

分解されたメビウス・エネルギーの
上界・下界と連続度評価

(Upper and lower bounds and modulus of continuity of
decomposed Möbius energies)

(石関 彩との共同研究に基づく)

— 久保田 幸次 先生を偲んで —

長澤 壯之

埼玉大学大学院理工学研究科

2020年8月19日 第45回偏微分方程式札幌シンポジウム

§ 1. Möbius エネルギーと Kusner-Sullivan 予想

- ▶ 結び目: \mathbb{R}^3 に埋め込まれた閉曲線
- ▶ 与えられた結び目型における「標準形」は？

何を以って「標準」とするか?... エネルギー最小元

- ▶ エネルギーの最小元で「標準形」とする (幾何学的最適化問題)
(Fukuhara, “Energy of a knot”, in “A fête of Topology”, Academic Press, 1988)
- ▶ エネルギーの設計: O’Hara [23], *Topology* **30** (1991)

§ 1. Möbius エネルギーと Kusner-Sullivan 予想

$f: \mathbb{R}/\mathcal{L}\mathbb{Z} \ni s \mapsto f(s) \in \mathbb{R}^n$: 閉曲線 (s : 弧長パラメータ)

$\mathcal{D}(f(s_1), f(s_2))$

= 「 $f(s_1)$ と $f(s_2)$ の曲線に沿った距離 (内在的距離)」

$$\mathcal{E}(f) = \iint_{(\mathbb{R}/\mathcal{L}\mathbb{Z})^2} \left(\frac{1}{\|f(s_1) - f(s_2)\|_{\mathbb{R}^n}^2} - \frac{1}{\mathcal{D}(f(s_1), f(s_2))^2} \right) ds_1 ds_2$$

— Möbius エネルギー (O'Hara [23]) —

問題 1 (O'Hara [23], *Topology* **30** (1991))

与えられた結び目内で *Möbius* エネルギーを最小化するものが存在するか？

§ 1. Möbius エネルギーと Kusner-Sullivan 予想

スケール変換だけでなく Möbius 変換で不変

定理 1 (Freedman-He-Wang [9], *Ann. of Math.* **139** (1994))

T : Möbius 変換

$$Tf \cap \{\infty\} = \emptyset \implies \mathcal{E}(Tf) = \mathcal{E}(f)$$

$$Tf \cap \{\infty\} \neq \emptyset \implies \mathcal{E}(Tf) = \mathcal{E}(f) + 4$$

注意 1

Möbius 変換 ...

合同変換、相似変換、球面に関する反転、及びそれらの合成

§ 1. Möbius エネルギー

定義 1

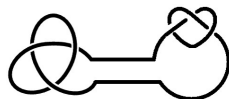
$n = 3$.

合成結び目: 2 つの非自明な結び目の連結和で書ける。

素結び目: 合成結び目または自明でない結び目



素結び目

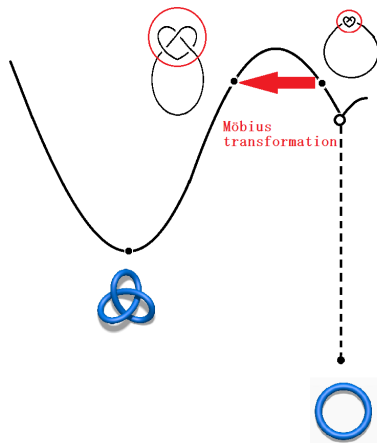


合成結び目

§ 1. Möbius エネルギーと Kusner-Sullivan 予想

定理 2 (Freedman-He-Wang [9], *Ann. of Math.* 139 (1994))

自明な結び目型と素結び目型に \mathcal{E} の最小元が存在



§ 1. Möbius エネルギーと Kusner-Sullivan 予想

予想 1 (Kusner-Sullivan 予想 [22] (World Scientific, 1998))

$n = 3$.

1. 合成結び目型には最小元は存在しないだろう。
2. $[K]$: 結び目型

$$\mathcal{E}([K]) = \inf_{f \in [K]} \mathcal{E}(f) - 4.$$

$f \in [K]$: 合成結び目、 $f = f_1 \# f_2$, $f_i \in [K_i]$

$$\mathcal{E}([K]) = \mathcal{E}([K_1]) + \mathcal{E}([K_2]).$$

§ 1. Möbius エネルギーと Kusner-Sullivan 予想

最小化列の方法・勾配流の方法が機能しない。

▶ $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$: 最小化列 $\implies \mathcal{E}(f_n) \leq \mathcal{E}(f_1)$

▶ $f(t)$: 勾配流 $\implies \mathcal{E}(f(t)) \leq \mathcal{E}(f(0))$

→ Sobolev-Slobodeckij 空間 $W^{3/2,2}(\mathbb{R}/\mathcal{L}\mathbb{Z})$ における弱収束部分列が存在

→ 弱極限が最小化列 (勾配流) と同じ結び目型に属するか？

一般にはダメ

エネルギーの有界性だけでは結び目型は制御出来ない。

§ 2. Möbius 不変分解

Möbius エネルギーは、Möbius を保ったまま分解できる。

定理 3 (Ishizeki-N. [13], *Kodai Math. J.* **37** (2014),
[15], *J. Knot Theory Ramifications* **26** (2016))

$\mathcal{E}(f) < \infty$ とする。 $\tau = f'$: 単位接ベクトル、 $\Delta v = v(s_1) - v(s_2)$

$$\mathcal{E}(f) = \mathcal{E}_1(f) + \mathcal{E}_2(f) + 4,$$

$$\mathcal{E}_i(f) = \iint_{(\mathbb{R}/\mathbb{L}\mathbb{Z})^2} \mathcal{M}_i(f) ds_1 ds_2,$$

$$\mathcal{M}_1(f) = \frac{\|\Delta\tau\|_{\mathbb{R}^n}^2}{2\|\Delta f\|_{\mathbb{R}^n}^2},$$

$$\mathcal{M}_2(f) = \frac{2}{\|\Delta f\|_{\mathbb{R}^n}^2} \left\langle \tau(s_1) \wedge \frac{\Delta f}{\|\Delta f\|_{\mathbb{R}^n}}, \tau(s_2) \wedge \frac{\Delta f}{\|\Delta f\|_{\mathbb{R}^n}} \right\rangle_{\wedge^2 \mathbb{R}^n}$$

各 \mathcal{M}_i は絶対可積分、各 \mathcal{E}_i は Möbius 不変

§ 2. Möbius 不変分解

絶対可積分性 \leadsto 様々な解析的道具が使える。

\leadsto 変分公式とその評価

- ▶ Ishizeki-N. [14], *Math. Ann.* **363** (2015)
- ▶ Ishizeki-N. [16], *Calc. Var. Partial Differential Equations* **55** (2016)

§ 2. Möbius 不変分解

幾何学的には

- ▶ \mathcal{E}_1 : 曲線の **曲がり具合** を計測

$$\frac{\|\Delta\tau\|_{\mathbb{R}^n}^2}{\|\Delta f\|_{\mathbb{R}^n}^2} \sim \|\kappa\|_{\mathbb{R}^n}^2 \quad (\kappa : \text{曲率ベクトル})$$

- ▶ \mathcal{E}_2 : 曲線の **振じれ具合** を計測

$$\begin{aligned} & \left\langle \tau(s_1) \wedge \frac{\Delta f}{\Delta s}, \tau(s_2) \wedge \frac{\Delta f}{\Delta s} \right\rangle_{\wedge^2 \mathbb{R}^n} \\ &= \left\langle \left(\tau(s_1) - \frac{\Delta f}{\Delta s} \right) \wedge \frac{\Delta f}{\Delta s}, \left(\tau(s_2) - \frac{\Delta f}{\Delta s} \right) \wedge \frac{\Delta f}{\Delta s} \right\rangle_{\wedge^2 \mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

$$\tau(s_i) - \frac{\Delta f}{\Delta s} \sim \kappa(s_i)(\Delta s)$$

$$\left(\tau(s_i) - \frac{\Delta f}{\Delta s} \right) \wedge \frac{\Delta f}{\Delta s} \text{ の方向} \sim \text{従法線方向}$$

異なる 2 点の従法線方向の内積 \sim 振じれ具合

§ 2. Möbius 不変分解

注意 2

\mathcal{E}_2 : O'Hara-Solanes エネルギー

(O'Hara-Solanes [26], *Tôhoku Math. J. (2)* **67** (2015)) と同値

注意 3

より一般の O'Hara エネルギーの分解については

Ishizeki-N. [17] (to appear in *Math. Z.*)

§ 2. Möbius 不変分解

問 1

- ▶ 分解エネルギーの幾何学的性質を用いて、結び目型の制御が出来ないか？
- ▶ 元のエネルギーの有界性は、分解エネルギーの有界性を導くか？
- ▶ 分解エネルギー「を」制御するものは何か？
- ▶ 分解エネルギー「が」制御するものは何か？

§ 3. 分解の第二エネルギーは本当に捩じれ具合と関連するの？

これ以後の結果は、Ishizeki-N. [18] (*J. Geom. Anal.* 2020) による。

Gromov [10,11] の distortion (捩じれ) :
$$\sup_{\substack{(s_1, s_2) \in (\mathbb{R}/\mathcal{L}\mathbb{Z})^2 \\ s_1 \neq s_2}} \frac{|\Delta s|}{\|\Delta \mathbf{f}\|_{\mathbb{R}^n}}$$

Fact 1 (O'Hara [24], *Topology Appl.* **48** (1992),
Blatt [2], *J. Knot Theory Ramifications* **21** (2012))

$$\mathcal{E}(\mathbf{f}) < \infty \quad \implies \quad \sup_{\substack{(s_1, s_2) \in (\mathbb{R}/\mathcal{L}\mathbb{Z})^2 \\ s_1 \neq s_2}} \frac{|\Delta s|}{\|\Delta \mathbf{f}\|_{\mathbb{R}^n}} < \infty$$

ここで用いるのは

$$X(s_1, s_2) := \log \frac{|\Delta s|^2}{\|\Delta \mathbf{f}\|_{\mathbb{R}^n}^2}$$

§ 3. 分解の第二エネルギーは本当に捩じれ具合と関連するの？

命題 1

分解の第二エネルギー \mathcal{E}_2 の密度 \mathcal{M}_2 は次の表示を持つ。

$0 < |s_1 - s_2| < \frac{\mathcal{L}}{2}$ において、

$$\mathcal{M}_2(f) = \frac{\partial^2 X}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial X}{\partial s_1} \frac{\partial X}{\partial s_2} - \frac{1}{\Delta s} \left(\frac{\partial X}{\partial s_1} - \frac{\partial X}{\partial s_2} \right)$$

ここで $\Delta s = s_1 - s_2$

この表示より何が分かるか？

§ 3. 分解の第二エネルギーは本当に捩じれ具合と関連するの？

- ▶ 分解エネルギーの上下限評価 (§ 4)
- ▶ 分解エネルギーの連続度評価 (§ 5)
- ▶ 分解エネルギーの Möbius 不変性再訪 (§ 6)

§ 4. 分解エネルギーの上下界評価

動機. Möbius エネルギーの最小化列 (勾配流) が同じ結び目型において収束するか否かを考えるために、分解エネルギー値を追跡したい。エネルギー値 \mathcal{E} は初期のもので押されられる。しかし、分解エネルギーはそうとは限らない。分解エネルギー値を分解前のエネルギー値と X を用いて評価する。

§ 4. 分解エネルギーの上下界評価

定理 4 ([18] + Blatt [3], *J. Geom. Anal.* **29** (2019))

$\mathcal{E}(f) < \infty$ とし、 $\mathcal{E}_0(f) = \mathcal{E}(f) - 4$ とする。

$$\begin{aligned} 2\pi^2 &\leq \mathcal{E}_1(f) \leq (3 + \|X\|_{L^\infty}) \mathcal{E}_0(f) + 4(4 + \|X\|_{L^\infty}), \\ &- (2 + \|X\|_{L^\infty}) \mathcal{E}_0(f) - 4(4 + \|X\|_{L^\infty}) \\ &\leq \mathcal{E}_2(f) \leq \min \{ \|X\|_{L^\infty} (\mathcal{E}_0(f) + 4) - 8, \mathcal{E}_0(f) \} \end{aligned}$$

§ 5. 分解エネルギーの連続度評価

動機. Möbius エネルギーの最小化列 (勾配流) が異なる結び目型において収束する場合、エネルギー・ギャップが生じると思われる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}(f_n) \neq \mathcal{E}(f_\infty)$$

～

$$|\mathcal{E}(f_n) - \mathcal{E}(f_\infty)|$$

を測りたい。

§ 5. 分解エネルギーの連続度評価

定理 5

f と \tilde{f} は全長が同じものとし、 $\mathcal{E}(f) < \infty$, $\mathcal{E}(\tilde{f}) < \infty$ とする。 $a \in \mathbb{R}/\mathcal{LZ}$ に対し、 $\tilde{f}_a(\cdot) = \tilde{f}(\cdot + a)$, $\tilde{X}_a = \log \frac{(\Delta s)^2}{\|\Delta \tilde{f}_a\|_{\mathbb{R}^n}^2}$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned}
 & \left| \mathcal{E}_1(f) - \mathcal{E}_1(\tilde{f}) \right| \\
 & \leq \left| \mathcal{E}_0(f) - \mathcal{E}_0(\tilde{f}) \right| \\
 & \quad + 2 \inf_{a \in \mathbb{R}/\mathcal{LZ}} \left\{ \|X - \tilde{X}_a\|_{L^\infty} (\mathcal{E}_0(f) + \mathcal{E}_0(\tilde{f}) + 4) + \left| \iint_{(\mathbb{R}/\mathcal{LZ})^2} \frac{X - \tilde{X}_a}{(\Delta s)^2} ds_1 ds_2 \right| \right\}, \\
 & \left| \mathcal{E}_2(f) - \mathcal{E}_2(f_0) \right| \\
 & \leq 2 \inf_{a \in \mathbb{R}/\mathcal{LZ}} \left\{ \|X - \tilde{X}_a\|_{L^\infty} (\mathcal{E}_0(f) + \mathcal{E}_0(\tilde{f}) + 4) + \left| \iint_{(\mathbb{R}/\mathcal{LZ})^2} \frac{X - \tilde{X}_a}{(\Delta s)^2} ds_1 ds_2 \right| \right\}
 \end{aligned}$$

§ 6. 分解エネルギーの Möbius 不変性再訪

動機. 2つの閉曲線が Möbius 変換で写り合うとき、分解エネルギーは等しい。

2つの閉曲線の分解エネルギー差を「Möbius 変換で写り合うとき消える量」で評価したい。

§ 6. 分解エネルギーの Möbius 不変性再訪

Möbius 変換で不変なものとして 複比 $\frac{\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|_{\mathbb{R}^n} \|\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3\|_{\mathbb{R}^n} \|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4\|_{\mathbb{R}^n}}$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{f}(\theta_1 + \delta\theta), \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{f}(\theta_1), \quad \mathbf{p}_3 = \mathbf{f}(\theta_2 + \delta\theta), \quad \mathbf{p}_4 = \mathbf{f}(\theta_2)$$

とし、 $\delta\theta^2$ で割って $\delta\theta \rightarrow 0$

$$\leadsto \mathcal{C}(\mathbf{f})(\theta_1, \theta_2) = \frac{\|\dot{\mathbf{f}}(\theta_1)\|_{\mathbb{R}^n} \|\dot{\mathbf{f}}(\theta_2)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\Delta \mathbf{f}\|_{\mathbb{R}^n}^2} : \text{Möbius 不変量}$$

§ 6. 分解エネルギーの Möbius 不変性再訪

定理 6

f, \tilde{f} は長さが同一で、 $\|\dot{f}\|_{\mathbb{R}^n} \equiv \|\dot{\tilde{f}}\|_{\mathbb{R}^n}$ となるようにパラメトライズされているとする。更に、 $\mathcal{E}(f) < \infty, \mathcal{E}(\tilde{f}) < \infty, \|\dot{f}\|_{\mathbb{R}^n} \in C^{0,1}, \|\dot{\tilde{f}}\|_{\mathbb{R}^n} \in C^{0,1}$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_1(f) - \mathcal{E}_1(\tilde{f}) \\ &= \iint_{(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2} \left\{ \mathcal{C}(f) - \mathcal{C}(\tilde{f}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} (\log \mathcal{C}(f) - \log \mathcal{C}(\tilde{f})) \right\} d\theta_1 d\theta_2 \\ &+ \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \iint_{|\theta_1 - \theta_2| \geq \epsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_1} (\log \mathcal{C}(f) - \log \mathcal{C}(\tilde{f})) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_2} (\log \mathcal{C}(f) + \log \mathcal{C}(\tilde{f})) \right\} d\theta_1 d\theta_2 \\ & \mathcal{E}_2(f) - \mathcal{E}_2(\tilde{f}) \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \iint_{|\theta_1 - \theta_2| \geq \epsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_1} (\log \mathcal{C}(f) - \log \mathcal{C}(\tilde{f})) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_2} (\log \mathcal{C}(f) + \log \mathcal{C}(\tilde{f})) \right\} d\theta_1 d\theta_2 \end{aligned}$$

§ 6. 分解エネルギーの Möbius 不変性再訪

注意 4

1. 定理 6 において、 $\|\dot{f}\|_{\mathbb{R}^n}$, $\|\ddot{f}\|_{\mathbb{R}^n}$ の仮定を外したい。
→ 分解エネルギーの Möbius 不変性の別証明
2. 形式に部分積分を実行
→ $\|\dot{f}\|_{\mathbb{R}^n}$, $\|\ddot{f}\|_{\mathbb{R}^n}$ の微分を必要としない表示
3. その表示による積分が収束しそうにない。

§ 6. 分解エネルギーの Möbius 不変性再訪

形式的な部分積分の結果

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_2(f) - \mathcal{E}_2(\tilde{f}) \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \left[(\log \mathcal{L}(f) - \log \mathcal{L}(\tilde{f})) \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_2} (\log \mathcal{L}(f) + \log \mathcal{L}(\tilde{f})) \right\} \right]_{s_1=s_2+\epsilon}^{s_1=s_2+1-\epsilon} ds_2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \iint_{|\theta_1 - \theta_2| \geq \epsilon} (\log \mathcal{L}(f) - \log \mathcal{L}(\tilde{f})) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} (\log \|\Delta f\|^2 + \log \|\Delta \tilde{f}\|^2) \right\} d\theta_1 d\theta_2 \right]. \end{aligned}$$

§ 6. 分解エネルギーの Möbius 不変性再訪

$$\iint_{|\theta_1 - \theta_2| \geq \epsilon} \mathcal{A}(\theta_1, \theta_2) ds_1 ds_2 + \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \mathcal{B}_\epsilon(\theta_2) d\theta_2 = 0$$

であって、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \left(\left[(\log \mathcal{L}(f) - \log \mathcal{L}(\tilde{f})) \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_2} (\log \mathcal{L}(f) + \log \mathcal{L}(\tilde{f})) \right\} \right]_{s_1=s_2+\epsilon}^{s_1=s_2+1-\epsilon} - \mathcal{B}_\epsilon \right) d\theta_2,$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \iint_{|\theta_1 - \theta_2| \geq \epsilon} \left[(\log \mathcal{L}(f) - \log \mathcal{L}(\tilde{f})) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} (\log \|\Delta f\|^2 + \log \|\Delta \tilde{f}\|^2) \right\} - \mathcal{A} \right] d\theta_1 d\theta_2$$

が共に収束するような補正項 \mathcal{A} , \mathcal{B}_ϵ が存在するか？

§ 7. 今後の展望

命題 1 (再掲)

分解の第二エネルギー ε_2 の密度 \mathcal{M}_2 は次の表示を持つ。

$0 < |s_1 - s_2| < \frac{\mathcal{L}}{2}$ において、

$$\mathcal{M}_2(f) = \frac{\partial^2 X}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial X}{\partial s_1} \frac{\partial X}{\partial s_2} - \frac{1}{\Delta s} \left(\frac{\partial X}{\partial s_1} - \frac{\partial X}{\partial s_2} \right)$$

ここで $\Delta s = s_1 - s_2$

2つの感触

- ▶ Kusner-Sullivan 予想への手がかり
- ▶ 命題に内在する情報を十分に生かしていない。

§ 7. 今後の展望

X : スケール不変だが Möbius 不変でない。

… 命題が本来あるべき形に達していない？

Blatt-Ishizeki-N. [5] の手法が使えないか？

$$\mathcal{E}_2(f) = \iint_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \mathcal{M}_2(f) \|\dot{f}(\theta_1)\|_{\mathbb{R}^n} \|\dot{f}(\theta_2)\|_{\mathbb{R}^n} d\theta_1 d\theta_2$$

について

$\mathcal{E}_2(f)$: Möbius 不変, $\mathcal{M}_2(f) \|\dot{f}(\theta_1)\|_{\mathbb{R}^n} \|\dot{f}(\theta_2)\|_{\mathbb{R}^n}$: Möbius 不変でない。

§ 7. 今後の展望

定理 7 (Blatt-Ishizeki-N. [5], arXiv1904.06818)

$\exists \widetilde{\mathcal{M}}_2$ s.t.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2(\mathbf{f}) &= \iint_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \widetilde{\mathcal{M}}_2(\mathbf{f}) \|\dot{\mathbf{f}}(\theta_1)\|_{\mathbb{R}^n} \|\dot{\mathbf{f}}(\theta_2)\|_{\mathbb{R}^n} d\theta_1 d\theta_2 \\ \iint_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} (\mathcal{M}_2(\mathbf{f}) - \widetilde{\mathcal{M}}_2(\mathbf{f})) \|\dot{\mathbf{f}}(\theta_1)\|_{\mathbb{R}^n} \|\dot{\mathbf{f}}(\theta_2)\|_{\mathbb{R}^n} d\theta_1 d\theta_2 &= 0 \\ \widetilde{\mathcal{M}}_2(\mathbf{f}) \|\dot{\mathbf{f}}(\theta_1)\|_{\mathbb{R}^n} \|\dot{\mathbf{f}}(\theta_2)\|_{\mathbb{R}^n} &: \text{Möbius 不変} \end{aligned}$$

御静聴ありがとうございました。