x_3/x$)．$Q(t)$ が波形を与え，($\cos^2\theta-1/3$) が四重極性の方向分布を与える．第5図は実験で観測された音圧波形の透視図を示している．図の中心が衝突中心に対応し，動径座標は時間で，外にいくほど時間は早い(同心円が同時刻)．高さは音の圧力を表わす．このときの初期の渦輪速度 U は 34 m/s，半径 R は 4.7 mm であった．

6. 渦・物体の相互作用による音波

物体の近くで渦運動があるときには，音の放射

場は四重極性から二重極性に変化する．物体表面上で満足されるべき条件 (法線速度=0) のために，物体がたとえ静止していても表面上に圧力変動が発生し，それが縦波となって外界に放射される．表面圧力が変動するということは，物体に働く力$\boldsymbol{F}$が変動することを意味するが，逆にいうと流体の運動量が変動することにもなる．

式(3)の展開の初項の係数 P_i は渦運動のインパルス(あるいは仮想運動量)と呼ばれ，物体の存在しない無限流体の場合には保存される．もし流体に非保存力 $\boldsymbol{f}(x,t)$ が作用するとすると，式(13)の右辺に $\nabla\times\boldsymbol{f}$ を加える必要があり，このとき式(13)を使って $\mathrm{d}P_i/\mathrm{d}t=\int f_i \mathrm{d}^3x$ を示すことができる．

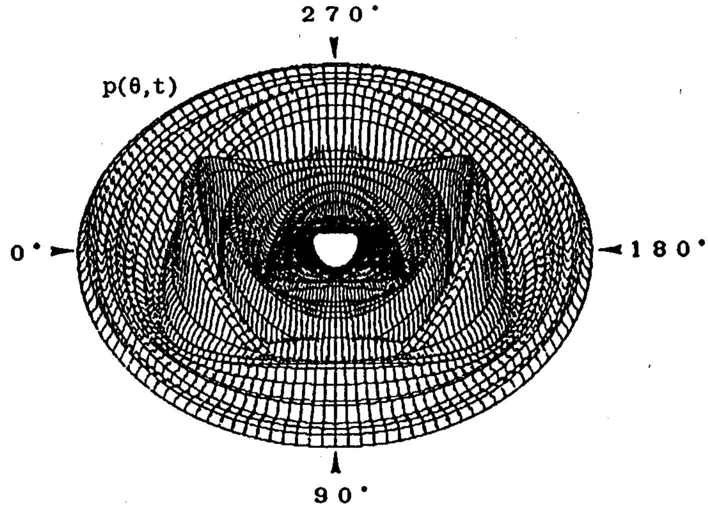
物体が存在する場合，式(3)の係数 P_i は一般に t の関数となり，ポテンシャル Φ の二重極成分が変動し，それが音波の二重極放射になると説明できる．前節の自由空間の場合には，P_iが保存されるので，四重極放射が主となるわけである．

物体が存在する場合にも前節の方法が適用できる．手続きの詳細は省略し，結果だけを示すと，音の遠方場の式は

$$p_0^\infty = -\frac{1}{4\pi c}\dot{F}_i\left(t-\frac{x}{c}\right)\frac{x_i}{x^2}+\cdots \qquad (22)$$

で与えられる.[9] 右辺は次元量で表わされている．$F_i(t)$は流体から物体に作用する正味の力である．この公式によって，音の放射場の測定から，$F_i(t)$を知ることが可能となる．式(22)の場合も四重極成分を含んではいるが，一般に低次の多重極の方が放射効率がよい.[10] 特に物体は二重極成分の波を効率的に励起する．

この問題は別の方法で解くこともできる.[11~13] いま閉曲線Cの形をしたループ状の渦が物体の近くで運動しているとする．解析の結果，二重極音の係数 $F_i(t)$ は $-\rho_0\Gamma\dot{J}_i(t)$ でおき代えることができる．ここで $J_i(t)$ は次のような量である．仮に x_i 軸方向に単位速度をもつ物体のまわりのポテンシャル流(速度ポテンシャルを Φ_i とする，これは定常) を考えたとする．この仮想流は物体表面に接して流れるが，十分離れると一様流となって x_i 方向に速度1をもつ．このとき $J_i(t)$ はループの形をした渦線Cを貫く仮想流 Φ_i の体積流量を表わす．渦が運動すれば，仮想流束 $J_i(t)$ が変化し(Φ_i の速度が一様でないために)，それが音の放射に導く.[12] 電磁気学の Faraday の法則によく似た表現であるが，音波の場合は $M\to 0$ での漸近理論である．



第5図 観測波形の透視図．動径座標の時間 t に対し，測定音圧 $p(\theta,t)$ をプロットした．外ほど t は小．

この場合のスケーリング則は

$$p_0^\infty \propto \frac{\rho_0 u^3}{c}\frac{l}{x}=\rho_0 u^2 M\frac{l}{x}$$

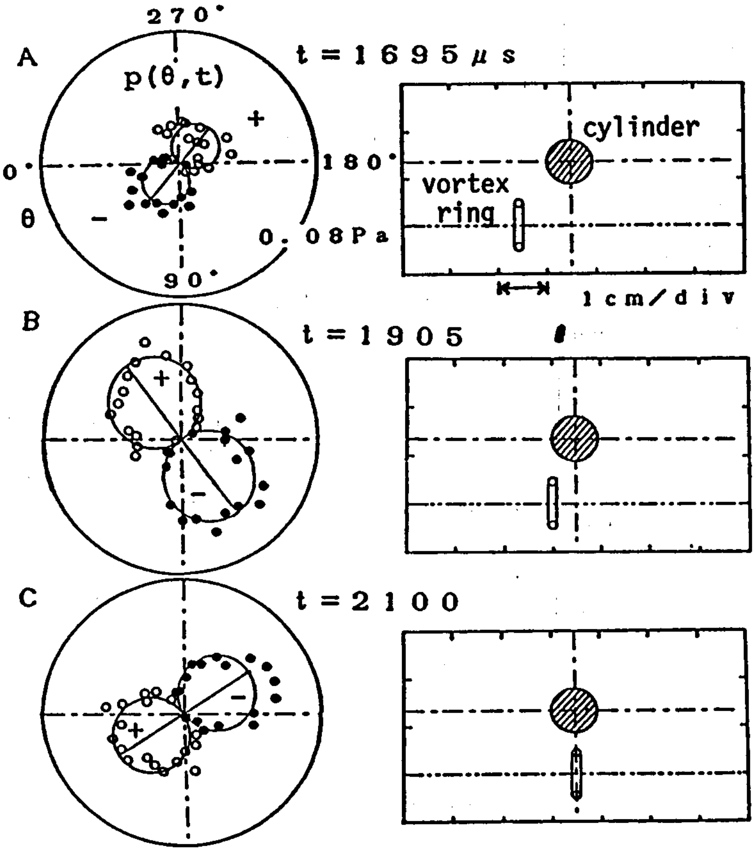
であり，音の強さは $I\propto u^6$ の法則に従う．低速 $(u/c\ll 1)$ では，u^8 則の四重極音より強い放射が期待される．

渦輪と円柱の相互作用[12]

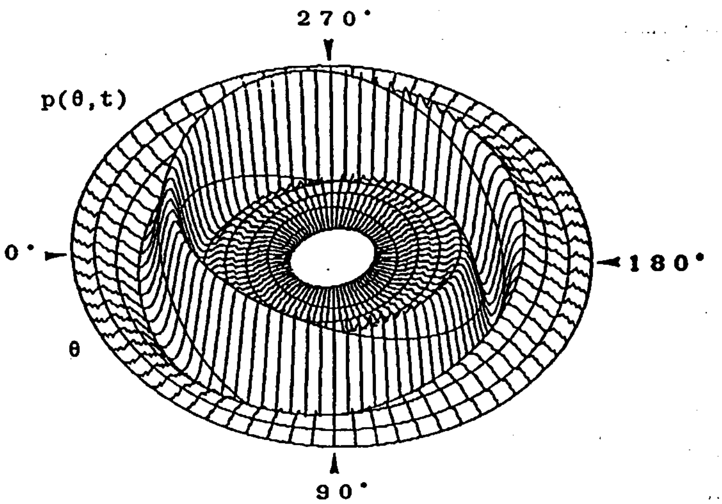
円柱の近傍を通過する渦輪(第6図右)によって発生する音波は二重極放射の性質を有するが，第6図の左図からもわかるように極軸が回転する．これは渦輪対円柱の相対位置に依存して，円柱に働く力のベクトルの方向が回転することによる．左図の動径座標は圧力で(白丸は正，黒丸は負)，外周円は 0.08 Pa の圧力を示す(linear scale)．渦輪の速度 Uは 27 m/s，半径 R は 4.7 mm，円柱の直径は 9 mm である．第7図は第5図と同様の透視図で，二重極軸の回転に対応して，らせん的な波形が見られる．

カルマン渦と音の放射

円柱を一様な流れの中に置くと，第8図のように交互に反対向きの渦の列(カルマンの渦列)が発生する．渦が一つ作られる度に，円柱には反対向

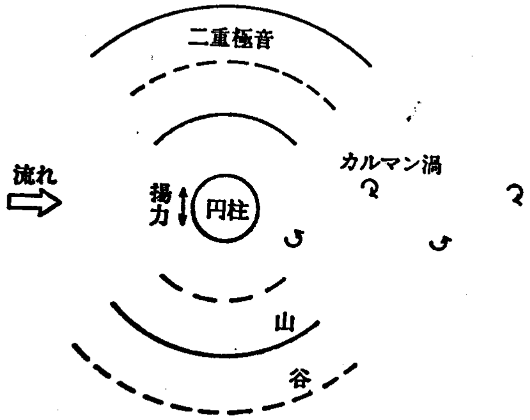


第6図　渦輪と円柱の相互作用(右)とその位置に対応する遠方(x/R =132) での音圧の極表示(左). θ は円柱の垂直断面での角度, 渦輪の $t\to-\infty$ での位置が $\theta=0$. 時間原点は任意固定.

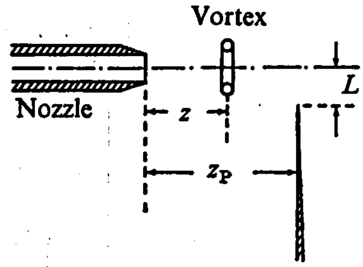


第7図　観測波形. U=27 m/s, R=4.7 mm.

きの循環が生ずる. このことは円柱に作用する揚力が上下に振動することを意味し, 上下方向に極軸をもつ二重極音が放射される. 風の中の電線が出す音の基本的特徴はこの現象によって説明することができる. このような機構で出る音はエオルス音といわれる. エオルスとはラテン語で「風の神」のことである.



第8図　カルマン渦の発生と二重極音の放射.



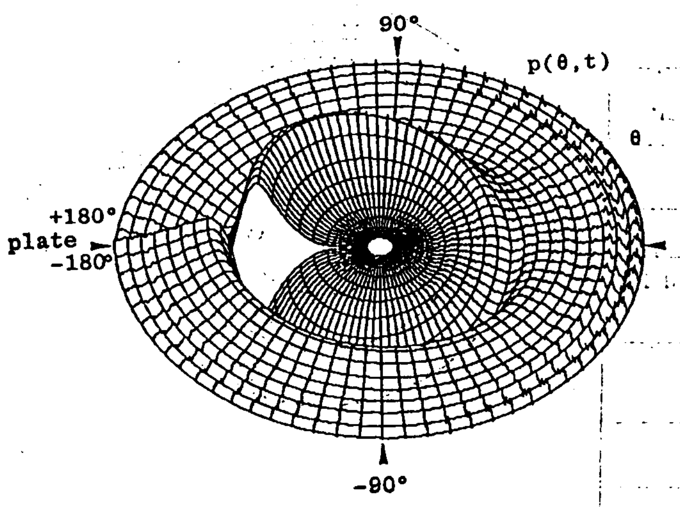
第9図　半無限平板のエッジと渦輪の相互作用. 渦輪は衝撃波をノズルから放出することによって形成される.

7. 渦・エッジの相互作用

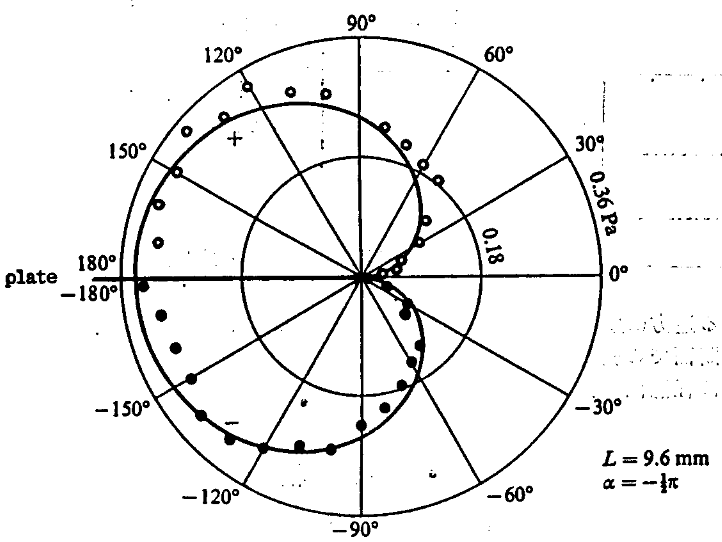
半無限の板のエッジの近傍を通過する渦輪(第9図)の放射音について要点を記そう.[13] 放射の型は多重極のいずれでもなく, 方向分布はカーディオイド形となる(第11図). またスケーリング則は

$$p_0^{\infty}\propto\frac{\rho_0 u^{5/2}}{c^{1/2}}\frac{l}{x}=\rho_0 u^2 M^{1/2}\frac{l}{x}$$

の形となり, 強さについては $I\propto u^5$ となって, エッジがあるとさらに放射音が強くなる傾向を示す(第12図で finite edge plate と semi-infinite plate との相異は板の大きさに起因し, 有限板の場合は反対側のエッジ効果との相殺が起きる). この問題では, 波形をきめる関数因子に分数階の導関数が現れる. 第10図は半径 4.7 mm の渦輪が, 速度 U=30 m/s でエッジから L=9.6 mm の距離のところを通過したとき測定された放射音の圧力の透視図である. ある時刻 (t=1845 μs) での圧力分布は第11図のよ



第10図 観測波形．音圧は板の両側で反対の符号となる．



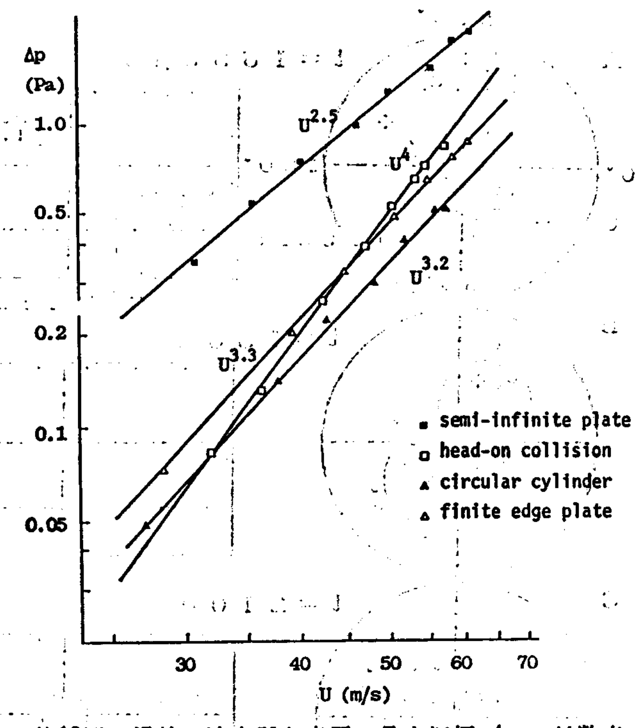
第11図 前図のある瞬間での p のカーディオイド形の方向分布．

うになる．

最後に，第12図はこれまで我々のグループで観測された渦音の圧力振幅 Δp を渦輪速度 U に対して対数プロットしたものである．以上，5, 6, 7 節に示した観測は，理論的にすべて説明できることをつけ加えておきたい．その要点は3～6節に述べた考え方に基づいており，詳細は文献 14 (または文献8, 12, 13) を参照されたい．

8. おわりに

渦の非定常運動によって音波が励起される機構について非粘性の流体力学に基づく考察を行ってみた．渦度によって誘起される速度場は基本的には非圧縮であるが，運動方程式の非線形項のために，圧縮性のポテンシャル場が発生し，その変動



第12図 渦輪の速度 U と音圧の最大振幅 Δp の対数表示．図中に，観測点の直線近似によるベキを示す．

が外界に音速で伝わる．もし渦度分布が空間的に局在し，運動方程式に従って発展しているとすると，その分布の変動に応じて四重極性の音波が放射される．

渦運動の近傍に物体が存在すると，物体が静止していたとしても，相互作用の結果，二重極性の音波が放射される．このように，物体の運動によらず，流体運動だけで生ずる音は空力音と呼ばれ，特に渦が関与していることを強調するときは渦音といわれる．

本稿では渦音の機構について基本的な解説を試みた．読者の皆様の御批判を仰げれば幸いである．図の作製に関して，嚢田登世子(九大工)，幾島康夫(現アルプス電気)の両氏の御協力をいただいたことをここに感謝する次第である．

文　献

1) M.J. Lighthill: Proc. R. Soc. A 211 (1952) 564.
2) M.S. Howe: J. Fluid Mech. 71 (1975) 625.
3) M. E. Goldstein: *Aeroacoustics* (McGraw-Hill, 1976).
4) 神部　勉: 流れと音，流体力学の展望 4 (日本流体力学会，1983).
5) J. D. Cole: *Perturbation Methods in Applied Mathematics* (Blaisdell Publishing, 1968). M.

Van Dyke: *Perturbation Methods in Fluid Mechanics* (Parabolic Press, 1975).
6) F. Obermeier: Acustica **18** (1967) 238.
7) W. Möhring: J. Fluid Mech. **85** (1978) 685.
8) T. Kambe and T. Murakami: *Mechanics of Sound Generation in Flows*, ed. E.-A. Müller (Springer, 1979) p. 123. T. Kambe and T. Minota: Proc. R. Soc. A **386** (1983) 277; J. Sound & Vib. **110** (1986) No. 3 に掲載予定.
9) N. Curle: Proc. R. Soc. A **231** (1955) 505.
10) J. Lighthill: *Waves in Fluids* (Cambridge Univ. Press, 1978).
11) F. Obermeier: J. Sound & Vib. **72** (1980) 39.
12) T. Kambe, T. Minota and Y. Ikushima: in *Proc. IUTAM Symp. Aero and Hydro-Acoustics* (Springer, 1985).
13) T. Kambe, T. Minota and Y. Ikushima: J. Fluid Mech. **155** (1985) 77.
14) T. Kambe: J. Fluid Mech. (1986)—G. I. Taylor Symp. 報告号に掲載予定.

Vorticity and viscosity

Yoshikazu Giga
Department of Mathematics
Hokkaido University
Sapporo 060, JAPAN

This is a resume of my joint work with T. Miyakawa and H. Osada [36].

We consider the Navier-Stokes system

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = 0, \qquad \nabla\cdot u = 0 \tag{1}$$

on the whole plane R^2, where u and p represents unknown velocity and pressure, respectively and $\nu > 0$ is the kinematic viscosity. Since the space dimension is two, the vorticity $v = \nabla \times u = \partial u^2/\partial x_1 - \partial u^1/\partial x_2$ is scalar. Moreover, v solves

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + (u\cdot\nabla)v = 0 \tag{2a}$$

$$u(x,t) = \iint_{R^2} \nabla^{\perp}E(x-y)v(x,t)dx \tag{2b}$$

where $\nabla^{\perp} = (-\partial/\partial x_2, \ \partial/\partial x_1)$ and $E(x) = (2\pi)^{-1}\log |x|$. These equations are formally obtained by taking $\nabla\times$ of (1) and using the condition $\nabla\cdot u = 0$. As is well known the vorticity equation (2a)(2b) is formally equivalent to the Navier-Stokes system provided that u is assumed to decay to zero at space infinity.

We consider the initial value preblem for (1) or (2a)(2b) assuming only that initial vorticity $v(x,0)$ is a finite Radon measure. A typical example is N-point sources of votex, i.e.,

$$(3) \qquad v(x,0) = \textstyle\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\delta(x-z_j).$$

Here z_j is a point on which j-th point source is located and α_j is a real number describing the strength of the source; δ is a Dirac measure supported at zero. One naive question is whether such point sources of vortex are smoothed out because of viscosity. In other words do solutions for (1) or (2a),(2b) exist globally-in-time and smooth for $t > 0$ even if $v(x,0)$ is a finite measure? When initial vorticity consists only one point source carried at zero (i.e. $N = 1$, $z_1 = 0$), we know an exact solution of (2a),(2b)

$$v(x,t) = \frac{\alpha_1}{4\pi\nu t}\exp\left(\frac{-|x|^2}{4\nu t}\right)$$

which is a constant multiple of the fundamental solution of the heat equation. For a general initial data we claim that a smooth solution exists globally in time. As anticipated, the viscosity smoothes singular vorticities.

Theorem ([36]). *Suppose that* $v(x,0)$ *is a finite Radon measure on* R^2. *Then there is a global solution* $v(x,t)$, $u(x,t)$ *to* (2a),(2b) *or* (1) *such that* v *and* u *are smooth for* $t > 0$ *and* $v(x,t)$ *converges to* $v(x,0)$ *under the weak topology of measures as* t *tends to zero*.

In [3] Benfatto, Esposito and Pulvirenti prove similar results under more stringent assumptions. They assume $v(x,0)$ is expressed by (3) and $|\alpha_j|$ is small compared with ν. Our results need no assumptions on particular forms or smallness of initial vorticity.

The main mathematical difficulty is that the initial energy on D

$$\iint_D |u(x,0)|^2 \, dx$$

is not necessarily finite even if D is a bounded domain. If the initial energy is finite, it is classical that there is a global classical solutions to (1) (cf. [16,17,30]).

To construct such a solution we approximate initial vorticity by smooth functions and solve (2a),(2b) with approximate initial data. It is not difficult to construct a global solution for smooth data. We expect that solutions with approximate initial data converge to a true solution for the original problem. To carry out this process we need a priori estimates.

Lemma ([36]). *Suppose that* $v(x,0)$ *is smooth and*

$\iint_{R^2}|v(x,0)|dx \leq m$. Let $\Gamma_u(x,t;y,s)$ is a fundamental solution to (2a), regarding u is a known function. Then,

$$c(t-s)^{-1}\exp\left(\frac{-|x-y|^2}{c(t-s)}\right) \leq \Gamma_u(x,t;y,s) \leq C(t-s)^{-1}\exp\left(\frac{-|x-y|^2}{C(t-s)}\right)$$

with c and $C > 0$ depending only on m.

Estimates of fundamental solutions independent of the regularity of coefficients are obtained by Aronson [1] for linear parabolic equations of divergence form (see also [2]). Osada [25] extends the estimate for non-divengence form which includes (2a) as a typical example. The above a priori estimates enable us to carry out our original idea.

For uniqueness of the solution we do not know much. We show the uniqueness when $v(x,0)$ is small. In particular, if $v(x,0)$ is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure, we can assert the uniqueness.

Our references include those of the paper [36] for the reader's convenience.

References

1. Aronson, D.G., Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation. Bull. Amer. Math. Soc. 73, 890-896 (1968).

2. Aronson, D.G., & J. Serrin, Local behavior of solutions of quasilinear parabolic equations. Arch. Rational Mech. Anal. 25. 81-122 (1967).

3. Benfatto, G., Esposito, R., & M. Pulvirenti, Planar Navier-Stokes flow for singular initial data. Nonlinear Anal. 9, 533-545 (1985).

4. Bergh, J., & J. Löfström, Interpolation Spaces, An Introduction. Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag 1976.

5. Brezis, H., & A. Friedman, Nonlinear parabolic equations involving measures as initial data. J. Math. Pures et appl. 62, 73-97 (1983).

6. Dobrushin, R.L., Prescribing a system of random variables by conditional distributions. Theory Prob. Appl. 15, 458-486 (1970).

7. Fabes, E.B., Jones, B.F., & N.M. Riviere, The initial value problem for the Navier-Stokes equations with data in L^p. Arch. Rational Mech. Anal. 45, 222-240 (1972).

8. Friedman, A., Partial Differential Equations of Parabolic Type. New Jersey : Prentice-Hall 1964.

9. Friedman, A., Partial Differential Equations. New York : Holt, Rinehart & Winston 1969.

10. Fujita, H., & T. Kato, On the Navier-Stokes initial value problem I. Arch. Rational Mech. Anal. 16, 269-315 (1964).

11. Giga, Y., & T. Miyakawa, Solutions in L_r of the Navier-Stokes initial value problem. Arch. Rational Mech. Anal. 89, 267-281 (1985).

12. Giga, Y., Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system. J. Differential Equations 62, 186-212 (1986).

13. Gilbarg, D., & N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd ed. Berlin Heidelberg New York :Springer-Verlag 1983.

14. Kato, T., Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation in R^m,with applications to weak solutions. Math.Z. 187, 471-480 (1984).

15. Kato, T., Remarks on the Euler and Navier-Stokes equations in R^2.Nonlinear Functional Analysis and its Applications, F. E. Browder ed., Proc. of Symposia in Pure Math. 45, part 2, 1-8. Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1986.

16. Ladyzhenskaya, O.A., The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow. New York : Gordon & Breach 1969.

17. Leray, J., Etude de diverses équations intégrales non linéaires etde quelques probléms que pose l'hydrodynamique. J. Math. pures et appl., Serie 9, 12, 1-82 (1933).

18. Liu, T.-P., & M. Pierre, Source-solutions and asymptotic behavior in conservation laws. J. Differential Equations 51, 419-441 (1984).

19. Marchioro, C., & M. Pulvirenti, Hydrodynamics in two dimensions and vortex theory. Commun. Math. Phys. 84, 483-503 (1982).

20. Marchioro, C., & M. Pulvirenti, Euler evolution for singular initial data and vortex theory. Commun. Math. Phys. 91, 563-572 (1983).

21. McGrath, F.J., Nonstationary planar flow of viscous and ideal fluids. Arch. Rational Mech. Anal. 27, 329-348 (1968).

22. McKean Jr., H.P., Propagation of chaos for a class of nonlinear parabolic equations. Lecture series in diff. eq., Session 7 : Catholic Univ. 1967.

23. Niwa, Y., Semilinear heat equations with measures as initial data. preprint.

24. Osada, H., & S. Kotani, Propagation of chaos for the Burgers equation. J. Math. Soc. Japan 37, 275-294 (1985).

25. Osada, H., Diffusion processes with generators of generalized divergence form. J. Math. Kyoto Univ. to appear.

26. Osada, H., Propagation of chaos for the two dimensional Navier-Stokes equations. preprint ; Announcement : Proc. Japan Acad. 62,8-11 (1986).

27. Ponce, G., On two dimensional incompressible fluids. Commun.Partial Differ. Equations 11, 483-511 (1986).

28. Reed, M., & B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics Vol. I, II ; New York : Academic Press 1972, 1975.

29. Sznitman, A.S., Propagation of chaos result for the Burgers equation. Probab. Th. Rel. Fields 71, 581-613 (1986).

30. Temam, R., Navier-Stokes Equations. Amsterdam : North-Holland 1977.

31. Turkington, B., On the evolution of a concentrated vortex in an ideal fluid. preprint.

32. Wahl, W. von, The Equations of Navier-Stokes and Abstract Parabolic Equations. Braunschweig : Vieweg Verlag 1985.

33. Weissler, F.B., The Navier-Stokes initial value problem in L^p. Arch. Rational Mech. Anal. 74, 219-230 (1980).

34. Kato, T., & G. Ponce, Well-posedness of the Euler and Navier-Stokes equations in the Lebesgue spaces $L^p_s(R^2)$. preprint.

35. Baras, P., & M. Pierre, Problems paraboliques semi-linéaires avec données mesures. Applicable Analysis 18, 111-149 (1984).

36. Giga, Y., Miyakawa, T. & Osada, H., Two dimensional Navier-Stokes flow with measures as initial vorticity, preprint.

No. 1
Date

一次元粘性流体の漸近挙動

京大工. 松村昭孝

最近一次元粘性流体を記述する方程式系の解の $t\to+\infty$ での漸近挙動について多くの結果が得られつつある。ここでは初期値問題に話題を絞ってその結果を概観する。

1. Burgers 方程式. どの様な結果を目標としているのか、次の Burgers 方程式の初期値問題に例をとり述べる。

$$(1.1)\qquad u_t + uu_x - \mu u_{xx} = 0, \qquad x\in\mathbb{R}^1,\ t\geq 0,\quad \mu>0: 定数,$$

$$(1.2)\qquad u(0,x) = u_0(x) \in \mathcal{B}^2,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} u_0(x) = u_\pm, \qquad (u_\pm\in\mathbb{R}).$$

(1.1), (1.2) に対する基本的仕事は Hopf [1], Ilin & Oleinik [2] 参照.
解の漸近挙動は対応する次の非粘性方程式に対する Riemann 問題の解と密接に関る。

$$(1.3)\quad \begin{cases} u_t + uu_x = 0, \\ u(x,0) = u_0^R(x) \equiv u_\pm \quad (x \gtrless 0) \end{cases}.$$

(1.3) の解としては次の三つの場合がある。

Case 1. $u_\pm = \bar{u}$	Case 2. $u_+ > u_-$	Case 3. $u_+ < u_-$
$u=\bar{u}$: 自明解 $\lvert u-\bar{u}\rvert_{L^\infty} \to 0 \quad t\to+\infty$	$u = u^R(x/t)$: 希薄波解, $u^R(\xi) = \begin{cases} u_-, & \xi\leq u_- \\ \xi, & u_-\leq\xi\leq u_+ \\ u_+, & \xi\geq u_+ \end{cases}$	$u = u^S(x-st)$: 衝撃波解, $s = (u_+ + u_-)/2$ (Rankine-Hugoniot), $u^S(\xi) = \begin{cases} u_- & \xi<0 \\ u_+ & \xi>0 \end{cases}$

もとの(1.1)、(1.2)の解の漸近形としては、Case 1, Case 2 では粘性項の影響が弱いと予想され それぞれ $\bar{u}$ と $u^R(x/t)$ が予想されるが、Case 3 では μ がいかに小さくとも平滑化により $u^s(x-st)$ に対応して次の (1.1)の衝撃波形進行波解が漸近形となることが予想される。

$$u(x,t) = U(x-st-\alpha), \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \quad s = (u_+ + u_-)/2,$$

$$U(\xi): \begin{cases} -sU' + UU' - \mu U'' = 0 \\ \lim_{\xi \to \pm\infty} U(\xi) = u_\pm, \quad \lim_{\xi \to \pm\infty} U'(\xi) = 0. \end{cases}$$

(この場合、$U(\xi) = (u_+ + u_-)/2 - ((u_+ - u_-)/2) \tanh((u_+ - u_-)\xi/4\mu)$).

基本的な結果

Case 1. $u_0 - \bar{u},\ u_{0,x} \in L^2 \Rightarrow {}^{\exists 1}$ global sol. u s.t.

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_x |u(t,x) - \bar{u}| = 0.$$

Case 2. $u_0 - u_0^R \in L^2,\ u_{0,x} \in L^2 \Rightarrow {}^{\exists 1}$ global sol. u s.t.

$$\lim_{t \to \infty} \sup_x |u(t,x) - u^R(x/t)| = 0.$$

Case 3. $u_0 - u_0^R \in L^2 \cap L^1,\ u_{0,x} \in L^2 \Rightarrow {}^{\exists 1}$ global sol. u & ${}^{\exists 1}\alpha \in \mathbb{R}$

紛らして初めてうまくいく

s.t. $\boxed{\int u_0(x) - U(x-\alpha)\, dx = 0}$,

$$\lim_{t \to \infty} \sup_x |u(t,x) - U(x-st-\alpha)| = 0.$$

Remark 1. [2] によれば、これらの結果はより一般な形

(1.4) $\quad u_t + f(u)_x - (\mu(u) u_x)_x = 0$

でも f, μ に適当な条件を附すと成立する。

Remark 2. これらの結果は一般形(1.4)を含めて最大値原理で示すことが出来る。

Remark 3. (漸近の速さについて). Hopf, Coleの変換による解の陽な表現と熱方程式の基本解の性質より次のdecay評価を得る。

Case 1のとき. さらに $u_0 - \bar{u} \in L^1$ を仮定すると $\leq \frac{\mu}{(\mu t)^{1/2}}$

$$\|u(t) - \bar{u}\|_{L^2} \leq C t^{-1/4}, \quad \|u(t) - \bar{u}\|_{L^\infty} \leq C t^{-1/2},$$

であり、又このdecay orderは最善である。さらに $\int_{-\infty}^{x} u_0 - \bar{u}\, dy \in L^1 (x \leq 0)$, $\int_{x}^{+\infty} u_0 - \bar{u}\, dy \in L^1 (x \geq 0)$ 等を仮定し、0次モーメントが等しい同様の初期値を持つ他の解 v との差を考えると ($\int u_0 - \bar{u}\, dx = \int v_0 - \bar{u}\, dx$)、

$$\|u(t) - \underset{\text{Burgers}}{v(t)}\|_{L^2} \leq C t^{-3/4} \; ?, \quad \|u(t) - v(t)\|_{L^\infty} \leq C t^{-1}$$

が分る。ここで v を $\int u_0 - \bar{u}\, dx = M_0$ として

$$\begin{cases} v(x,t) = \bar{u} + c((1+t), x - \bar{u}(1+t)), \\ c(t,z) = \sqrt{\mu}\, t^{-1/2} \dfrac{(e^{M_0/2\mu} - 1) e^{-y^2}}{\sqrt{\pi} + (e^{M_0/2\mu} - 1) \int_y^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi}, \\ y = x / \sqrt{4\mu t}. \end{cases}$$

と取ることにより見易い形で次のLevelの漸近形まで分る。一般形(1.4)の場合の次のLevelでの漸近形の議論はsmall dataならKawashima[3]に含まれるがlarge dataでは？

travelling wave

Case 3 のとき。 [2] において一般形も含めて

$$|\Phi(x)| \equiv \left|\int_{-\infty}^{x} u_0(y) - U(y-\alpha)\,dx\right| \le Ce^{-\gamma|x|} \quad (\gamma>0)$$

$$\Rightarrow \quad \|u(t) - U\|_{L^\infty} \le Ce^{-\gamma' t} \quad (\gamma'>0),$$

が分っているが、Burgers 方程式では Nishihara [4] においてより詳しく

$$|\Phi(x)| \le C(1+|x|)^{-\gamma_1} \Rightarrow \|u(t) - U\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-\gamma},$$

であり、又この decay order は最善であることが示めされている。一般形 (1.4) については $|u-U| \le C(1+t)^{-\gamma/2}$ までしか分らない。しかし small data のときは Kawashima & Matsumura [5] において次が示めされている。

$$(1+|x|)^{\beta/2}|\Phi(x)| \in L^2 \Rightarrow \|u-U\|_{H^1} \le Ct^{-[\beta]/2}.$$

Case 2 のとき ?、$\|u(t) - u^R(x,t)\|_{L^\infty} \le Ct^{-1}$ と思われる。
$t^{-1/2}$

2. 圧縮性粘性流体の方程式系

次の Barotropic Model に対する初期値問題を考える。

$$(2.1)\quad \begin{cases} v_t - u_x = 0, \\ u_t + p(v)_x = \mu\left(\dfrac{u_x}{v}\right)_x, \end{cases}$$

$$(2.2)\quad (v,u)(0,x) = (v_0,u_0)(x),$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(v_0,u_0)(x) = (v_\pm, u_\pm), \quad (v_\pm>0,\ u_\pm\in\mathbb{R}).$$

ここに、 v : 比体積 、 u : 流速 、 $\mu>0$ (定数) : 粘性係数.
$p=p(v)$: 圧力 ($p'(v)<0$, $p''(v)>0$ for $v>0$).

<u>$(v_\pm, u_\pm)=(\bar{v}, \bar{u})$ ($\bar{v}>0$, $\bar{u}\in\mathbb{R}$) の場合. (Case 1 に当る)</u>

Kanel' [6] の仕事が基本的:

$$\varphi(v) \equiv \int_{\bar{v}}^{v} \left(\int_{\bar{v}}^{s} p(\bar{v})-p(z)\,dz\right)^{1/2} s^{-1}\,ds \to \infty \quad \text{as} \quad v\to\infty, 0.$$

$(v_0-\bar{v}, u_0-\bar{u})\in L^2$, $(v_0, u_0)_x \in L^2$, $\inf v_0>0$

$\Rightarrow$ $\exists 1$ global sol. (v,u) s.t $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\sup_x |(v-\bar{v}, u-\bar{u})(t,x)|=0$.

<u>Remark 1</u> $p=av^{-\gamma}$ ($a>0$, $\gamma\geq 1$) は $\varphi(v)$ に対する仮定を満す.

<u>Remark 2</u> Full system

$$(2.3)\begin{cases} v_t-u_x=0, \\ u_t+p_x=\mu(u_x/v)_x, \\ (e+u^2/2)_t+(pu)_x=(\kappa\theta_x/v+\mu u u_x/v)_x, \end{cases}$$

$$(2.4) \quad (v,u,\theta)(0,x)=(v_0,u_0,\theta_0)(x), \quad (v_0,u_0,\theta_0)(\pm\infty)=(\bar{v},\bar{u},\bar{\theta}),$$

(θ : 絶対温度. $p=p(v,\theta)$, $e=e(v,\theta)$: 内部エネルギー).

に対しては

Kazhikhov [7] が

$p=R\theta/v$, $e=R\theta/(\gamma-1)$

$(v_0-\bar{v}, u_0-\bar{u}, \theta_0-\bar{\theta})\in H^1$ $\Rightarrow$ $\exists 1$ global sol. (v,u,θ).

($R>0$: 気体定数, $\gamma>1$: 比熱比)

を示したが $(\bar{v}, \bar{u}, \bar{\theta})$ への漸近は? しかし Kawashima - Nishida [8]

はγが1に充分近いときに漸近性も含めて示めした。p, e がより一般のときは data small の下で Kawashima - Okada [9] に漸近性も含めた結果がある。

Remark 3　漸近の速さと次のLevelの漸近形への議論は始めに Barotropic モデルに対して Nishida [10]，full system も含む非常に一般の系で Kawashima [11] の議論がある。いずれも次のLevelの漸近形が簡単なBurgers方程式の解や熱方程式の解を用いて陽に与えられることが示めされた。ただし small data に対してである。

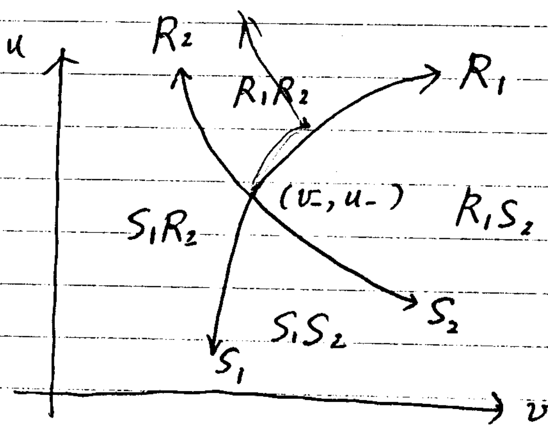
$(v_+, u_+) \neq (v_-, u_-)$ の場合

Burgers 方程式のときと同様 次の(2.1)に対応する非粘性方程式系に対する Riemann 問題の解に応じて幾つかの場合にさらに分れる。

$$(2.5)\quad \begin{cases} v_t - u_x = 0, \\ u_t + p(v)_x = 0, \end{cases}$$

$$(2.6)\quad (v,u)(0,x) = (v,u)_0^R(x) \equiv (v_\pm, u_\pm) \quad (x \gtrless 0).$$

まず(2.5)は $v>0$ で特性根
$$\lambda_1(v) = -(-p'(v))^{1/2}, \quad \lambda_2(v) = (-p'(v))^{1/2},$$
を持つ強双曲型である。(v_-, u_-) が与えられたとき (v,u) 平面の (v_-, u_-) の近傍を8つの領域 $R_i(v_-,u_-)$ $(i=1,2)$，$S_i(v_-,u_-)$ $(i=1,2)$，$R_1R_2(v_-,u_-)$，$S_1S_2(v_-,u_-)$，$R_1S_2(v_-,u_-)$，$S_1R_2(v_-,u_-)$ に分ける。

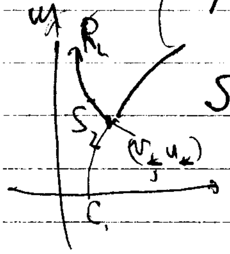


$v_t + \lambda_i(v) v_x = 0$

$\eta = \lambda_i(v)$ $\quad \eta = \lambda_i(v)$

$\eta_t + (\frac{1}{2}\eta^2)_x = 0$

ここに



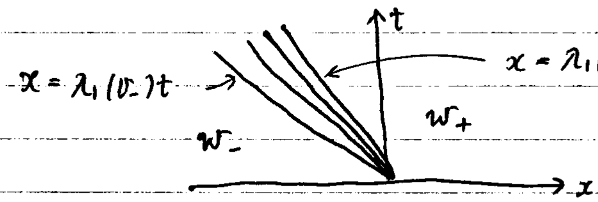
R_i 符号反転

$$R_i(v_-, u_-) = \{(v,u);\ u = u_- - \int_{v_-}^{v} \lambda_i(s)\,ds,\ \ \lambda_i(v) \ge \lambda_i(v_-)\},$$

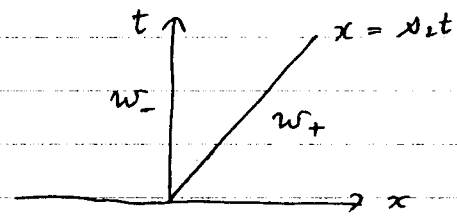
$$S_i(v_-, u_-) = \{(v,u);\ \exists s\ \text{s.t.}\ \begin{pmatrix} s(v - v_-) = u_- - u \\ s(u - u_-) = p(v) - p(v_-) \end{pmatrix},\ \ \lambda_i(v) \le \lambda_i(v_-)\}$$

以下簡単の為 (v,u) をまとめて w と書く。 $w_+ \in R_i(w_-)$ のときの Riemann 問題の解を $w_i^R(x/t\,;w_-, w_+)$, $w_+ \in S_i(w_-)$ のときの解を $w_i^S(x - s_i t)$ とする。

$w_1^R(x/t\,;w_-, w_+)$



$w_2^S(x - s_2 t)$



いま $w_+ \in R_1 R_2(w_-)$ のときは $\exists \bar{w} \in R_1(w_-)$ s.t. $w_+ \in R_2(\bar{w})$ により、Riemann prob. の解は

$$(2.7) \qquad w^R(x/t) = w_1^R(x/t\,;w_-, \bar{w}) + w_2^R(x/t\,;\bar{w}, w_+) - \bar{w}$$

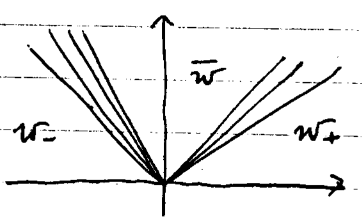
で与えられる。他の場合も同様で例えば $w_+ \in S_1 S_2(w_-)$ なら

$$(2.8) \qquad w^S(t,x) = w_1^S(x - s_1 t\,;w_-, \bar{w}) + w_2^S(x - s_2 t\,;\bar{w}, w_+) - \bar{w}$$

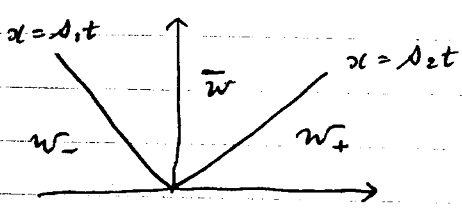
で与えられる。

2つある。

$w^R(x/t)$



$w^S(t,x)$



rarefaction

$w_+ \in (R_1 \cup R_2 \cup R_1R_2)(w_-)$ の場合　(Case 2 に当る)

$w_0 - w_0^R \in L^2$,　$w_{0,x} \in L^2$　を仮定し

$\Phi_0^2 = \| w_0 - w_0^R \|^2 + \| w_{0,x} \|^2 + |w_+ - w_-|^2$　と置く。

次の基本定理は Matsumura-Nishihara [12] による。

Th.1　For each w_-, $\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t. if $w_+ \in (R_1 \cup R_2 \cup R_1R_2)(w_-)$ and $\Phi_0 < \varepsilon_0$, then $\exists^1$ global sol. w of (2.1), (2.2) s.t.

$$\lim_{t \to \infty} \sup_x | w(t,x) - w^R(x/t) | = 0 .$$

Remark 1　$p = a v^{-\gamma}$ のときは Kawashima - Matsumura - Nishihara [13] の議論により $|w_+ - w_-|$ small だけで Th.1 が成立する。
$|w_+ - w_-|$ が大のとき?

Remark 2.　[13] ではさらに full system (2.3) に対しても Th.1 に対応する結果が示された。とくに $p = R\theta/v$, $e = R\theta/(\gamma-1)$ の時には $|w_+ - w_-|$ と $|\gamma - 1|$ small だけで示された。

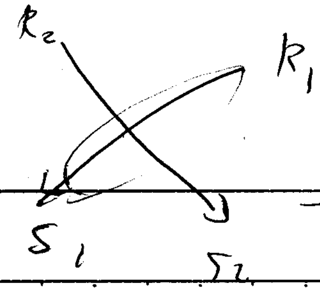
$w_+ \in (S_1 \cup S_2 \cup S_1S_2)(w_-)$ の場合　(Case 3 に当る)

$w_0 - w_0^R \in L^2 \cap L^1$,　$w_{0,x} \in L^2$　を仮定する。

衝撃波解 $w_i^S(x - s_i t ; w_-, w_+)$ に対応する (2.1) の衝撃波形進行波解を $W_i(x - s_i t - d_i ; w_-, w_+)$ ($d_i \in R$) とする。このとき (2.8) から漸近形は

$$W(x,t) \equiv W_1(x - s_1 t - d_1 ; w_-, \bar{w}) + W_2(x - s_2 t - d_2 ; \bar{w}, w_+) - \bar{w}$$

と予想される。いま $w_+ \in S_1S_2$ であれば常に $\exists^1 (d_1, d_2)$ s.t.



(2.9) $\int_{-\infty}^{+\infty} w_0(x) - W(x,0)\,dx = 0$

と出来る。このとき

(2.10) $\phi_0(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} w_0(y) - W(0,y)\,dy \in L^2$

を仮定する。$w_+ \in S_i(w_-)$ $(i=1 \text{ or } 2)$ のときは常に(2.9)と出来ない為

(2.9)′ $\int_{+\infty}^{+\infty} w_0(x) - W(x,0)\,dx = 0$ for $\exists \alpha_i \in \mathbb{R}^1$

を仮定する。このときも同様に(2.10)を仮定する。このとき次の定理が

Matsumura-Nishihara [14], Liu [15] の議論から従う。

Th. 2. For each w_-, $\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t. if $w_+ \in (S_1 \cup S_2 \cup S_1S_2)(w_-)$, (2.9), (2.10) and $|w_+ - w_-| + \|\phi_0\|_{H^2} < \varepsilon_0$, then $\exists^1$ global sol. w of (2.1), (2.2) s.t.

$$\lim_{t\to\infty} \sup_x |w(t,x) - W(t,x)| = 0.$$

Remark 1. $p = av^{-\gamma}$ のとき。$w_+ \in S_1$ or S_2 であれば [14] の議論により $(\gamma-1)|w_+ - w_-| + \|\phi_0\|_2 < \varepsilon_0$ で Th. 成立。これは特に $\gamma = 1$ であれば shock の大きさがどんなに大でもよい事になる。$w_+ \in S_1S_2$ のときは $(\gamma-1)|w_+ - w_-| + |w_+ - \bar{w}||\bar{w} - w_-| + \|\phi_0\|_2 < \varepsilon_0$ で成立。ϕ_0 が大きいとき?

Remark 2. (2.9)の下では、Kawashima-Matsumura [5] により、full system の場合にも Th. 成立。$p = R\theta/v$, $e = R\theta/(\gamma-1)$ のときは Remark 1 に対応する結果成立。

Remark 3. $w_+ \in S_1$ or S_2 であり、$\int w_0 - W\,dx = 0$ と出来ない場合にも full system も含めて Liu [16] が Th. を示した。
例えば $w_+ \in S_2(w_-)$ のとき shift α_1 は

$$\int w_0 - W(x-\alpha_2)\,dx = \alpha_2(w_+ - \bar{w}) + \int w_0 - W(x)\,dx$$

$$= \beta_1 r_1(w_-)$$

として決る（[15]），ここに $r_1(w_-)$ は $\lambda_1(\bar{w}_-)$ に対する右固有ベクトルである。

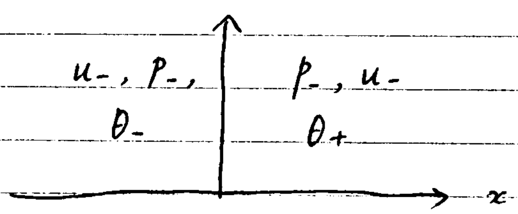
最後に
1-rarefaction 2-shock

i) $w_+ \in R_1 S_2(w_-)$ （$S_1 R_2$ も同様）のとき漸近形は

$$W = w_1^R(x/t\,;w_-,\bar{w}) + W_2(x - s_2 t - \alpha_2, \bar{w}, w_+) - \bar{w}$$

と予想されるが，？

ii) full system (2.3) のときは特性根 0 があるため，Riemann 問題の基本的な解として接触不連続解



がある。この場合に対応する漸近挙動？

References

[1] E. Hopf; Comm. Pure Appl. Math., 3 (1950), 201-230.
[2] A.M. Il'in and O.A. Oleinik; Mat. Sb., 51 (93) (1960), 191-216.
[3] S. Kawashima; Large-time behavior of solutions for hyperbolic-parabolic systems of conservation laws and applications, to appear.
[4] K. Nishihara; Japan J. Appl. Math., 2 (1985), 27-35.
[5] S. Kawashima and A. Matsumura; Commun. Math. Phys. 101, (1985), 97-127.
[6] J.I. Kanel'; Diff. Eq. (Russian) 4 (1968) 721-734.
[7] A.V. Kazhikhov; Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch Akad. USSR. No.50, (1981) 37-62.
[8] S. Kawashima & T. Nishida; J. Math. Kyoto Univ., 21 (1981), 825-837.
[9] S. Kawashima & M. Okada; J. Math. Kyoto Univ., 23 (1983), 55-71.
[10] T. Nishida; Equations of motion of compressible viscous fluids, to appear.
[11] S. Kawashima; = [3].
[12] A. Matsumura and K. Nishihara; Japan J. Appl. Math.,
[13] S. Kawashima, A. Matsumura and K. Nishihara; Asymptotic behavior of solutions for the equations of a viscous heat-conductive gas, to appear.
[14] A. Matsumura and K. Nishihara; Japan J. Appl. Math., 2 (1985), 17-25.
[15] T.P. Liu; Memoirs of A.M.S, no 328, 56 (1985), 1-107.
[16] T.P. Liu; Shock waves for compressible Navier-Stokes equations are stable, to appear.

On a Certain Mixed Problem for the Equations of Ideal Magneto-Hydrodynamics

Taku Yanagisawa

§ symmetric

$A_0(U)\partial_t U + \sum_{j=1}^{3} A_j(U)\frac{\partial}{\partial x_j}U = 0$

$A_0(U)$ $A_j(U)$ 7×7 symmetric matrix

§ 1 Introduction and Results.

We consider the following mixed problem for the equations of ideal magneto-hydrodynamics:

$A_n = n\cdot(A_1, \dots, A_3)$

$u\cdot n|_\Gamma = 0 \Rightarrow \det A_n(U)|_\Gamma = 0$

$H\cdot n| = 0 \Rightarrow \mathrm{rank}\, A_n(U)|_\Gamma = 6$

$$
(1.1)\quad \begin{cases} (a)\ \rho_p(\partial_t + (u\cdot\nabla))p + \rho\,\mathrm{div}\,u = 0 \\ (b)\ \rho(\partial_t + (u\cdot\nabla))u + \nabla p + \mu\, H \times \mathrm{curl}\, H = 0 \\ (c)\ \partial_t H - \mathrm{curl}\,(u \times H) = 0 \end{cases} \qquad \text{in } [0,T]\times\Omega,
$$

$$
(1.2)\qquad (p,\ u,\ H)|_{t=0} = (p_0,\ u_0,\ H_0) \qquad \text{in } \Omega,
$$

$$
(1.3)\qquad u\cdot n = 0,\ H \times n = g \qquad \text{on } [0,T]\times\Gamma.
$$

Here Ω is a bounded domain in R^3 with C^∞ boundary Γ and $n(x) = {}^t(n_1,\ n_2,\ n_3)$ denotes the unit outward normal at $x\in\Gamma$. Pressure $p(t,x)$, velocity $u(t,x) = {}^t(u_1,\ u_2,\ u_3)$ and the magnetic field $H(t,x) = {}^t(H_1,\ H_2,\ H_3)$ are unknowns. μ is the permeability, which we assume to be constant. We suppose that density $\rho>0$ is a smooth known function of $p>0$ i.e. $\rho = \rho(\ p\ )$ and $\rho_p = \partial\rho/\partial p$. $g(t,x) = {}^t(g_1,\ g_2,\ g_3)$ is a given function on $[0,T]\times\Gamma$. $\partial_t = \partial/\partial t, \partial_i = \partial/\partial x_i\ (i=1,2,$

3.), $\nabla=(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$, $(u\cdot\nabla)=\sum_{i=1}^{3} u_i\cdot\partial_i$ and $\cdot$, $\times$ denote scalar and vector product, respectively. T is a positive constant.

We assume that the initial data p_0 and H_0 satisfy

(1.4) $\quad \inf_{x\in\Omega}\{ \rho(p_0), \rho_p(p_0) \} \geq c_1,$

(1.5) $\quad \operatorname{div} H_0 = 0 \quad$ in Ω.

These assumptions guarantee the equations (1.1) to be a quasi-linear symmetric hyperbolic system. We further assume that the normal component of H_0 on Γ satisfy

(1.6) $\quad \inf_{x\in\Gamma} | H_0\cdot n | \geq c_2.$

Here c_1 and c_2 are positive constants.

Our aim is to show a short-time existence theorem for the mixed problem (1.1)-(1.3):

Theorem. For an integer $m \geq 3$, assume that $g\in\dot{Y}_m(T)$ and the initial data $(p_0, u_0 , H_0)\in H^m(\Omega)$ satisfy the assumptions (1.4), (1.5),(1.6) and the compatibility conditions of order m .

Then there exists a positive constant T_0 depending only on $\|(p_0, u_0, H_0)\|_m, \|g\|_{Y_m(T)}, c_1, c_2$, m, Ω such that the mixed problem (1.1), (1.2) and (1.3) has a unique solution which belongs to $X_m(T_0)$.

As to the definitions of the compatibility conditions and the function spaces $X_m(T)$ and $\dot{Y}_m(T)$, see (2.3), (2.4), (2.5) and (2.6) in §2.

We remark that this result can be extended to the non-isentropic case without essential modifications of the proof.

The mixed problem for the compressible Euler equations under the solid-wall boundary condition $u \cdot n=0$ (i.e. (1.1)-(1.3) with $H=0$) is a typical characteristic mixed problem for quasilinear symmetric hyperbolic systems and has been studied by many authors.

However if one considers the effect of the magnetic field, there seems no literature studying well-posedness of the mixed problem for the equations (1.1). This paper intends, from mathematical point of view, to seek some conditions which ensure that this mixed problem will be well-posed. As the boundary conditions for H, we take $H \times n=g$ so that the solution is unique.

The bound of $H_0 \cdot n$ (1.6) is needed to guarantee the rank of the boundary matrix to be 6 on the boundary. We remark here that the assumptions (1.5) and (1.6) force Ω^c to consist of at least two components.

The proof of Theorem proceeds via iteration scheme which involves the following steps. At first, according to [10], we modify the equations (1.1) to make the boundary noncharacteristic. We next establish the uniform estimates of the solution of the modified equations under the same initial boundary conditions (1.2) and (1.3). These uniform estimates are achieved by making use of a special structure of the modified equations and the rank of the boundary matrix being 6 on the boundary. Finally by taking a limit of these solutions,we get the solution of the original mixed problem (1.1)-(1.3).

§2. Definition of the function spaces and the compatibility conditions

(2.3) $$X_m(T) = \bigcap_{j=0}^{m} C^j(0,T;\ H^{m-j}(\Omega)),$$

(2.4) $$Y_m(T) = \bigcap_{j=0}^{m} C^j(0,T;\ H^{m-j+1/2}(\Gamma)) \cap C^{m+1}(0,T;\ H^{1/2}(\Gamma)),$$

with norms

$$\|u\|_{X_m(T)} = \sup_{t\in[0,T]} |||u(t)|||_m = \sup_{t\in[0,T]} \left(\sum_{j=0}^{m} \|\partial_t^j u(t)\|_{m-j}\right),$$

$$\|g\|_{Y^m(T)} = \sup_{t\in[0,T]} \left(\sum_{j=0}^{m} \|\partial_t^j g(t)\|_{H^{m-j+1/2}(\Gamma)} + \|\partial_t^{m+1} g(t)\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\right),$$

where u(t) stands for u(t,x) freezing t. Moreover we define

(2.5) $$\dot{Y}_m(T) = \{g \in Y_m(T);\ g\cdot n = 0 \text{ on } [0,T]\times\Gamma\}.$$

We say that the initial data (ρ_0, u_0, H_0) satisfy the compatibility conditions of order m for the equations (1.1) and the boundary conditions (1.3), if

(2.6) $$\partial_t^k u(0)\cdot n = 0, \quad \partial_t^k H(0)\times n = \partial_t^k g(0) \quad \text{on } \Gamma,$$

for $k=0,1,\cdots, m-1$.

Here the terms $\partial_t^k u(0)$, $\partial_t^k H(0)$ are calculated from (1.1) and (1.2), and are then expressed by initial data and their derivatives. For instance,

$$\partial_t u(0) = -(u_0\cdot\nabla)u_0 - \rho(p_0)^{-1}(\nabla p_0 + \mu H_0 \times \mathrm{curl}\ H_0),$$

$$\partial_t H_0 = \mathrm{curl}\ (u_0 \times H_0).$$

Reference.

[10] S.Schochet, The compressible Euler equations in a bounded domain: Existence of solutions and incompressible limit, Comm. Math. Phys. 104 (1986), 49-73.

Yang-Mills gradient flows について

都立大・理・大学院　横谷昌元

Yang-Mills gradient flows とは，次のような
コンパクトリーマン多様体(向付可)上のコーシー問題の
ことである。

M に対して曲率[illegible]の
仮定をしてよいかどうか
大域的では[illegible]

$$(\ast)\begin{cases} \partial_t A = -d_A^* F_A & \text{in } [0, \cancel{\infty}) \times M \\ A(0) = A_0 \in \mathcal{C}(P) \end{cases}$$

[illegible]の全ての
stable のものが
dynamic stable か

ここで，P は M 上の主束(その構造群は G とする)，
$\mathcal{C}(P)$ は P 上の接続全体の集合とする。未知函数 A
は，$\mathcal{C}(P)$ に値をもつ t の 1-パラメータ・ファミリーである。
F_A は A の曲率形式で，d_A^* は A の共変外微分 d_A の
共役作用素である。局所座標を用いると

$$A = A_j dx^j \quad (A_j \in \mathfrak{g} \ ; \ \mathfrak{g} \text{ は } G \text{ のリー環})$$

交代行列

$$F_A = \frac{1}{2} F_{ij} dx^i \wedge dx^j, \quad F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j]$$

$$-d_A^* F_A = F_{ij;i}^{\ A} dx^j, \quad (\nabla_{\partial_i}^A F_A)_{jk} = F_{jk;i}^{\ A} \quad \partial_i(A_i A_j)$$

となるが，記号に関する詳細なことは，伊藤[1]を参考
にしていただきたい。

transi. fct　　$A_\beta = t_{\beta\alpha}^{-1} dt_{\beta\alpha} + t_{\beta\alpha}^{-1} A_\alpha t_{\beta\alpha}$

$t_{\alpha\beta} \in G$

$ddA \qquad d(AA)$

$\partial_t A = \Delta A + dAA$

$\boxed{A \in C^0}$

<u>定理</u> コーシー問題(☆)は，すべての $A_0 \in \mathcal{E}(P)$ に対して解ける。

2つの接続 $A_1, A_2 \in \mathcal{E}(P)$ に対して，差 $A_1 - A_2$ は<u>ベクトル空間</u> $\Omega^1(M, \mathfrak{g}_P)$ の元（すなわち，Pの無限小ゲージ変換全体を表現することができるベクトル束 $\mathfrak{g}_P$ に値をもつ1次微分形式のことである）であるから，$\partial_t A \in \Omega^1(M; \mathfrak{g}_P)$．また，(☆)の右辺の $d_A^* F_A$ は，$\mathcal{E}(P)$ 上の Yang-Mills 汎函数 $\mathcal{YM}$ の A における第1変分で，$F_A \in \Omega^2(M; \mathfrak{g}_P)$ から，$-d_A^* F_A \in \Omega^1(M; \mathfrak{g}_P)$．故に，方程式(☆)はナンセンスではない。

(☆)において，初期値 A_0 を用いて，未知函数を $B = A - A_0 \in \Omega^1(M; \mathfrak{g}_P)$ に変えると，

$$\begin{cases} \partial_t B = -d_A^* d_{A_0} B - d_A^* F_{A_0} - \dfrac{1}{2} d_A^* [B \wedge B], \\ B(0) = 0 \end{cases}$$

となるが，右辺の主部 $-d^* dB$ は楕円型微分作用素ではない．しかし，Pのゲージ変換の1パラメータ・ファミリー $\chi = \chi(t)$ を用いて，$C = \chi^* A$ とすると

$$\partial_t C = \chi^* \partial_t A + d_C(\chi^{-1} \partial_t \chi)$$

であるから，$\chi^{-1} \partial_t \chi = -d_C^* B$ とすればよいことに気が付く。

定理の証明の概略　まず次のような初期値問題を考える。

$$(\star\star)\begin{cases}\partial_t B - \Delta_{A_0} B = -d_{A_0}^* F_{A_0} - V_{A_0}(B), \\ B(0) = 0\end{cases}$$

ここで，$\Delta_{A_0} = -d_{A_0}^* d_{A_0} - d_{A_0} d_{A_0}^*$ は，接続 A_0 及び M のリーマン計量に関するラプラス-ベルトラミ作用素で，M上の対角型強楕円型微分作用素となっている。また，

$$V_{A_0}(B) = B^* F_{A_0} + [B \wedge d_{A_0}^* B] + B^* d_{A_0} B + \frac{1}{2} d_{A_0}^* [B \wedge B] + \frac{1}{2} B^* [B \wedge B]$$

であり，$B^* \omega$ は，$d_{A_0+B}^* \omega = d_{A_0}^* \omega + B^* \omega$ が成り立つような，Bとωの2次形式である。

$(\star\star)$の解Bが見つかったとき，

$$\begin{cases}\chi^{-1} \partial_t \chi = -d_{A_0}^* B, \\ \chi(0) = id\end{cases}$$

となるゲージ変換の1-パラメータ・ファミリー χ を用いて

$$\chi^* A = A_0 + B$$

となるような接続の1-パラメータ・ファミリー A が$(\star)$の解である。

次に，方程式(☆☆)を あるバナッハ空間上の縮小写像に帰着して解こう．（Kato [2] を参照）

$\mathfrak{g}_P$ に値をもつ1次微分形式のベクトル束 $\Lambda^1(M;\mathfrak{g}_P)$ 上の自然な内積を用いて，ソボレフ空間

$$W^\ell(M;\mathfrak{g}_P) \qquad (\ell \text{ は整数})$$

が定義される。そこで，$T>0$ に対して，

$$\begin{cases} \mathcal{B}^\ell_T(M;\mathfrak{g}_P) \equiv C([0,T];W^\ell(M;\mathfrak{g}_P)), \\ \|B\|_{\mathcal{B}^\ell_T(M;\mathfrak{g}_P)} \equiv \sup\limits_{0\leq t\leq T}\|B(t)\|_{W^\ell(M;\mathfrak{g}_P)}, \quad B\in\mathcal{B}^\ell_T(M;\mathfrak{g}_P) \end{cases}$$

とおく．n をMの次元とし，$\ell \geq n+2$ とすれば，$B\in\mathcal{B}^\ell_T(M;\mathfrak{g}_P)$ に対して，$V_{A_0}(B)\in\mathcal{B}^{\ell-1}_T(M;\mathfrak{g}_P)$ であるが，

$\ell \geq n+2$

$= \frac{1}{2} - \frac{\ell}{n}$ $n+2$

$$\int_0^t e^{(t-s)\Delta_{A_0}} V_{A_0}(B(s))\,ds \in \mathcal{B}^\ell_T(M;\mathfrak{g}_P)$$

$= \frac{1}{2} - \frac{n+2}{n}$

$= \frac{1}{2} - 1 + \frac{2}{n} = 0$

4

となる．そこで，

$$(\Phi(B))(t) \equiv -\int_0^t e^{(t-s)\Delta_{A_0}}\left(d^*_{A_0}F_{A_0} + V_{A_0}(B(s))\right)ds$$

とおくと，

$$\Phi : \mathcal{B}^\ell_T(M;\mathfrak{g}_P) \longrightarrow \mathcal{B}^\ell_T(M;\mathfrak{g}_P)$$

となって，方程式(☆☆)は

$$B = \Phi(B)$$

と同等になる。$\exp t\Delta_{A_0}$ の性質から，ある定数 C_1, C_2, C_3 があって，

$$\begin{cases} \|\Phi(B)\| \leq T\|d_{A_0}^* F_{A_0}\|_{W^\ell(M;\mathfrak{g}_P)} \\ \qquad\qquad + \sqrt{T}\left(C_1\|B\| + C_2\|B\|^2 + C_3\|B\|^3\right), \\ \|\Phi(B_1) - \Phi(B_2)\| \leq \sqrt{T}\left\{C_1 + C_2(\|B_1\| + \|B_2\|) \right. \\ \qquad\qquad \left. + C_3(\|B_1\| + \|B_2\|)^2\right\}\|B_1 - B_2\| \end{cases}$$

が，B, B_1, $B_2 \in \mathcal{B}_T^\ell(M;\mathfrak{g}_P)$ に対して成り立つ．ただし，$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{B}_T^\ell(M;\mathfrak{g}_P)}$ とした．そこで，任意の $R > 0$ に対して，T を十分小さく，たとえば，

$$T = \min\left\{\left(\frac{-(C_1R + C_2R^2 + C_3R^3) + \sqrt{(C_1R + C_2R^2 + C_3R^3)^2 + 4R\|d_{A_0}^* F_{A_0}\|_{W^\ell(M;\mathfrak{g}_P)}}}{2\|d_{A_0}^* F_{A_0}\|_{W^\ell(M;\mathfrak{g}_P)}}\right)^2, \left(\frac{1}{2(C_1 + 2C_2R + 4C_3R^2)}\right)^2\right\}$$

とすれば，Φ は $\{B \in \mathcal{B}_T^\ell(M;\mathfrak{g}_P) \mid \|B\| \leq R\}$ 上の縮小写像になる。

文献

[1] 伊藤光弘：Yang-Mills 方程式 ― インスタントンとモノポールを中心として ―，数学 第34巻 第4号 1985年10月 秋季号 322～337

[2] Tosio Kato : On nonlinear Schrödinger equations, preprint

なお，$A = A(t)$ の $t \uparrow \infty$ での挙動は，まだ何もわかっていない．

Scattering Problem

for the Nonlinear Schrödinger Equations

Yoshio TSUTSUMI

Faculty of Integrated Arts and Sciences, Hiroshima University

Higashisenda-machi, Naka-ku, Hiroshima 730, Japan

We consider the asymptotic behavior as $t \to \pm\infty$ of solutions and the scattering theory for the following nonlinear Schrödinger equation with power interaction:

(1) $\quad i\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u + |u|^{p-1}u, \qquad t \in \mathbf{R}, \quad x \in \mathbf{R}^n,$

(2) $\quad u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in \mathbf{R}^n.$

Let $U(t)$ be the evolution operator associated with the free Schrödinger equation. For $1 \le q < \infty$, L^q and $\|\cdot\|_q$ denote the standard q-integrable function space on $\mathbf{R}^n$ and its norm, respectively. Let Σ denote the Hilbert space

$$\Sigma = \{\, v \in L^2 \;;\; \nabla v \in L^2 \text{ and } xv \in L^2 \,\}$$

with the norm $\|v\|_\Sigma^2 = \|v\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2 + \|xv\|_2^2$. We put

$$\alpha(n) = \begin{cases} \infty & , \; n = 1,\ 2, \\ (n+2)/(n-2), & \; n \ge 3, \end{cases}$$

$$\gamma(n) = \frac{n + 2 + \sqrt{n^2 + 12n + 4}}{2n}.$$

We note that $1 + \frac{2}{n} < \gamma(n) < 1 + \frac{4}{n} < \alpha(n)$. 解の一意性 存在わかる

$\boxed{\text{weak sol のみ}}$

Our main results are the following.

<u>Theorem 1.</u> (i) Assume that $1 + \frac{2}{n} < p < \alpha(n)$. Then, for any $u_0 \in \Sigma$ there exist unique $u_\pm \in L^2$ such that

有限時間内 scattering states!

(3) $\quad \|u_\pm - U(-t)u(t)\|_2 \to 0 \quad (t \to \pm\infty),$

where $u(t)$ is a solution of (1) with $u(0) = u_0$.

(ii) Assume that $1 \leq p \leq 1 + \frac{2}{n}$. Then, for any non-zero $u_0 \in \Sigma$ there do not exist any $u_\pm \in L^2$ satisfying (3).

<u>Theorem 2.</u> Assume that $\boxed{\gamma(n) < p < \alpha(n)}$.

(i) For any $u_+ \in \Sigma$, there exists a unique $u_0 \in \Sigma$ such that

(4) $\quad \|u_+ - U(-t)u(t)\|_\Sigma \to 0 \quad (t \to +\infty),$

where $u(t)$ is a solution of (1) with $u(0) = u_0$.

scattering stateを与えて それを実現する interacting state みつかる

(ii) For any $u_- \in \Sigma$, there exists a unique $u_0 \in \Sigma$ such that

(5) $\quad \|u_- - U(-t)u(t)\|_\Sigma \to 0 \quad (t \to -\infty),$

where $u(t)$ is a solution of (1) with $u(0) = u_0$.

<u>Theorem 3.</u> Assume that $\gamma(n) < p < \alpha(n)$. For any $u_0 \in \Sigma$, there exist <u>unique</u> $u_\pm \in \Sigma$ such that the solution $u(t)$ of (1) with $u(0) = u_0$ satisfies

(asymptotic completeness)

(6) $\quad \|u_\pm - U(-t)u(t)\|_\Sigma \to 0 \quad (t \to \pm\infty).$

Sobolev magic number

<u>Remark 1.</u> (i) If $1 < p < \alpha(n)$, for any $u_0 \in \Sigma$ there exists a unique solution in $C(\mathbf{R};\Sigma)$ of (1)-(2) (see Ginibre and Velo [4, Theorem 3.1] and [5, Proposition 3.5]). $p > 1 + \frac{2}{n}$ short range

(ii) Theorem 1 shows that $1 + \frac{2}{n}$ is the critical power.

(iii) Theorem 2 implies that if $\gamma(n) < p < \boxed{\alpha(n)}$, the wave operators $W_\pm : u_\pm \to u_0$ are well defined as a mapping from Σ to Σ. Theorem 3 implies that Range (W_+) = Range (W_-) = Σ and that $W_\pm$ are one to one. Therefore, we can construct the scattering operator $S = W_+^{-1}W_- : u_- \to u_+$, when $\gamma(n) < p < \alpha(n)$.

$\|u\|_{L^2} = \mathrm{const} \rightsquigarrow |u(t,x)|^{p-1} = O(t^{-\frac{n}{2}(p-1)})$

$p = 1 + \frac{2}{n} \iff -\frac{n}{2}(p-1) = -1$?

Corollary 4. Assume that $\gamma(n) < p < \alpha(n)$. The wave operators $W_{\pm}$ are well defined in Σ and are homeomorphisms from Σ onto Σ. Therefore, the scattering operator S is well defined in Σ and is a homeomorphism from Σ to Σ.

There are many papers concerning the asymptotic behavior as $t \to \pm\infty$ of solutions for (1)-(2) (see, e.g., [1], [3-11], [15-18] and [20-22]). Recently the scattering theory for the nonlinear Schrödinger equations has been remarkably developed by a series of papers of Ginibre and Velo [4-8]. In [5] they proved Theorems 2 and 3 for $1 + \frac{4}{n} < p < \alpha(n)$. Furthermore, in [7] they proved Theorems 2 and 3 for $1 + \frac{4}{n} < p < \alpha(n)$ and $n \geq 3$ with Σ replaced by H^1. However, in [17, 18] Strauss conjectured that construction of the wave operators and their asymptotic completeness could be brought down from $1 + \frac{4}{n}$ to $\gamma(n)$. Theorems 2 and 3 answer Strauss' conjecture. In addition, Theorem 1 gives us interesting information about the asymptotic behavior as $t \to \pm\infty$ of solutions of (1)-(2) for $p \leq \gamma(n)$. But two important problems still remain open: (1) Can we construct the scattering theory for $1 + \frac{2}{n} < p \leq \gamma(n)$? (2) When $1 < p \leq 1 + \frac{2}{n}$, how does the solution of (1)-(2) behave as $t \to \pm\infty$?

REFERENCES

[1] J. E. Barab, J. Math. Phys., 25 (1984), 3270-3273.

[2] D. Christodoulou, Comm. Pure Appl. Math., 39 (1986), 267-282.

[3] G. C. Dong and S. Li, J. Diff. Eqs., 42 (1981), 353-365.

[4] J. Ginibre and G. Velo, J. Funct. Anal., 32 (1979), 1-32.

[5] J. Ginibre and G. Velo, J. Funct. Anal., 32 (1979), 33-71.

[6] J. Ginibre and G. Velo, Nonlinear partial differential equations and their applications, College de France Seminaire, Vol.II, pp. 155-199, Pitman, Boston / London / Melbourne, 1981.

[7] J. Ginibre and G. Velo, J. Math. Pur. Appl., 64 (1985), 363-401.

[8] J. Ginibre and G. Velo, Ann. I. H. P. (Phys. Theor.), 43 (1985), 399-442.

[9] N. Hayashi and M. Tsutsumi, $L^{\infty}(R^n)$-decay of classical solutions for nonlinear Schrödinger equations, preprint.

[10] N. Hayashi, K. Nakamitsu and M. Tsutsumi, On solutions of the initial value problem for the nonlinear Schrödinger equations, to appear in J. Funct. Anal.

[11] N. Hayashi and Y. Tsutsumi, Remarks on the scattering problem for nonlinear Schrödinger equations, preprint.

[12] W. Hunziker, J. Math. Phys., 7 (1966), 300-304.

[13] A. Jensen, Math. Z., 191 (1986), 53-59.

[14] S. Klainerman, Comm. Pure Appl. Math., 38 (1985), 321-332.

[15] J. E. Lin and W. A. Strauss, J. Funct. Anal., 30 (1978), 245-263.

[16] M. Reed, Lecture Notes in Math., 507, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York, 1976.

[17] W. A. Strauss, Nonlinear Evolution Equations, pp. 85-102, Academic Press, New York, 1978.

[18] W. A. Strauss, J. Funct. Anal., 41 (1981), 110-133.

[19] R. S. Strichartz, Duke Math. J., 44 (1977), 705-714.

[20] Y. Tsutsumi, Doctor thesis, University of Tokyo, 1985.

[21] Y. Tsutsumi, Ann. I. H. P. (Phys. Theor.), 43 (1985), 321-347.

[22] Y. Tsutsumi and K. Yajima, Bull. (New Ser.) Amer. Math. Soc., 11 (1984), 186-188.

[23] K. Yajima, Comm. Math. Phys., 96 (1984), 349-360.

[24] R. T. Glassey, Trans. Amer. Math. Soc., 182 (1973), 182-200.

[25] R. T. Glassey, J. Math. Phys., 18 (1977), 1794-1797.

ある準線型楕円型デリクレ問題の解の凸性について

都立大理学部　坂口茂

最近非線型楕円型境界値問題の解の凸性に関して多くの結果が多くの人によって得られている。その方法は"Concavity Maximum Principle"という Korevaar ('83 Indiana) によって発見されたある種の最大値の原理による。彼はそこで $\mathbb{R}^{n+1}$ の中のある capillary surface の凸性を示している。また Korevaar ('83 Indiana) と Caffarelli–Spruck ('82 Comm. P.D.E.) はラプラシアンの第1固有関数が log-concave になるという Brascamp–Lieb ('76 J. Funct. Anal.) の結果の"Concavity Maximum Principle"による証明を与えた。さらに Kennington ('85 Indiana) と Kawohl ('85 Com. P.D.E.) は" $-\Delta u = u^{\alpha}$ in Ω, $u=0$ on $\partial\Omega$ (Ω は凸領域 $0 \leqq \alpha < 1$)"の解 u について $v = u^{\frac{1-\alpha}{2}}$ が concave になることを"Concavity Maximum Principle"を改良して示した。

一方 pseudo-Laplacian $-\mathrm{div}(|\nabla \cdot|^{p-2}\nabla \cdot)$ $(p>1)$ は準線型の楕円型作用素として多くの人に研究されている。

(例えば Díaz ('85 Pitman Research Notes $\underline{106}$) に詳しい。)。
pseudo-Laplacian の特徴は 解の gradient が消えるところで 退化 又は 特異楕円型であることにある。

我々の結果は ラプラシアンを pseudo-Laplacian で置き換えても 同様なことが成り立つことを示すものである。つまり 次の定理である。

<u>定理1</u>: Ω を $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ の滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界な凸領域とする。定数 $p>1$ をひとつ固定する。関数 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ を 次の非線型固有値問題 の正値弱解とする。

$$(1) \quad \begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda |u|^{p-2} u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

ここで λ は Poincaré の不等式の定数で

$$\lambda = \inf\left\{ \int_\Omega |\nabla v|^p dx \Big/ \int_\Omega |v|^p dx \ ; \ v \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\}$$

このとき $v = \log u$ は 凹 関数である。

<u>定理2</u>: Ω と p は定理1と同じとする。関数 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ を 次のディリクレ問題の 一意正値弱解とする。

$$(2) \quad \begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda |u|^{q-2} u & \text{in } \Omega. \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで λ は正定数，qは $1 \leqq q < p$ なる定数である。

このとき $v = u^{\frac{p-q}{p}}$ は凹関数である。

定理1は先のKorevaarとCaffarelli-Spruckの結果に対応し定理2はKenningtonとKawohlの結果に対応する。

一般にpseudo-Laplacianの性質上(1),(2)の解はC^2級ではない。Tolksdorfの結果('83 Comm.P.D.E.)によれば$C^{1+\alpha}(\Omega)$に解は属するがたとえば(2)で$q=1$，Ωが原点中心のballの時関数 $u(x) = a|x|^{\frac{p}{p-1}} + b$ $(a<0,\ b>0)$ は(2)の解である。一方Korevaarたちの"Concavity Maximum Principle"はC^2級の解にしか適用できないので直接に我々の問題(1)(2)には使えない。

そこで我々は滑らかな解をもちなおかつ"Concavity Maximum Principle"を適用できる問題で(1)(2)を近似することによって．定理1と定理2を示す。

ところで定理1と定理2の解の存在と一意性について少し述べる必要がある。存在は変分の直接法により示せるのだが一意性については問題がある。ラプラシアンの第1固有値が単純である

のは 解の強比較定理 によっているのであるが 我々の pseudo-Laplacian は 一般の強比較定理が示されていないので 単純性は まだ知られていない。しかし我々は $\partial\Omega$ の近くで (1), (2) の解の gradient が消えないという事実をうまく利用することによって次のことを示すことができた。

<u>定理3</u> Ω を $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ の滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界な領域とする。しかも $\partial\Omega$ を連結とする。(Ω が 凸 ならば $\partial\Omega$ は連結である。)
このとき 固有値問題(1) について λ は単純である。

<u>定理4</u> Ω を $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ の滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界な領域とする。このとき (2) の解は 正負の符号を除いて一意的である。

最後に定理1の証明の概略を述べる。方程式(1) は変分問題

(3) Find $u \in \mathbb{K}$ satisfying

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx = \min_{v \in \mathbb{K}} \int_\Omega |\nabla v|^p dx \quad (= \lambda)$$

where

$$\mathbb{K} = \{ v \in W_0^{1,p}(\Omega) \; ; \; \|v\|_{L^p(\Omega)} = 1 \}$$

から得られるが これを次で近似する。

(4) Find $u \in \mathbb{K}$ satisfying

$$\int_\Omega (\varepsilon u^2 + |\nabla u|^2)^{\frac{p}{2}} dx = \min_{v \in \mathbb{K}} \int_\Omega (\varepsilon v^2 + |\nabla v|^2)^{\frac{p}{2}} dx$$

(4)の正値解が(3)の正値解に収束するところに定理3を要する。

あとは(4)の解の滑らかさをTolksdorfの結果('84 J. Diff. Eqs)を使って示し、(4)の解をu_εとするとき $v_\varepsilon = \log u_\varepsilon$ のみたす方程式に Korevaar の "Concavity Maximum Principle" を適用する。

— Appendix (Korevaar の Concavity Maximum Principle) —

Ωを$\mathbb{R}^n$の有界凸領域とし $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ を考える。concavity function $C(y,z,t)$ を

$$C(y,z,t) = (1-t)u(y) + t\,u(z) - u((1-t)y + tz)$$

$((y,z,t) \in \Omega \times \Omega \times [0,1])$ によって定める。$C \leqq 0$ は u が concave であることに対応する。このとき

定理 (Korevaar) $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ が $\frac{\partial b}{\partial u} \leq 0$

$$\sum a^{ij}(\nabla u) D_{ij} u + b(x,u,\nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

をみたす。ここで $[a^{ij}(\nabla u)]$ は正値対称行列であり、$b = b(x,u,\nabla u)$ は (x,u) について jointly concave である。

このとき もし C が正の値をとれば 正の最大値は $\partial(\Omega \times \Omega) \times [0,1]$ でとられる

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = nH \\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega \end{cases}$$

— 参考文献 —

[1] H. J. Brascamp & E. H. Lieb, J. Funct. Anal. 22 (1976), 366-389.

[2] L. A. Caffarelli & J. Spruck, Comm. P.D.E. 7 (1982), 1337-1379.

[3] J. I. Díaz, Pitman Research Notes in Math. 106, 1985.

[4] B. Kawohl, Comm. P.D.E. 10 (1985), 1213-1225.

[5] A. U. Kennington, Indiana Univ. Math. J. 34 (1985), 687-704.

[6] N. Korevaar, Indiana Univ. Math. J. 32 (1983), 73-81.

[7] ———, Indiana Univ. Math. J. 32 (1983), 603-614.

[8] P. Tolksdorf, J. Diff. Equations 51 (1984), 126-150.

[9] ———, Comm. P.D.E. 8 (1983), 773-817.

調和写像とEells-Sampsonの放物型方程式について

内藤久資　　　　　名古屋大学理学部

以下では，(M,g),(N,h)はcompact Riemann多様体とする．

Definitions

$f : M \longrightarrow N$; smooth map に対して，energy density e(f)，および Total energy E(f) を次のように定義する．

$$e(f) = \frac{1}{2}|df|^2 = \frac{1}{2} g^{ij} h_{\alpha\beta}(f) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}$$

ここで　$df \in T^*M \otimes f^{-1}TN$

$$E(f) = \int_M e(f)\, d\mu_M$$

ここで $d\mu_M$ はRiemann計量から定まる標準的なvolume element

$f : M \longrightarrow N$; smooth map が 調和写像(harmonic map)であるとは，f が汎関数 E の停留点であること．

この定義により，次の命題をえる．

Proposition

$f : M \longrightarrow N$ がharmonic mapであることと f が次の微分方程式を満たす事は同値．

$$\Delta f = 0$$

ここで，

$$\Delta f = \mathrm{Trace}\, \nabla df = \left(\Delta_M f^\alpha + g^{ij}\, {}^N\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(f) \frac{\partial f^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial f^\gamma}{\partial x^j}\right)$$

また，1964年に，J. EellsとJ. H. Sampson は，harmonic map の存在に関する，基本的な次の結果を得た．

<u>Theorem</u> (J. Eells and J. H. Sampson (ES))

(M,g), (N,h) をcompact Riemann 多様体，${}^{N}K \leqq 0$ (N の断面曲率) とすると，$C^{\infty}(M,N)$ の各 homotopy 類には，少なくとも一つの harmonic map が存在する．

なお一意性については，P. Hartman (H) により，ある種の一意性がえられている．この定理の証明の中で，Eells-Sampson は，次の半線形放物型方程式の初期値問題をあつかった．

$$(*) \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = \Delta f & \text{on } M \times [0,\omega) \\ f = f_0 & \text{on } M \times 0 \end{cases}$$

ここでは，(*) を Eells-Sampson の放物型方程式と呼ぶ．

一方，エネルギー積分 $E(f)$ の第二変分公式は，1975年に R. T. Smith によって得られている．

<u>Theorem</u> (R. T. Smith (Sm))

$E(f)$ の harmonic map f での Hessian は，

$$H_f(v,w) = \int_M (\Delta^f v - \mathrm{Trace}\ {}^{N}R(df,v)df, w)\, d\mu_M$$

v, w は $f^{-1}TN$ の section

である．

<u>Definition</u>

$J_f v = \Delta^f v - \mathrm{Trace}\ {}^{N}R(df,v)df$ を

f の Jacobi operator とよぶ

f の index，nullity とは，

$\mathrm{Index}(f) = \{ J_f$ の negative definite subspace の最大次元$\}$

$\mathrm{Null}(f) = \mathrm{Dim}(\ker(J_f))$

harmonic map f が安定とは

$\mathrm{Index}(f) = \mathrm{Null}(f) = 0$,

であること．

ここで，次の問題を考えよう．

<u>問題</u>

$f : M \longrightarrow N$ を安定な harmonic map とするとき，(*) は f に十分" 近い" 初期値から $\omega = +\infty$ までの解をもち，f に収束するだろうか？

この問題に関して，次の定理をえた．

<u>Theorem</u>

$f : M \longrightarrow N$ を安定な harmonic map とするとき，$\varepsilon > 0$ が存在して，

$$\| f - f_0 \|_{H^m(M,N)} < \varepsilon , \ \| f - f_0 \|_{C^0(M,N)} < i_M \quad (m > \tfrac{1}{2} \dim M + 2)$$

であれば，(*) は $\omega = +\infty$ までの解を，

$$B = C^{1/2}([0,\infty) ; H^{m-1}(M,N)) \cap C([0,\infty) ; H^m(M,N))$$

にもち，その解は f に$H^m(M,N)$で収束する．

i_M は M の単射半径．

証明の方針は，(*) を $f^{-1}TN$ - valued の方程式に直すことによって，

が十分小さい時に，

$$(**) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -J_f u + \varphi(u) \Delta^f u + P_f u & \text{on } M \times [0, \omega) \\ u = u_0 & \text{on } M \times 0 \end{cases}$$

と直し，(**) の解をBで存在することを逐次近似によって証明する．

さて，f として特に M 上の恒等写像 id_Mを考えよう．

id_M は isometry であり，特に harmonic map である.
id_M での Jacobi operator は，

$$J_{id_M} = \Delta v - Ric(v)$$

$Ric(\cdot)$ は M の Ricci 曲率.

であって，M が非負な Ricci 曲率（ただし，$Ric \neq 0$ ）をもてば，id_M は安定な harmonic map となる，したがって定理は特に，$M = N$, $f = id_M$ で成り立つ.

Remark

L. Simon [Si] によって，同様の問題が N が analytic Riemann 多様体のときに，扱われている.

References

[EL] J. Eells and L. Lemaire, Selected topics in harmonic maps, C. B. N. S. Regional Conference Series, 1980.

[ES] J. Eells and J. H. Sampson, Harmonic mapping of Riemannian manifolds, Amer. J. Math., **86** (1964), 109-160.

[H] P. Hartman, On homotopic harmonic maps, Canad. J. Math., **19** (1967), 673-687.

[Si] L. Simon, Asymptotic for a class of non-linear evolution equations with applications to geometric problems, Ann. Math., **118** (1983), 525-571.

[Sm] R. T. Smith, The second variation formula for harmonic mappings, Proc. Amer. Math. Soc., **47** (1975), 229-236.

[N] H. Naito, in preparation.

Criteria for Hypoellipticity

Yoshinori Morimoto

Main Results. Let $P = p(x, D_x)$ be a differential operator of order $m \geq 1$ with coefficients in $C^\infty(R^n_x)$, that is,

$$p(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha_x, \quad a_\alpha(x) \in C^\infty(R^n_x),$$

where for multi-index $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $D^\alpha_x = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$ and $D_j = -i\partial_{x_j}$.

We say that P is *hypoelliptic in* R^n if for any $u \in D'(R^n)$ and for any open set Ω of R^n, $Pu \in C^\infty(\Omega)$ implies $u \in C^\infty(\Omega)$. Let Λ and $\log \Lambda$ be pseudodifferential operators with symbols $\langle\xi\rangle$ and $\log \langle\xi\rangle$, respectively, where $\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}$. We write $p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x, \xi) = \partial^\alpha_\xi D^\beta_x p(x, \xi)$ for multi-indices α and β. We set $\|u\|_s = \|\Lambda^s u\|$ for real s and $u \in C^\infty_0(R^n)$, where $\|.\|$ denotes the usual L^2 norm.

Theorem 1. *Assume that for any* $\varepsilon > 0$ *and any compact set* K *of* R^n *there exists a constant* $C_{\varepsilon,K}$ *such that for any* $u \in C^\infty_0(K)$

(1) $$\|(\log \Lambda)^m u\| \leq \varepsilon \|Pu\| + C_{\varepsilon,K}\|u\|,$$

(2) $$\sum_{0<|\alpha+\beta|<m} \|(\log \Lambda)^{|\alpha+\beta|} P^{(\alpha)}_{(\beta)} u\|_{-|\beta|} \leq \varepsilon\|Pu\| + C_{\varepsilon,K}\|u\|,$$

where $P^{(\alpha)}_{(\beta)} = p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x, D_x)$. *Then* P *is hypoelliptic in* R^n. *Furthermore we have*

(3) $$\mathrm{WF}\ Pv = \mathrm{WF}\ v \quad \textit{for any} \quad v \in \mathcal{D}'(R^n).$$

Corollary 1. *Let P be a differential operator of second order with C^∞-coefficients, that is,*

$$P = \sum_{j,k} a_{jk}(x)D_jD_k + \sum_j ib_j(x)D_j + c(x) .$$

We assume that

$$\begin{cases} a_{jk} \text{ and } b_j \text{ are real valued,} \\ \sum a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geq 0 \quad \text{for all } (x,\xi) \in R^{2n} \end{cases}$$

If for any $\varepsilon > 0$ and any compact set K of R^n the estimate

$$(4) \qquad \|(\log \Lambda)^2 u\| \leq \varepsilon\|Pu\| + C_{\varepsilon,K}\|u\|, \qquad u \in C_0^\infty(K)$$

holds with a constant $C_{\varepsilon,K}$ then we have (3).

Corollary 2. *Let P be the same as in Corollary 1. If for any $\varepsilon > 0$ and any compact set K of R^n the estimate*

$$(5) \qquad \|(\log \Lambda)u\|^2 \leq \varepsilon \operatorname{Re}(Pu,u) + C_{\varepsilon,K}\|u\|^2, \quad u \in C_0^\infty(K)$$

holds with a constant $C_{\varepsilon,K}$ then we have (3).

Remark. The estimate (4) easily follows from (5).

We discuss the necessity of hypoellipticity for second order differential operators given in Corollary 1. The estimate (4) is not always necessary for hypoellipticity. We have a counter example given by Fediĭ [Fd], $\mathcal{A}_0 \equiv D_1^2 + \exp(-1/|x_1|^\delta)D_2^2$, $\delta > 0$. Indeed, this example does not satisfy (4) when $\delta \geq 1$, while it is hypoelliptic for any $\delta > 0$. However, the estimate (4) is necessary for a class of operators to be hypoelliptic.

The result concerning the necessity of (4) can be discussed for some class of operators of higher order. Let m be even positive integer and let P_0 be a differential operator of the form

(6) $$P_0 = D_t^m + \mathscr{A}(x, D_x) \quad \text{in} \quad R_t \times R_x^n ,$$

where $\mathscr{A}(x, D_x)$ is a differential operator of order m with C^∞-coefficients. We assume that $\mathscr{A}(x, D_x)$ is formally self-adjoint in R_x^n and bounded from below, that is, there exists a real c_0 such that $(\mathscr{A}(x, D_x)u, u) \geq c_0\|u\|^2$ for $u \in C_0^\infty(R_x^n)$.

Theorem 2. *Let P_0 be the above operator. Assume that P_0 is hypoelliptic in $R_t \times R_x^n$. Then for any $x_0 \in R_x^n$ there exists a neighborhood ω of x_0 such that for any $\varepsilon > 0$ the estimate*

(7) $$\|(\log \Lambda)^{m/2}u\|^2 \leq \varepsilon \operatorname{Re}(P_0u, u) + C_{\varepsilon, K}\|u\|^2, \quad u \in C_0^\infty(R_t \times \omega)$$

holds with a constant C_ε. Here Λ, of course, denotes $\langle D_t, D_x \rangle = (1+D_t^2+|D_x|^2)^{1/2}$.

Remark 1. When $m = 2$ the estimate (4) follows from (7). In fact, for any compact set K of $R_t \times R_x^n$, let K' be the projection of K to R_x^n and take the partition of unity $\sum \varphi_j^2(x) = 1$ over K'. Since $\operatorname{Re}([P_0, \varphi_j]u, \varphi_j u)$ is majorated by a constant times of $\|u\|^2$, we have (7) for $u \in C_0^\infty(R_t \times K')$, which implies (5) and hence (4).

Remark 2. Almost the same result as Theorem 2 was obtained independently by [Hs]. Proof of Theorem 2 is performed by the similar method as in [Me], where nonanalytic hypoellipticity was studied for operators of the same form as (6).

As an application of Theorems we shall consider the hypo-ellipticity of degenerate elliptic opertors of the following form;

(8) $$L_0 = D_t^{2\ell} + D_x^{2\ell} + g(x)D_y^{2\ell} \quad \text{in} \quad R^3,$$

where $\ell = 1, 2, \ldots$ and $g(x)$ is C^∞ function such that $g(x) > 0$ ($x \neq 0$) and $g(0) = 0$. When $\ell \geq 2$ we assume that for any $j > 0$

(9) $$|D_x^j g(x)| \leq C_j g(x)^{1-\sigma j} \quad \text{in a neighborhood of} \quad x = 0 ,$$

where σ is a number satisfying

(10) $$0 < \sigma < 1/2\ell^2 .$$

It is clear that a function $\exp(-1/|x|^\delta)$, $\delta > 0$, satisfies (9) for any $\sigma > 0$.

Proposition 1. *Let L_0 be the above operator. If $g(x)$ satisfies*

(11) $$\lim_{x \to 0} |x||\log g(x)| = 0$$

then L_0 is hypoelliptic in R^3. Assume in addition that $xg'(x) \geq 0$, that is, g is monotone in R^+ and R^-, respectively. Then the condition (11) is also necessary for L_0 to be hypoelliptic in R^3.

Remark. For the function $\exp(-1/|x|^{\delta})$, $\delta > 0$, the condition (11) means $\delta < 1$. The proposition in the case $\ell = 1$ was first proved by Kusuoka-Strook [K-S] in a little weak form. Their proof is based on the Malliavin calculus, which is a theory of stochastic differential equations.

Unfortunately, when $\ell \geq 2$ we can not apply directly Theorem 1 to the proof of Proposition 1, because it is quite hard to check the hypothesis (2) for L_0, more precisely, to show

$$\|(\log \Lambda)\, D_x^{2\ell-1} u\| \leq \varepsilon \|L_0 u\| + C_{\varepsilon,K}\|u\|, \quad u \in C_0^{\infty}(K).$$

So we need the following amelioration of Theorem 1 under an additional assumption.

Theorem 3. *Assume that the principal symbol of* $p_m(x,\xi)$ *of* P *satisfies*

(12) $$p_m(x,\xi) \neq 0 \quad \text{for} \quad x' \neq 0, \quad \text{where} \quad x = (x', x'').$$

Then the conclusion (3) of Theorem 1 still holds even if the estimate (2) is replaced by

(13) $$\sum_{\substack{0<|\alpha+\beta|<m' \\ \alpha=(0,\alpha'')}} \|(\log \Lambda)^{|\alpha+\beta|} P_{(\beta)}^{(\alpha)} u\|_{-|\beta|} \leq \varepsilon \|Pu\| + C_{\varepsilon,K}\|u\|, \quad u \in C_0^{\infty}(K).$$

The hypoelliptic operator $\mathscr{A}_0$ given by [Fd] with $\delta \geq 1$ is not covered by Corollary 2 (nor 1) as stated in the preceding. To cover this exceptional example we give another criterion of hypoellipticity.

Theorem 4. *Assume that the principal symbol of* P *satisfies (12). If for any compact set* K *of* R^n *there exist a* $\kappa_0 > 0$ *and a constant* C_K *such that*

$$\|u\| + \sum_{\substack{0<|\alpha+\beta|\leq m \\ \alpha=(0,\alpha'')}} \|P^{(\alpha)}_{(\beta)}u\|_{\kappa_0-|\beta|} \tag{14}$$

$$\leq C_K(\|Pu\| + \|u\|_{-1}), \quad u \in C_0^\infty(K),$$

then we have (3).

A little historical survey.

Constant coeffecients case (i.e. $P = p(D_x) = \sum a_\alpha D_x^\alpha$).

Theorem 5 (Hörmander[H_1]). *It is necessary and sufficient for* $p(D_x)$ *to be hypoelliptic in* R^n *that*

$$\operatorname{Im} \zeta \to \infty \quad \text{if} \quad |\zeta| \to \infty \quad \text{on the surface} \quad \{ \zeta \in \mathbf{C}^n \; ; \; p(\zeta) = 0 \}.$$

Corollary. *If* $p(D_x)$ *is hypoelliptic in* R^n *then* $p(\xi) \neq 0$ for large $|\xi|$, $\xi \in R^n$.

Variable coefficients case.

Let L be a differential operator of the form

$$L = - \sum_{j=1}^{r} X_j^2 + X_0 \quad , \tag{15}$$

where X_j are real vector fields, that is, $X_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x)\partial_{x_k}$ for real-valued $a_{jk}(x) \in C^\infty(R^n)$.

Theorem 6 (Hörmander [H_2]). *L is hypoelliptic in R^n if*

$$(*) \qquad \begin{cases} \textit{the vector fields } X_0, \ldots, X_n \textit{ and their repeated} \\ \textit{commutators span the tangent space at each point in } R^n_x . \end{cases}$$

Example. $\mathcal{A}_1 \equiv D_1^2 + x_1^2 D_2^2$ is hypoelliptic because with $X_1 = \partial_{x_1}$ and $X_2 = x_1\partial_{x_2}$ we have $[X_1, X_2] = \partial_{x_2}$. Note that the symbol of $\mathcal{A}_1$, $\sigma(\mathcal{A}_1) \equiv \xi_1^2 + x_1^2\xi_2^2$ vanishes on $\xi_1 = 0$, $\xi_2 \to \infty$ when $x_1 = 0$. Similarly, $\mathcal{A}_k \equiv D_1^2 + x_1^{2k}D_2^2$ is hypoelliptic since $[X_1, [X_1, \ldots [X_1, X_2] \ldots] = k!\partial_{x_2}$ if $X_1 = \partial_{x_1}$ and $X_2 = x_1^k\partial_{x_2}$.

The key point of the proof of Hömander's theorem is to derive the following subelliptic estimate from (*): For some $\varepsilon > 0$

$$(16) \qquad \|u\|_\varepsilon^2 \le C(\operatorname{Re}(Lu, u) + \|u\|^2) , \quad u \in C_0^\infty(R^n),$$

where for the brevity we consider the simple case $X_0 \equiv 0$.
If $L = \mathcal{A}_k$ then $\varepsilon = 1/(k+1)$ (see Fefferman-Phong [F-P]). By using (16) we can prove that if $u \in H_s^{loc}(\Omega)$ and $Lu \in H_s^{loc}(\Omega)$ then $u \in H_{s+\varepsilon}^{loc}(\Omega)$. The repetition of ε-regularity up gives the hypoellipticity of L.

It is clear that infinitely degenerate elliptic operators $\mathcal{A}_0$ and L_0 with $\ell = 1$ don not satisfy Hörmander's criterion (*). As understood from the fact that, for $\mathcal{A}_k$, ε tends to 0 when

$k \to \infty$, infinitely degenerate elliptic operators $\mathscr{A}_0$ and L_0 with $\ell = 1$ do not satisfies the subelliptic estimate (16) for any $\varepsilon > 0$. Hence, neither Hörmander's theorem nor his method apply to these infinitly degenerate operaors.

Proof of Proposition 1.

For the brevity we shall consider the second order case and only prove the sufficiency of (11) when $g(x) = \exp(-1/|x|^{\delta})$. (Concerning the necessity of (11) see [M_2].) By Corollary 2 it suffices to show that $L_0 = D_t^2 + D_x^2 + \exp(-1/|x|^{\delta})D_y^2$ satisfies (5) when $\delta < 1$. Note that

(17) $$\mathrm{Re}(L_0 u, u) = \|D_t u\|^2 + \|D_x u\|^2 + (\exp(-1/|x|^{\delta})D_y^2 u, u).$$

We use the following lemma given by Fefferman [Ff]:

Lemma. *Assume that* $V(x) \geq 0$, C^{∞} *on a cube* Q *in* R^n. *Suppose that there exists a* $c > 0$ *such that*

(18) $$m(\{x \in Q \,;\, V(x) \geq c(\mathrm{diam}\ Q)^{-2}\}) \geq c|Q|,$$

where m(.) *denotes the lebeague measure. Then for* $u \in C^1$ *we have*

(19) $$\int_Q [|\nabla u(x)|^2 + V(x)|u(x)|^2]dx \geq c'(\mathrm{diam}\ Q)^{-2}\int_Q |u(x)|^2 dx.$$

The constant c' *depends only on* n *and* c.

In [Ff], it is assumed that V(x) is polynomial and $(\mathrm{Av}_Q\ V) \geq (\mathrm{diam}\ Q)^{-2}$. The proof in [Ff] is still valid for the above hypothese.

Set $V(x) = \exp(-1/|x|^{\delta})\eta^2$. (In what follows we assume $x \in R^1$.) In view of (17), for the proof of (5) it suffices to show that for any $k > 0$ there exists a $M_k > 0$ such that for $u \in C_0^{\infty}(R^1)$

$$(20) \qquad \int(|\nabla_x u(x)|^2 + V(x)|u(x)|^2)\,dx \ge c(k \log|\eta|)^2\int|u(x)|^2dx, \quad \text{if } |\eta| \ge M_k ,$$

where c is a constant independent of k and η. Of course, c may depend on the interval $[-R,R]$ containing supp u.

Let $\{ Q_j \}_{j=1}^{\infty}$ be pairwise disjoint intervals such that $\cup Q_j = R^1$, diam $Q_j = (k \log|\eta|)^{-1}$ and $Q_1 = \{ x ; |x| \le (2k \log|\eta|)^{-1}\}$. When $|x| \ge (4k \log|\eta|)^{-1}$ we have

$$\exp(-1/|x|^{\delta})\eta^2 \ge \exp(2 \log|\eta| - (4k \log|\eta|)^{\delta}).$$

Then, if $|\eta| \ge M_k$ for a sufficently large M_k, we have

$$(21) \qquad \exp(-1/|x|^{\delta})\eta^2 \ge |\eta| \ge (\mathrm{diam}\, Q_j)^{-2} \quad \text{for } |x| \ge (4k \log|\eta|)^{-1}.$$

Thus, for each Q_j we have (18). By th above lemma we get (19) and so (20).

The above argument can apply to more degenerate elliptic operators than L_0. For example, let $\tilde{L}$ be a differential operator of the same form as (8) with $\ell = 1$ and $g(x)$ equal to $\exp(-1/|x|^{\delta})\sin^2(1/|x|)$. If $0 < \delta < 1$, $\tilde{L}$ is hypoelliptic.

In fact, for any Q_j where $\sin(1/|x|)$ vanishes at least twice, we have

(22) $$m(\{ x \in Q_j \ ; \ \sin^2(1/|x|) \geq 1/2 \}) \geq |Q_j|/4 .$$

For other Q_j contained in $[-R,R]$ we also have

(23) $$m(\{ x \in Q_j \ ; \ \sin^2(1/|x|) \geq (2\pi R^2 k \log |\eta|)^{-2}\}) \geq |Q_j|/2$$

because $\sin t \geq 2t/\pi$ for $0 \leq t \leq \pi/2$. If we set $V(x) = \exp(-1/|x|^{\delta})\sin^2(1/|x|)\eta^2$, (22) or (23) together with (21) gives (18) for each Q_j. By Lemma 1 we obtain (20) and so $\tilde{L}$ is hypoelliptic.

We end this abstract by giving a more pathological example. Let $\hat{L}$ be a second order differential operator of the form (8). We assume that $g(x)$ vanishes on a Cantor set E with measure 0 defined as follows: Set $E = I_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, where $I_0 = [0,1]$, I_1 is an open interval with length $1/3$ whoes center is $1/2$. Here I_2 and I_3 are open intervals with length $(1/3)^2$ whoes centers coincide with the center of each conected component of $I_0 \setminus I_1$, respectively. Furthermore, $I_4,\dots,I_7$ are open intervals with lenghth $(1/3)^3$ whoes centers coincide with the center of each connected component of $I_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{3} I_j$, respectively. We define open intervals I_j in this manner, recursively. On each $I_j = (-a+b, a+b)$, $j \geq 1$, we set $g(x) = \exp\{(-1/|x+a-b|^{\delta})+(-1/|x-a-b|^{\delta})\}$ and we set $g(x) = \exp(-1/|x|^{\delta})$ and $\exp(-1/(|x-1|^{\delta})$ for $(-\infty,0)$ and $(1,\infty)$, respectively. If $0 < \delta < 1$ then $\hat{L}$ is hypoelliptic.

References.

[Fd] V.S. Fediĭ: On a criterion for hypoellipticity, Math. USSR Sb., 14 (1971), 15-45.

[Ff] C. Fefferman: The uncertainty principle, Bull. Amer. Math. Soc. 9 (1983), 129-206.

[F-P] C. Fefferman and D.H. Phong : The uncertainty principle and sharp Garding inequalities, Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981), 285-331.

[H_1] L. Hörmander: Linear Partial Differential Operators, Springer of Solutions of L.P.D.E., Princeton Univ. Press 1979 , 127-208.

[H_2] ________: Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math., 119 (1967), 147-171.

[Hs] T. Hoshiro: A property of operators characterized by iteration and a necessary condition for hypoellipticity, preprint in Kyoto Univ.

[K-S] S. Kusuoka and D. Strook: Applications of the Malliavin calculus, Part II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math., 32 (1985), 1-76.

[Me] G. Métivier: Proprieté des itéres et ellipticité, Comm. Partial Differential Equations 3 (1978), 827-876.

[M_1] Y. Morimoto: On the hypoellipticity for infinitely degenerate semi-elliptic operators, J. Math. Soc. Japan 30 (1978), 327-358.

[M_2] ________: Non-hypoellipticity for degenerate elliptic operators, Publ. RIMS Kyoto Univ., 22 (1986), 25-30.

[M_3] ________: On a criterion for hypoellipticity, Proc. Japan Acad., 62 A (1986), 137-140.

[M_4] ________: Hypoellipticity for infinitely degenerate elliptic operators, to appear in Osaka J. Math.

[M_5] ________: A criterion for hypoellipticity of second order differential operators, preprint.

[M_6] ________: Criteria for hypoellipticity of differential operators, Part II, preprint.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 1985 - 1986

NONLINEAR EFFECTIVELY HYPERBOLIC EQUATIONS

N. IWASAKI

Exposé n°XII

25 Février 1986

§ 0. INTRODUCTION :

We shall give some notes about the effective hyperbolicity. We think there are two ways to explain a notion. The first one is to find out an equivalent notion from a different point view. And the other one is to give some interesting examples of applications of the notion. For the first one, we have a proposition for single partial differential operators that to be effectively hyperbolic is equivalent to be strongly hyperbolic. The strong hyperbolicity means the stability of solvability (well posedness) of the Cauchy problem under changing lower terms. The effective hyperbolicity defined later is a geometrical notion on the principal symbols of partial differential operators. The sufficient part of the above proposition, that is, the Cauchy problem is well posed if it is effectively hyperbolic, is very important for applications and does not always require that partial differential operators are single and even linear. So, we may replace the effective hyperbolicity for the strict hyperbolicity used usually and frequently because the previous notion is wider than the later.

Many partial differential operators in applications are non linear. So, we have to extend the results in the linear cases to ones in the non linear cases in order to find out interesting examples. In the present stage, this extension is very easy because we know already a very famous abstract theorem, so called the Nash-Moser implicit function theorem.
Here, we explain that this theorem is also applicable to our cases. We shall remark we needed some minor change of expression of the Nash-Moser implicit function theorem in order to obtain a sharper result for the non linear Cauchy problem making it possible to apply directly to the Monge-Ampère equation.

§ I. RESULTS OF LINEAR CASES :

Let P_m be a polynomial of homogeneous order m in $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ with coefficients C^∞-functions in $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. We assume it is normal in ξ_o,

$$P_m = \xi_o^m + \dots .$$

Définition 1. We call P_m effectively hyperbolic (on an open set in x) if P_m is hyperbolic in ξ_o and if at the critical points of the characteristics

$\{P_m = \nabla P_m = 0\}$, the fundamental matrices F of P_m have non zero real eigenvalues, where the fundamental matrix F is defined by

$$F = \begin{pmatrix} P_{m_{\xi x}} , & P_{m_{\xi\xi}} \\ -P_{m_{xx}} , & -P_{m_{x\xi}} \end{pmatrix} , \quad P_{m_{\xi x}} = \partial_\xi \partial_x P_m \quad , \text{etc...}$$

Let us consider a system of partial differential operator P of order m with a diagonal principal part, namely,

$$P = P_m I + Q , \tag{1.1}$$

where the lower term $Q = (q_{ij})$ is a system such that order $q_{ij} \leqslant \alpha_i - \alpha_j + m-1$ with respect to a multi-index α of integers.

Theorem 1 . Let P_m in (1.1) be effectively hyperbolic on a neighborhood of the origin. Then, there exist a conic domain $\Omega = \{x;x_0 + \lambda|x'| < 0 , \lambda > 0\}$ and a constant $\varepsilon_0 > 0$ such that for all ε $(0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0)$, the Cauchy problem

$$\begin{cases} Pu = f & \text{on } \{x > 0\} \cap \Omega_\varepsilon \\ u = 0 & \text{on } \{x_0 \leqslant 0\} \cap \Omega_\varepsilon \end{cases} \tag{1.2}$$

has a unique C^∞-solution u on Ω_ε for any C^∞- datum f on Ω_ε supported on $\{x_0 \geqslant 0\}$, where $\Omega_\varepsilon = \Omega + (\varepsilon, 0, \ldots, 0)$. Moreover, for some suitably fixed ℓ , they satisfy the estimate for all $s \geqslant 0$

$$\|u\|_s \leq C_s (\|f\|_{s+\ell} + \|a\|_{s+\ell} \|f\|_\ell) , \tag{1.3}$$

where $\|\cdot\|_s$ is the Sobolev norms on Ω_ε and a stands for coefficients of the partial differential operator P . We should remark that the constants C_s are uniform on P belonging to a suitable neighborhood of a fixed effectively hyperbolic operator in the space of hyperbolic operators with the type (1.1) on a neighborhood of the origin.

When we usually call the Cauchy problem (1.2) well posed, we do not require the estimate (1.3), especially, the existence of the constant ℓ independent of s . However, almost all cases which we know wellposed, have the type (1.3) of estimates, and this is important to use the Nash-Moser implicit function theorem. So, we introduce a notation for convenience.

Let us consider the problem (1.2) for a set $\mathcal{P}$ of general system P of partial differential operators.

Definition 2. We call a set $\mathcal{P}$ strongly wellposed if the conclusion of Theorem 1 holds for any element P of $\mathcal{P}$, especially, if ε_0, Ω and constants C_s, ℓ of the estimate (1.3) are common on $\mathcal{P}$.

Remark. Let P be a $r \times r$ system of partial differential operators. Define the principal symbol P_{pr} as usual. Assume that det P_{pr} is effectively hyperbolic. This is reduced to Theorem 1 so that it is strongly wellposed.

§ II. NONLINEAR CASES :

We consider a nonlinear system ;

$$(2.1) \qquad \begin{aligned} Pu &= (P_i)_{i=1,\dots,r} \\ P_i &= P_i(x,\eta_{j\alpha};|\alpha|\leq\bar{\alpha}_i - \bar{\beta}_j\ ,\ j=1,\dots,r)\Big|_{\eta_{j\alpha}=\partial^\alpha u_j} \\ &= P_i(x,\partial^\alpha u)\ , \\ u &= (u_1,\dots,u_r)\ , \end{aligned}$$

where $\bar{\alpha}$ and $\bar{\beta}$ are multi-indices of integers.
The linearization DP of this system is given by

$$DP\ \varphi = (\sum_{j,\beta} \frac{\partial}{\partial\eta_{j\beta}} P_i(x,\partial^\alpha u)\partial^\beta\varphi_j)_{i=1,\dots,r}$$

and the principal symbol $P_{pr} = (P_{ij})$

$$P_{ij} = \sum_{\beta;\,|\beta|=\bar{\alpha}_i-\bar{\beta}_j} \frac{\partial}{\partial\eta_{j\beta}} P_i(x,\partial^\alpha u)\xi^\beta\ .$$

Now we extend the strong well posedness to this type of system.

Definition 3. We call a nonlinear system P (2.1) strongly wellposed if there exist two linear system Q and R satisfying the following conditions ;

1) Coefficients of Q and R are also functions of (x,η_β) and $(x,\eta_\beta,\zeta_\beta)$, respectively, where we put the unknown function $\partial^\beta u$ in η_β and the parameter function $\partial^\beta h$ in ζ_β.

2) The linearization DP are decomposed as

$$DP = Q + R \quad \text{with } h = Pu\ .$$

3) There exists a neighborhood U of $u = 0$ in $C^\infty \cap \{u;\ u=0 \text{ at } x_0 < 0\}$

such that $\{Q;\ u \in U\}$ is strongly wellposed in the sense of Definition 2.

4) $R \equiv 0$ at $h \equiv 0$.

We shall later explain by an example the reason why we do not define simply as {DP} are strongly well posed. Roughly speaking, we assume the existence of a parametrix of DP toward $Pu = 0$. Under this assumption we can conclude the following unique extension theorem of a solution.

Theorem 2. Let a nonlinear operator P(2.1) be strongly wellposed. If there exists a neighborhood Ω_o of the origin such that $u = 0$ is a solution of $Pu = 0$ at $\{x_o < 0\} \cap \Omega_o$, then there exists uniquely a C^∞ solution u of $Pu = 0$ on a neighborhood Ω of the origin such that $u = 0$ on $\{x_o < 0\} \cap \Omega$.

Corollary 3 . We assume that the principal symbol P_{pr} of P (2.1) are decomposable as well as Definition 3 such that

$$P_{pr} = Q_o + R_o \quad \text{with} \quad h = Pu \quad ,$$

where Q_o and R_o satisfy the conditions for Q and R in 1) and 4) of Definition 3 , respectively, and where Q_o is one of the type of effectively hyperbolic operators treated in Theorem 1 or uniformly reducible to one of this type for example, det Q_o is effectively hyperbolic, for all u of U in 3).
Then, the conclusion of Theorem 2 holds.
This Theorem 2 is no more than a translation from the abstract Nash-Moser's theorem into the category of the Cauchy problem. However, it requires the improvement of expression of the Nash-Moser's theorem, because we assume a weaker condition than as usual, namely, we assume the existence of parametrices of the linearization DP instead of the existence of exact inverses.

We follow the expression of the Nash-Moser's theorem by L. Hörmander [1] . $\{H^s\}_{s \geq 0}$ is a Banach scale, in other words, interpolation spaces by means of a smoothing operator.

Let $\Phi(u)$ be a nonlinear operator on $H^\infty = \bigcap_s H^s$. Assume the existence of the first and second derivatives in u and their estimates as similar as (2.2). The different point is to assume that the right (left, resp.) parametrix ψ of the first derivative $D\Phi$ exists on a neighborhood of the origin of (u,Φ) such that

$$D\Phi\cdot\psi(\psi D\Phi,\ \text{resp.}) = I + \Theta \quad ,$$

where Θ depends on u and Φ , and satisfies

(2.2) $$\| \Theta\varphi \|_s \leq C_s [(1+\| u\|_s) \| \Phi\|_m \|\varphi\|_m + (1+\| u \|_m) (\| \Phi\|_{s+m} \|\varphi\|_m + \| \Phi\|_m \|\varphi\|_{s+m})]$$

for a fixed m and for all s.

Then, there exist neighborhood V, W of $u = 0$ and $\Phi = 0$ such that

$$\Phi(V) \cap W = \emptyset \quad \text{or} \quad \Phi(V) \ni 0$$
$$(\Phi(0) = 0 \Rightarrow \Phi^{-1}(0) \cap V = \{0\}, \text{ resp.}).$$

Therefore we can conclude the existence and the uniqueness only for $\Phi(u) = 0$. In the proof, we need only an addition of the error terms in the argument of the existence of Θ, which is estimated as well as other error terms are. If considering the scale basing on the Sobolev spaces or the Hölder spaces of functions on Ω_ε supported on $\{x_0 \geq 0\}$, then the strong wellposedness assures the existence of the right and left parametrix ψ. The non essential cases will be excluded since the norm $\| \Phi(0)\|_s$ on Ω_ε tends to 0 as ε tends to 0.

§ III. AN EXAMPLE :

The Monge-Ampère equation

$$u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 = f(x,y)$$

is elliptic if $f > 0$, strictly hyperbolic if $f < 0$ and of Tricomi type if $\nabla f \neq 0$ at the points $f = 0$ and if it is kowalevskian. They are very classical and well known. So we treat more singular cases. Since we are treating the Cauchy problems, we consider the case where $f \leq 0$. In this case, the equation is hyperbolic if it is kowalevskian. More generally, we consider

$$\Phi = \det A - f = 0 ,$$

where $A = \partial^2 u + C(x,u,\partial u)$, C is a symmetric matrix and f is also a function in $(x,u,\partial u)$. A typical example is the Gauss curvature $K(x)$ of a hypersurface $\{y = u(x)\}$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$\det(\partial^2 u) = K(x) \; (1+|\partial u|^2)^{(n+2)/2} .$$

Now, we prepare some notation to state the result.

w.r.t. $A_{ij} = (a_{k\ell})_{k,\ell \neq i,j}$ = minor matrix w.r.t. a_{ij}.

$A^{co} = (a_{ij}^{co}) \quad a_{ij}^{co} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$: cofactor matrix .

The equation is

$$(3.1) \qquad \begin{cases} \Phi = \det A - f = 0 \\ \text{the initial condition at } x_o = 0 . \end{cases}$$

If we take the Fréchet derivative in u , then

$$D\Phi\varphi = \mathrm{Tr}(A^{co}\partial^2\varphi) + \text{lower term}$$
$$= A^{co}(\partial)\,\varphi + \dots .$$

We assume the following (3.2-4).

(3.2) $f \leqslant 0$ always.

(3.3) $A_{oo}(u)\big|_{x_o = 0} > 0$.

(3.4) $L^2 f(x,u,\partial u) < 0$ at $\{f = 0\} \cap \{x_o = 0\}$, where L is a vector field defined by

$$L = \sum_{j=o}^{n} a^{co}_{o_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) .$$

<u>Theorem 4</u>. Let $\tilde{u}$ be a formal solution of (3.1) at $x_o = 0$ and satisfy (3.2-4) on a neighborhood of $x = 0$. Then there exists a unique C^∞ solution u of $\Phi(u) = 0$ on a neighborhood of $x = 0$ such that $u - \tilde{u}$ is flat at $x_o = 0$ $(\partial^\alpha(u-\tilde{u})\big|_{x_o=o} = 0, \forall\alpha)$.

<u>Example</u>. $u = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}y^4$.

$$\Phi(u) = u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 + y^2 = 0 ,$$
$$D\Phi(u)\varphi = \partial_y^2\varphi - y^2\partial_x^2\varphi ,$$
$$f = -y^2 \text{ and } L = \frac{\partial}{\partial y} .$$

In fact, let us put eigenvalues and eigenprojections of A^{co} by θ_j and p_j $(i = 0,\dots,n)$, and λ_j are eigenvalues of A. Then $\theta_j = \pi_{k\neq j}\lambda_k$ and eigen spaces of θ_j and λ_j are the same, so their projection is p_j . The assumption (3.3) gives us the existence of n positive eigenvalues, so we denote them by $\lambda_j > 0$ $(j = 1,\dots,n)$.

Since $\det A = \lambda_o \cdots \lambda_n = f \leqslant 0$ at $u = \tilde{u}$ and $x_o = 0$, so $\lambda_o \leqslant 0$, there. Hence λ_o his near non positive axis if u is near $\tilde{u}$, that is, remainding eigenvalue λ_o is separated from the others λ_j $(j \geqslant 1)$.

Therefore $\theta_o = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ and P_o are defined smoothly. So A^{co} is written as

$$A^{co} = \Sigma_{j=o}^{n} \theta_j P_j = \lambda_1 \cdots \lambda_n P_o + \cdots + \lambda_o \cdots \lambda_{n-1} P_n$$

$$= \theta_o P_o + \lambda_o \cdots \lambda_n (\Sigma_{j=1}^{n} \lambda_j^{-1} P_j)$$

$$= \theta_o P_o + (\det A)\, E$$

$$= \theta_o P_o + f\, E + \Phi\, E \ , \ E = \Sigma_{j=1}^{n} \lambda_j^{-1} P_j \ .$$

Then we can decompose

$$A^{co}(\partial) = Q_o(\partial) + R_o(\partial)$$

as

$$Q_o(\partial) = \theta_o P_o(\partial) + f\, E(\partial)$$

and

$$R_o(\partial) = \Phi . E(\partial).$$

Here $Q_o(\partial) \sim L^2 + f$. (an elliptic operator with respect to the transversal directions to L).

Since $f < 0$, and $L^2 f \neq 0$ at $f = 0$, so Q_o is effectively hyperbolic. And also $R_o(\partial) = 0$ at $\Phi = 0$. Therefore $A^{co}(\partial)$ satisfies the conditions of Corollary 3. Using some speciality of the Monge-Ampère equation, we conclude the existence theorem from the unique extension theorem.

Other examples of effectively hyperbolic operators will be found in N. Iwasaki [2] , where you can see the further informations about this note.

BIBLIOGRAPHY :

[1] L. Hörmander, The boundary problems of physical geodesy, Arch. Rat. Mech. Anal., 62 (1976), 1-52.

[2] N. Iwasaki, The strongly hyperbolic equation and its applications, to appear in Pattern and Wave (Studies math. appl.) North-Holland Publishing Company, 1986.

***