第45回偏微分方程式論札幌シンポジウム　ー久保田幸次先生を追悼してー
2020年8月17日–19日，北海道大学(Web会議)

Nonlinear diffusion equation with dynamic boundary conditions and related topics

深尾　武史　(京都教育大学)

本研究は科研費(課題番号:17K05321)および，公益財団法人　住友財団　基礎科学研究助成（No.190367）の助成を受けたものである.

1．講演の概要

- 動的境界条件下での非線形拡散方程式
- Cahn–Hilliard 型の方程式ならびに動的境界条件(GMS)
- (GMS)から非線形拡散方程式への接近
- Fast diffusion 方程式と有限時刻消滅
- まとめと今後の課題

2. 動的境界条件下での非線形拡散方程式

- 非線形拡散方程式 $0 < T < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, 有界領域でその境界 Γ は十分滑らか.

$$\partial_t u - \Delta \beta(u) = g \quad \text{in } Q := (0,T) \times \Omega.$$

ここで, β は原点を通る単調なグラフとする.

- 境界条件 $\Sigma := (0,T) \times \Gamma$ 上での補助条件として:

$$\begin{aligned} \beta(u) &= g_\Gamma \quad && \text{(Dirichlet)}; \\ \partial_{\boldsymbol{\nu}} \beta(u) &= g_\Gamma \quad && \text{(Neumann)}; \\ \partial_{\boldsymbol{\nu}} \beta(u) + \beta(u) &= g_\Gamma \quad && \text{(Robin)}. \end{aligned}$$

境界条件に時間微分を含むものをここでは動的 (dynamic) 境界条件と呼ぶ:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_{\boldsymbol{\nu}} \beta(u) &= g_\Gamma; \\ \bigl(\Delta \beta(u)\bigr)_{|\Gamma} + \partial_{\boldsymbol{\nu}} \beta(u) &= g_\Gamma \ \text{(Wentzell (Ventcel'))}; \\ \partial_t u + \partial_{\boldsymbol{\nu}} \beta(u) - \Delta_\Gamma \beta(u) &= g_\Gamma \ \text{(generalized Wentzell)}. \end{aligned}$$

領域内部の主たる方程式を解くための補助条件から... 境界上の別の系との連立へ.

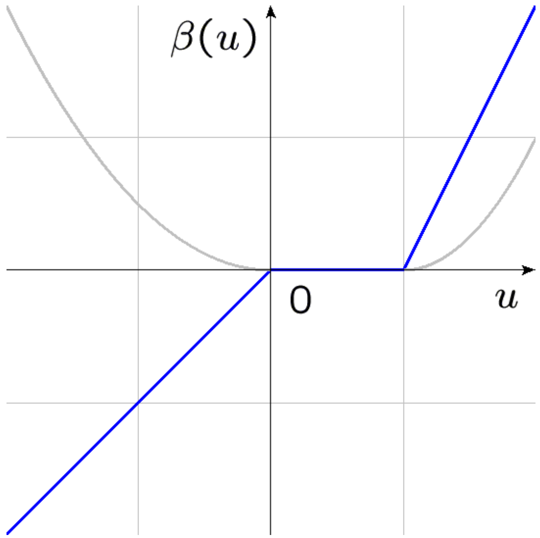
- 動的的境界条件下でのStefan問題

$0 < T < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

$$
\begin{gathered}
\partial_t u - \Delta \beta(u) = g \quad \text{in } Q, \\
u_{|_\Gamma} = u_\Gamma, \quad \partial_t u_\Gamma + \partial_{\boldsymbol{\nu}} \beta(u) - \Delta_\Gamma \beta(u_\Gamma) = g_\Gamma \quad \text{on } \Sigma, \\
u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \quad u_\Gamma(0) = u_{\Gamma,0} \quad \text{on } \Gamma.
\end{gathered}
$$

$\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は次で定義される区分的に線形な関数

$$
\beta(r) = \begin{cases} k_s r & \text{if } r < 0, \\ 0 & \text{if } 0 \le r \le \ell, \\ k_\ell (r - \ell) & \text{if } r > \ell, \end{cases}
$$



k_s, k_ℓ, ℓ は正定数,

g, g_Γ, u_0, $u_{\Gamma,0}$ は与えられた関数.

ある定数 c_1, $c_2 > 0$ が存在して $\hat{\beta}(r) \ge c_1 |r|^2 - c_2 \ (^\forall r \in \mathbb{R})$.

ここで, $\hat{\beta}$ は β の原始関数を意味する.

- 動的的境界条件下での多孔質媒体方程式

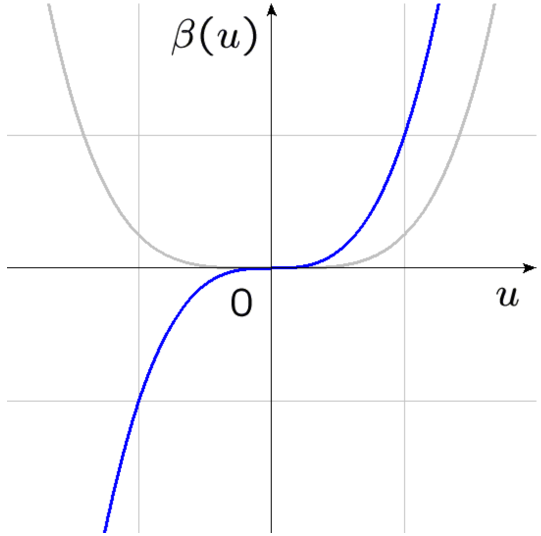
$0 < T < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. $m > 1$.

$$\partial_t u - \Delta |u|^{m-1} u = g \quad \text{in } Q,$$
$$u_{|_\Gamma} = u_\Gamma, \quad \partial_t u_\Gamma + \partial_{\boldsymbol{\nu}} |u|^{m-1} u - \Delta_\Gamma |u_\Gamma|^{m-1} u_\Gamma = g_\Gamma \quad \text{on } \Sigma,$$
$$u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \quad u_\Gamma(0) = u_{\Gamma,0} \quad \text{on } \Gamma.$$

$\beta \in C(\mathbb{R})$ は原点を通り単調増加.

$$\beta(r) = |r|^{m-1} r,$$
$$\widehat{\beta}(r) = \frac{1}{m+1} |r|^{m+1} \quad ({}^\forall r \in \mathbb{R}).$$

$\widehat{\beta}$ は β の原始関数.



ある定数 c_1, $c_2 > 0$ が存在して $\widehat{\beta}(r) \geq c_1 |r|^2 - c_2$ $({}^\forall r \in \mathbb{R})$.

- 動的的境界条件下でのHele-Shaw 問題

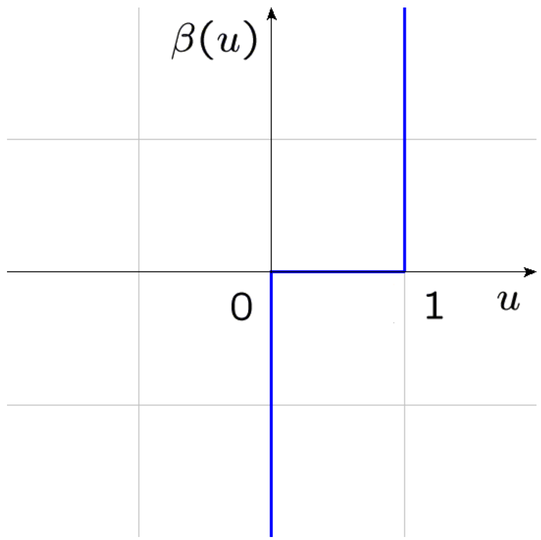
$0 < T < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

$$\partial_t u - \Delta\xi = g, \quad \xi \in \beta(u) \quad \text{in } Q,$$
$$\xi_{|_\Gamma} = \xi_\Gamma \in \beta(u_\Gamma), \quad \partial_t u_\Gamma + \partial_{\boldsymbol{\nu}}\xi - \Delta_\Gamma \xi_\Gamma = g_\Gamma \quad \text{on } \Sigma,$$
$$u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \quad u_\Gamma(0) = u_{\Gamma,0} \quad \text{on } \Gamma.$$

$\beta = \partial\widehat{\beta} : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ は極大単調作用素, $\beta(0) \ni 0$.

$$\beta(r) = \partial I_{[0,1]}(r) = \begin{cases} (-\infty, 0] & \text{if } r = 0, \\ 0 & \text{if } r \in (0,1), \\ [0, +\infty) & \text{if } r = 1, \end{cases}$$

$\widehat{\beta} = I_{[0,1]}$ は β の原始関数, $D(\beta) = [0,1]$.



ある定数 c_1, $c_2 > 0$ が存在して $\widehat{\beta}(r) \geq c_1|r|^2 - c_2$ $({}^\forall r \in \mathbb{R})$.

- 動的的境界条件下での Penrose–Fife 型非線形拡散方程式

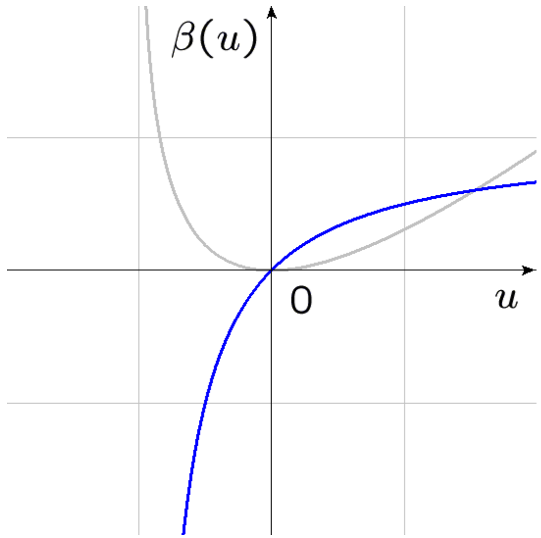
$0 < T < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

$$\partial_t u - \Delta \beta(u) = g \quad \text{in } Q,$$
$$u_{|_\Gamma} = u_\Gamma, \quad \partial_t u_\Gamma + \partial_{\boldsymbol{\nu}} \beta(u) - \Delta_\Gamma \beta(u_\Gamma) = g_\Gamma \quad \text{on } \Sigma,$$
$$u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \quad u_\Gamma(0) = u_{\Gamma,0} \quad \text{on } \Gamma.$$

$\beta \in C((-1,\infty))$ は原点を通り単調増加.

$$\beta(r) = -\frac{1}{1+r} + 1,$$
$$\widehat{\beta}(r) = -\log(1+r) + r \quad ({}^\forall r \in (-1,\infty)).$$

$\widehat{\beta}$ は β の原始関数.



ある定数 c_1, $c_2 > 0$ が存在して $\widehat{\beta}(r) \geq c_1|r|^2 - c_2$ $({}^\forall r \in D(\widehat{\beta}))$ は成立しない.

- 動的的境界条件下でのfast diffusion方程式

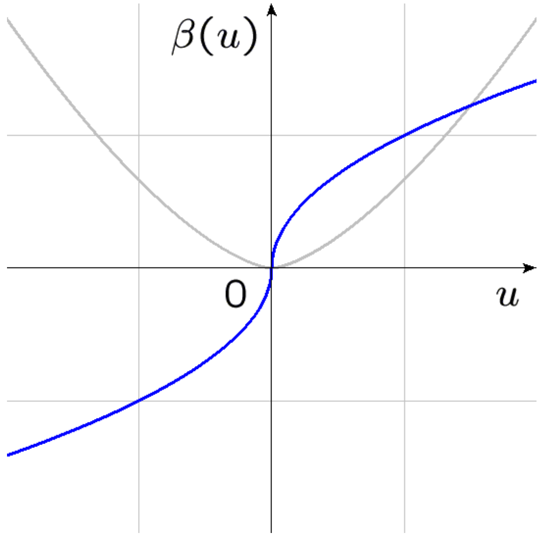
$0 < T < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, なめらかな有界領域. $0 < m < 1$.

$$
\begin{gathered}
\partial_t u - \Delta \beta(u) = g \quad \text{in } Q, \\
u_{|_\Gamma} = u_\Gamma, \quad \partial_t u_\Gamma + \partial_{\boldsymbol{\nu}} \beta(u) - \Delta_\Gamma \beta(u_\Gamma) = g_\Gamma \quad \text{on } \Sigma, \\
u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \quad u_\Gamma(0) = u_{\Gamma,0} \quad \text{on } \Gamma.
\end{gathered}
$$

$\beta \in C(\mathbb{R})$は原点を通り単調増加.

$$
\begin{aligned}
\beta(r) \quad (= |r|^{m-1} r) \quad &= |r|^m \mathrm{sgn} r, \\
\hat{\beta}(r) = \frac{1}{1+m} |r|^{1+m} \quad &({}^\forall r \in \mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

$\hat{\beta}$はβの原始関数.



ある定数c_1, $c_2 > 0$が存在して $\hat{\beta}(r) \geq c_1 |r|^2 - c_2$ $({}^\forall r \in \mathbb{R})$は成立しない.

注: 解の有限時刻消滅については講演の後半で報告.

3. Cahn–Hilliard 型の方程式ならびに動的境界条件

• GMS(Goldstein–Miranville–Schimperna) モデル

$u,\ \mu : Q \to \mathbb{R},\ u_\Gamma,\ \mu_\Gamma : \Sigma \to \mathbb{R},$

$$\partial_t u - \Delta\mu = 0, \quad \mu = -\Delta u + F'(u) - f \quad \text{in } Q,$$
$$u_\Gamma = u_{|_\Gamma}, \quad \mu_\Gamma = \mu_{|_\Gamma}, \quad \partial_t u_\Gamma + \partial_{\boldsymbol{\nu}}\mu - \Delta_\Gamma \mu_\Gamma = 0 \quad \text{on } \Sigma,$$
$$\mu_\Gamma = \partial_{\boldsymbol{\nu}} u - \Delta_\Gamma u_\Gamma + F'_\Gamma(u_\Gamma) - f_\Gamma \quad \text{on } \Sigma,$$
$$u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \quad u_\Gamma(0) = u_{\Gamma,0} \quad \text{on } \Gamma.$$

ここで, F, F_Γ は二重井戸型ポテンシャル.

◇ G. R. Goldstein, A. Miranville, and G. Schimperna, A Cahn–Hilliard model in a domain with non-permeable walls, Physica D, **240** (2011), 754–766.

GMS モデルでは総質量保存則が成立.

$$\int_\Omega u(t)dx + \int_\Gamma u_\Gamma(t)d\Gamma = \int_\Omega u_0 dx + \int_\Gamma u_{\Gamma,0} d\Gamma \quad ({}^\forall t \in [0,T]).$$

3. Cahn–Hilliard 型の方程式ならびに動的境界条件

- GMS(Goldstein–Miranville–Schimperna) モデル

$u,\ \mu : Q \to \mathbb{R},\ u_\Gamma,\ \mu_\Gamma : \Sigma \to \mathbb{R},$

$$
\begin{aligned}
\partial_t u - \Delta \mu = 0, \quad \mu = -\Delta u + F'(u) - f \quad &\text{in } Q,\\
u_\Gamma = u_{|_\Gamma}, \quad \mu_\Gamma = \mu_{|_\Gamma}, \quad \partial_t u_\Gamma + \partial_{\boldsymbol{\nu}} \mu - \Delta_\Gamma \mu_\Gamma = 0 \quad &\text{on } \Sigma,\\
\mu_\Gamma = \partial_t u_\Gamma + \partial_{\boldsymbol{\nu}} u - \Delta_\Gamma u_\Gamma + F'_\Gamma(u_\Gamma) - f_\Gamma \quad &\text{on } \Sigma,\\
u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega. \quad u_\Gamma(0) = u_{\Gamma,0} \quad &\text{on } \Gamma.
\end{aligned}
$$

ここで, F, F_Γ は二重井戸型ポテンシャル.

◇ R. Racke and S. Zheng, The Cahn–Hilliard equation with dynamic boundary conditions, Adv. Differential Equations, **8** (2003), 83–110.

GMS モデルでは総質量保存則が成立.

$$\int_\Omega u(t)dx + \int_\Gamma u_\Gamma(t)d\Gamma = \int_\Omega u_0 dx + \int_\Gamma u_{\Gamma,0} d\Gamma \quad ({}^\forall t \in [0,T]).$$

3. Cahn–Hilliard 型の方程式ならびに動的境界条件

- GMS(Goldstein–Miranville–Schimperna) モデル

$u,\ \mu : Q \to \mathbb{R},\ u_\Gamma,\ \mu_\Gamma : \Sigma \to \mathbb{R},$

$$\partial_t u - \Delta \mu = 0, \quad \mu = -\Delta u + F'(u) - f \quad \text{in } Q,$$
$$u_\Gamma = u_{|_\Gamma}, \quad \mu_\Gamma = \mu_{|_\Gamma}, \quad \partial_t u_\Gamma + \partial_{\boldsymbol{\nu}} \mu - \Delta_\Gamma \mu_\Gamma = 0 \quad \text{on } \Sigma,$$
$$\mu_\Gamma = \partial_{\boldsymbol{\nu}} u - \Delta_\Gamma u_\Gamma + F'_\Gamma(u_\Gamma) - f_\Gamma \quad \text{on } \Sigma,$$
$$u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \quad u_\Gamma(0) = u_{\Gamma,0} \quad \text{on } \Gamma.$$

ここで，F, F_Γ は二重井戸型ポテンシャル.

◇ G. R. Goldstein, A. Miranville, and G. Schimperna, A Cahn–Hilliard model in a domain with non-permeable walls, Physica D, **240** (2011), 754–766.

GMS モデルでは総質量保存則が成立: 任意の $t \in [0, T]$ に対して

$$m\bigl(u(t)\bigr) := \frac{\int_\Omega u(t)dx + \int_\Gamma u_\Gamma(t)d\Gamma}{|\Omega| + |\Gamma|} = m_0 := \frac{\int_\Omega u_0 dx + \int_\Gamma u_{\Gamma,0} d\Gamma}{|\Omega| + |\Gamma|}.$$

• GMSモデルに対する適切性　総質量保存則の構造を利用して抽象発展方程式の枠組みから可解性が議論できる．$F' = F'_\Gamma := \beta + \pi$.

(A1) β は極大単調作用素で $\widehat{\beta}(0) = 0$ を満たす適正下半連続凸関数 $\widehat{\beta}$ で $\beta = \partial\widehat{\beta}$;

(A2) $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ はLipschitz 連続;

(A4) $m_0 \in \mathrm{int}D(\beta)$ で，さらに $\widehat{\beta}(u_0) \in L^1(\Omega)$, $\widehat{\beta}(u_{\Gamma,0}) \in L^1(\Gamma)$;

(A5) $f \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, $f_{|_\Gamma} = f_\Gamma \in L^2(0,T;H^1(\Gamma))$, $\boldsymbol{u}_0 := (u_0, u_{\Gamma,0}) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma)$, $(u_0)_{|_\Gamma} = u_{\Gamma,0}$ a.e. on Γ.

定理 3.1. (A1),(A2),(A4),(A5) の仮定の下，弱解が一意的に存在する．

◇ P. Colli and F., Equation and dynamic boundary condition of Cahn–Hilliard type with singular potentials, Nonlinear Anal., **127** (2015), 413–433.

注: 総質量保存則に対応したPoincaré–Wirtinger の不等式と総質量ゼロの関数空間上の発展方程式．$\boldsymbol{\mu} := (\mu, \mu_\Gamma) \in L^2(0,T; H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma))$, $\mu_{|_\Gamma} = \mu_\Gamma$,

$$\mu = -\Delta u + \beta(u) + \pi(u) - f,$$

$$\mu_\Gamma = \partial_{\boldsymbol{\nu}} u - \Delta_\Gamma u_\Gamma + \beta(u_\Gamma) + \pi(u_\Gamma) - f_\Gamma.$$

• GMSモデルに対する適切性　総体積保存則の構造を利用して抽象発展方程式の枠組みから可解性を議論した．$F' = F'_\Gamma := \beta + \pi$.

(A1) βは極大単調作用素で$\widehat{\beta}(0) = 0$を満たす適正下半連続凸関数$\widehat{\beta}$で$\beta = \partial\widehat{\beta}$;

(A2) $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$はLipschitz 連続;

(A4) $m_0 \in \mathrm{int}D(\beta)$で，さらに$\widehat{\beta}(u_0) \in L^1(\Omega)$, $\widehat{\beta}(u_{\Gamma,0}) \in L^1(\Gamma)$;

(A5) $f \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, $f_{|_\Gamma} = f_\Gamma \in L^2(0,T;H^1(\Gamma))$, $\boldsymbol{u}_0 := (u_0, u_{\Gamma,0}) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma)$, $(u_0)_{|_\Gamma} = u_{\Gamma,0}$ a.e. on Γ.

定理 3.1. (A1),(A2),(A4),(A5)の仮定の下，弱解が一意的に存在する．

$\boldsymbol{w} := \boldsymbol{u} - m_0\boldsymbol{1}$.

$$\boldsymbol{w} \in H^1(0,T;\boldsymbol{V}_0^*) \cap L^\infty(0,T;\boldsymbol{V}_0) \cap L^2(0,T;\boldsymbol{W}),$$

$$\boldsymbol{\mu} \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}), \quad \boldsymbol{\xi} \in L^2(0,T;\boldsymbol{H}),$$

$$\xi \in \beta(w + m_0) \text{ a.e. in } Q, \quad \xi_\Gamma \in \beta_\Gamma(w_\Gamma + m_0) \text{ a.e. on } \Sigma$$

$\boldsymbol{H} := L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)$, $\boldsymbol{H}_0 := \left\{\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{H} : m(\boldsymbol{z}) = 0\right\}$,

$\boldsymbol{V} := \left\{(z, z_\Gamma) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma) : z_\Gamma = z_{|_\Gamma} \text{ a.e. on } \Gamma\right\}$, $\boldsymbol{V}_0 := \boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{H}_0$,

$\boldsymbol{W} := \left(H^2(\Omega) \times H^2(\Gamma)\right) \cap \boldsymbol{V}$

• GMSモデルに対する適切性　総体積保存則の構造を利用して抽象発展方程式の枠組みから可解性を議論した．$F' = F'_\Gamma := \beta + \pi$.

(A1) β は極大単調作用素で $\hat{\beta}(0) = 0$ を満たす適正下半連続凸関数 $\hat{\beta}$ で $\beta = \partial\hat{\beta}$;

(A2) $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は Lipschitz 連続;

(A4) $m_0 \in \mathrm{int}D(\beta)$ で，さらに $\hat{\beta}(u_0) \in L^1(\Omega)$，$\hat{\beta}(u_{\Gamma,0}) \in L^1(\Gamma)$;

(A5) $f \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$，$f_{|_\Gamma} = f_\Gamma \in L^2(0,T;H^1(\Gamma))$，$\boldsymbol{u}_0 := (u_0, u_{\Gamma,0}) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma)$，$(u_0)_{|_\Gamma} = u_{\Gamma,0}$ a.e. on Γ.

定理 3.1.　(A1),(A2),(A4),(A5) の仮定の下，弱解が一意的に存在する．

◇ P. Colli and F., Equation and dynamic boundary condition of Cahn–Hilliard type with singular potentials, Nonlinear Anal., **127** (2015), 413–433.

注:　総質量保存則に対応した Poincaré–Wirtinger の不等式と総質量ゼロの関数空間上の発展方程式．$\boldsymbol{\mu} := (\mu, \mu_\Gamma) \in L^2(0,T;H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma))$，$\mu_{|_\Gamma} = \mu_\Gamma$,

$\mu = -\Delta u + \beta(u) + \pi(u) - f$,

$\mu_\Gamma = \partial_{\boldsymbol{\nu}} u - \Delta_\Gamma u_\Gamma + \beta(u_\Gamma) + \pi(u_\Gamma) - f_\Gamma$.

4. (GMS)から非線形拡散方程式への接近

(GMS; ε): $^\forall\varepsilon \in (0,1]$

$$\partial_t u_\varepsilon - \Delta \mu_\varepsilon = 0, \quad \mu_\varepsilon = -\varepsilon \Delta u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) + \varepsilon\pi(u_\varepsilon) - f \quad \text{in } Q,$$

$$u_{\Gamma,\varepsilon} = (u_\varepsilon)_{|_\Gamma}, \quad \mu_{\Gamma,\varepsilon} = (\mu_\varepsilon)_{|_\Gamma}, \quad \partial_t u_{\Gamma,\varepsilon} + \partial_{\boldsymbol{\nu}}\mu_\varepsilon - \Delta_\Gamma \mu_{\Gamma,\varepsilon} = 0 \quad \text{on } \Sigma,$$

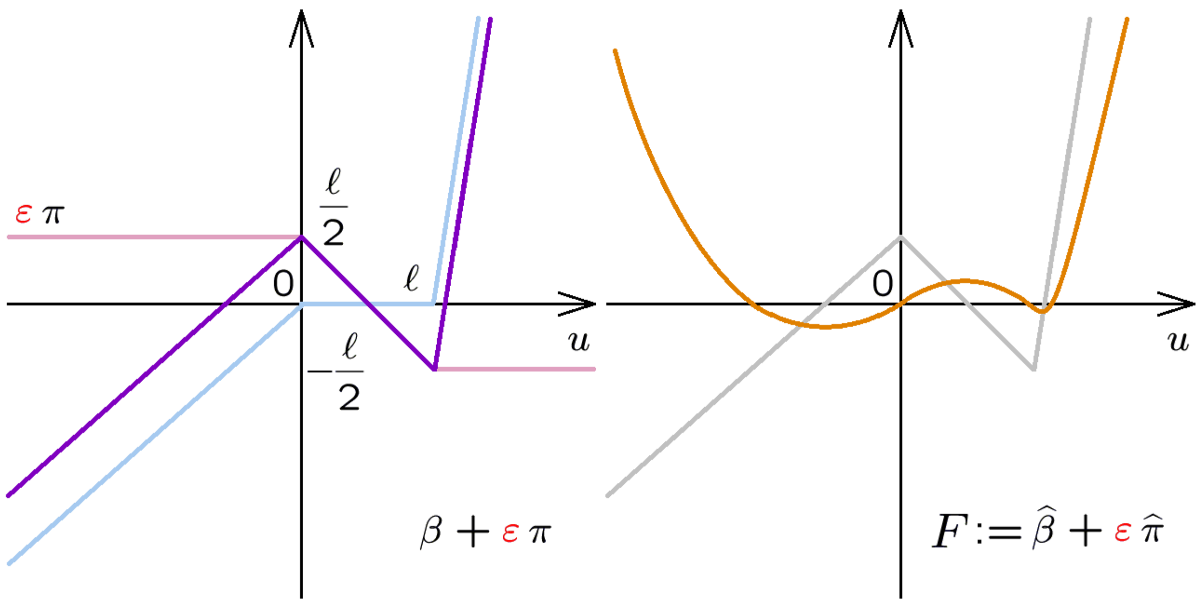
$$\mu_{\Gamma,\varepsilon} = \varepsilon \partial_{\boldsymbol{\nu}} u_\varepsilon - \varepsilon \Delta_\Gamma u_{\Gamma,\varepsilon} + \beta(u_{\Gamma,\varepsilon}) + \varepsilon\pi(u_{\Gamma,\varepsilon}) - f_\Gamma \quad \text{on } \Sigma.$$

$\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 極大単調作用素,

$\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\pi(r) := \begin{cases} \dfrac{\ell}{2} & \text{if } r < 0, \\ \dfrac{\ell}{2} - r & \text{if } 0 \le r \le \ell, \\ -\dfrac{\ell}{2} & \text{if } r > \ell. \end{cases}$$

$g = -\Delta f$, $g_\Gamma = \partial_{\boldsymbol{\nu}} f - \Delta_\Gamma f_\Gamma$.



4. (GMS)から非線形拡散方程式への接近

(GMS; ε): ${}^{\forall}\varepsilon \in (0,1]$

$$\partial_t u_\varepsilon - \Delta \mu_\varepsilon = 0, \quad \mu_\varepsilon = -\varepsilon\Delta u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) + \varepsilon\pi(u_\varepsilon) - f \quad \text{in } Q,$$

$$u_{\Gamma,\varepsilon} = (u_\varepsilon)_{|\Gamma}, \quad \mu_{\Gamma,\varepsilon} = (\mu_\varepsilon)_{|\Gamma}, \quad \partial_t u_{\Gamma,\varepsilon} + \partial_\nu \mu_\varepsilon - \Delta_\Gamma \mu_{\Gamma,\varepsilon} = 0 \quad \text{on } \Sigma,$$

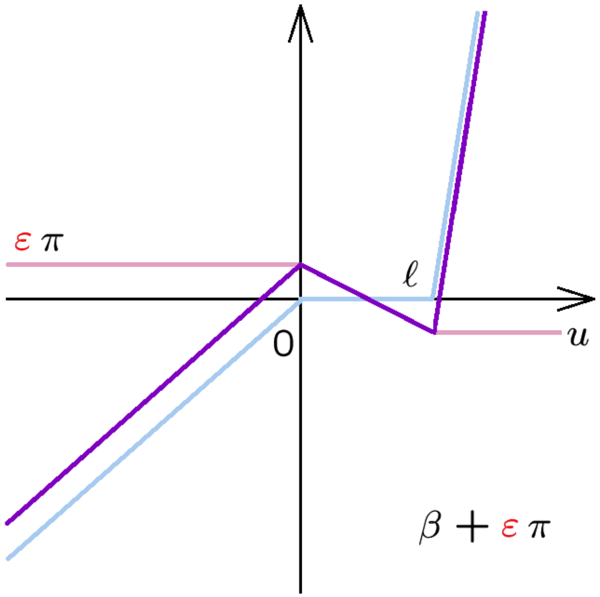
$$\mu_{\Gamma,\varepsilon} = \varepsilon\partial_\nu u_\varepsilon - \varepsilon\Delta_\Gamma u_{\Gamma,\varepsilon} + \beta(u_{\Gamma,\varepsilon}) + \varepsilon\pi(u_{\Gamma,\varepsilon}) - f_\Gamma \quad \text{on } \Sigma.$$

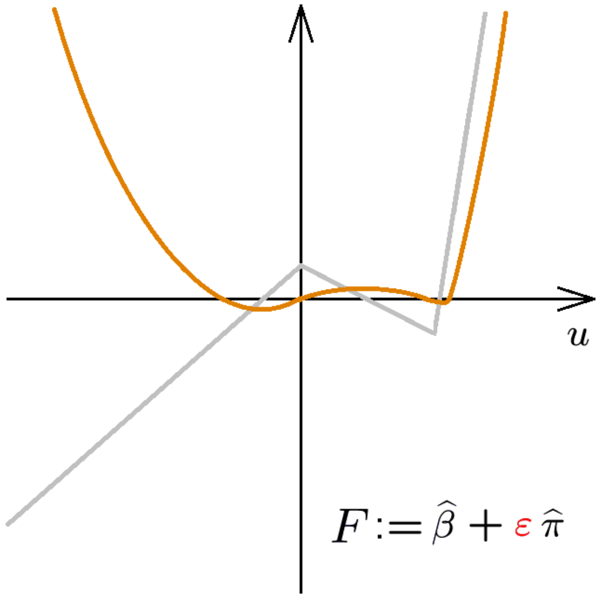
$\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 極大単調作用素,

$\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\pi(r) := \begin{cases} \dfrac{\ell}{2} & \text{if } r < 0, \\ \dfrac{\ell}{2} - r & \text{if } 0 \le r \le \ell, \\ -\dfrac{\ell}{2} & \text{if } r > \ell. \end{cases}$$

$g = -\Delta f$, $g_\Gamma = \partial_\nu f - \Delta_\Gamma f_\Gamma$.





4. (GMS)から非線形拡散方程式への接近

(GMS; ε): $^\forall\varepsilon \in (0,1]$

$$\partial_t u_\varepsilon - \Delta \mu_\varepsilon = 0, \quad \mu_\varepsilon = \beta(u_\varepsilon) - f \quad \text{in } Q,$$

$$u_{\Gamma,\varepsilon} = (u_\varepsilon)_{|\Gamma}, \quad \mu_{\Gamma,\varepsilon} = (\mu_\varepsilon)_{|\Gamma}, \quad \partial_t u_{\Gamma,\varepsilon} + \partial_{\boldsymbol{\nu}} \mu_\varepsilon - \Delta_\Gamma \mu_{\Gamma,\varepsilon} = 0 \quad \text{on } \Sigma,$$

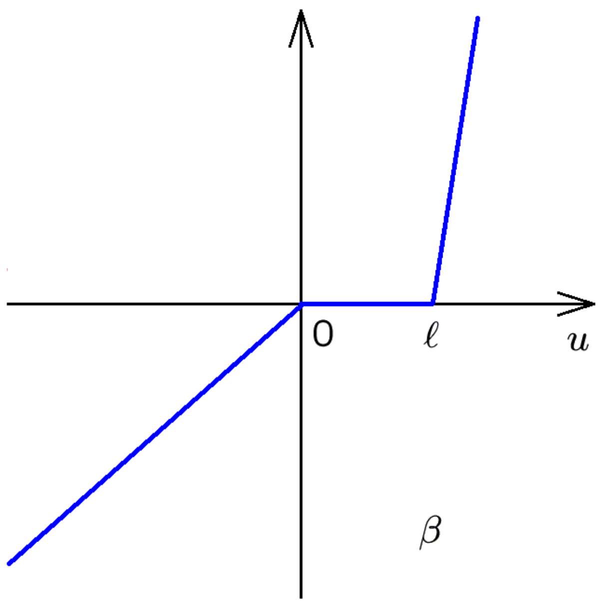
$$\mu_{\Gamma,\varepsilon} = \beta(u_{\Gamma,\varepsilon}) - f_\Gamma \quad \text{on } \Sigma.$$

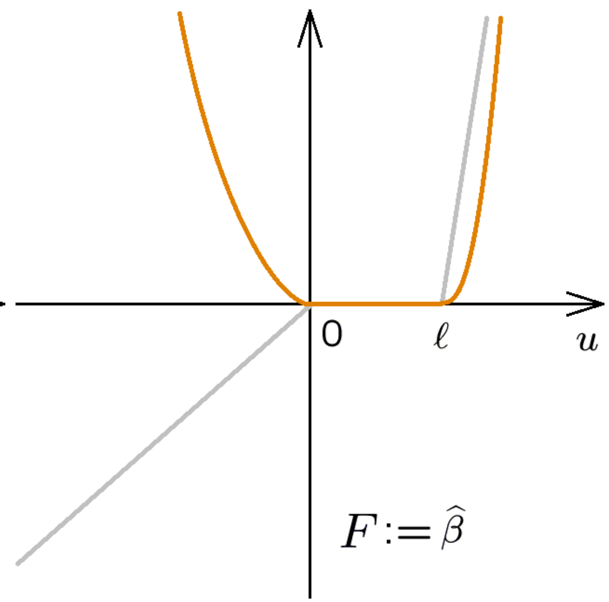
$\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 極大単調作用素,

$\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\pi(r) := \begin{cases} \dfrac{\ell}{2} & \text{if } r < 0, \\ \dfrac{\ell}{2} - r & \text{if } 0 \le r \le \ell, \\ -\dfrac{\ell}{2} & \text{if } r > \ell. \end{cases}$$

$g = -\Delta f$, $g_\Gamma = \partial_{\boldsymbol{\nu}} f - \Delta_\Gamma f_\Gamma$.





$H := L^2(\Omega)$, $V := H^1(\Omega)$, $H_\Gamma := L^2(\Gamma)$, $V_\Gamma := H^1(\Gamma)$,

$\boldsymbol{H} := H \times H_\Gamma$,

$\boldsymbol{V} := \left\{(z, z_\Gamma) \in V \times V_\Gamma : z_\Gamma = z_{|_\Gamma} \text{ a.e. on } \Gamma\right\}$.

(A6) $\boldsymbol{g} \in L^2(0,T;\boldsymbol{H})$, $m(\boldsymbol{g}(t)) = 0$ for a.a. $t \in (0,T)$, $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{H}$.

定理 4.1. (A1),(A4),(A6) の仮定の下, $\boldsymbol{u} \in H^1(0,T;\boldsymbol{V}^*) \cap L^\infty(0,T;\boldsymbol{H})$ が一意的に，そして，$\boldsymbol{\xi} \in L^2(0,T;\boldsymbol{V})$ が存在して

$$\xi \in \beta(u) \quad \textit{a.e. in } Q, \quad \xi_\Gamma \in \beta(u_\Gamma), \quad \xi_\Gamma = \xi_{|_\Gamma} \quad \textit{a.e. on } \Sigma,$$

$$\left\langle u'(t), z\right\rangle_{V^*,V} + \left\langle u'_\Gamma(t), z_\Gamma\right\rangle_{V_\Gamma^*,V_\Gamma} + \int_\Omega \nabla\xi(t)\cdot\nabla z dx + \int_\Gamma \nabla_\Gamma\xi_\Gamma(t)\cdot\nabla_\Gamma z_\Gamma d\Gamma$$

$$= \int_\Omega g(t) z dx + \int_\Gamma g_\Gamma(t) z_\Gamma d\Gamma \quad \left({}^\forall \boldsymbol{z} = (z, z_\Gamma) \in \boldsymbol{V}\right) \quad \textit{for a.a. } t \in (0,T),$$

そして，$u(0) = u_0$ *a.e. in* Ω と $u_\Gamma(0) = u_{0\Gamma}$ *a.e. on* Γ を満たす.

◇ F., Convergence of Cahn–Hilliard systems to the Stefan problem with dynamic boundary conditions, Asymptot. Anal., **99** (2016) 1–21.

- 定理の鍵　Key 1. 変数変換: $\boldsymbol{w} := \boldsymbol{u} - m_0\mathbf{1}$.

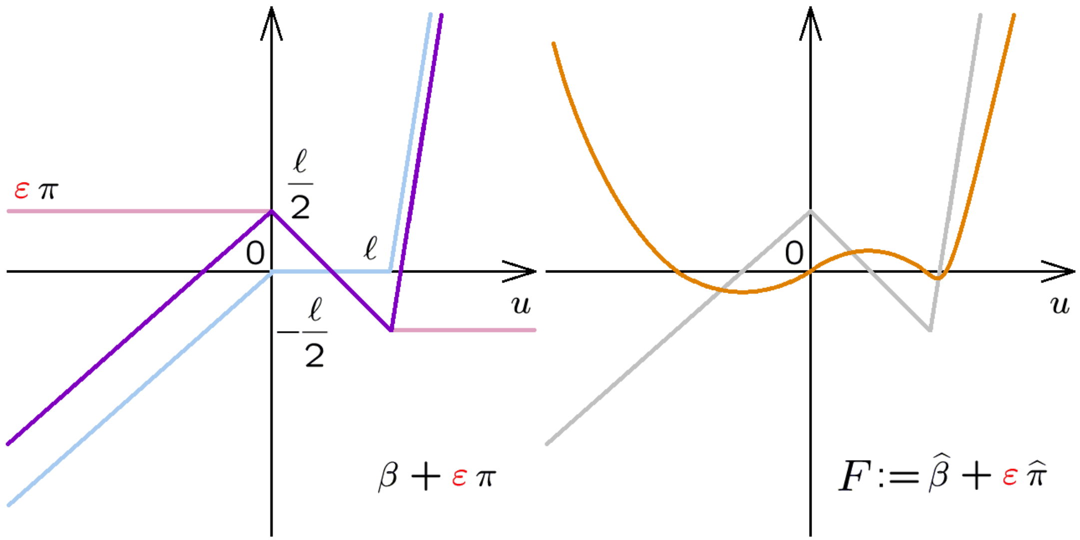
Key 2. 補助関数: $\boldsymbol{f} = (f, f_\Gamma)$.

$$-\Delta f(t) = g(t) \quad \text{a.e. in } \Omega,$$
$$\partial_{\boldsymbol{\nu}} f(t) - \Delta_\Gamma f_\Gamma(t) = g_\Gamma(t) \quad \text{a.e. on } \Gamma.$$

Key 3. 一様評価と極限操作: $\varepsilon \to 0$

$$\left\langle \boldsymbol{w}'_\varepsilon(t), \boldsymbol{z} \right\rangle_{\boldsymbol{V}_0^*, \boldsymbol{V}_0} + a\big(\boldsymbol{\mu}_\varepsilon(t), \boldsymbol{z}\big) = 0,$$
$$\big(\boldsymbol{\mu}_\varepsilon(t), \boldsymbol{z}\big)_{\boldsymbol{H}} = \varepsilon a\big(\boldsymbol{w}_\varepsilon(t), \boldsymbol{z}\big) + \big(\boldsymbol{\xi}_\varepsilon(t) + \varepsilon \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{w}_\varepsilon(t) + m_0\mathbf{1}) - \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{z}\big)_{\boldsymbol{H}},$$
$$\xi_\varepsilon \in \beta(w_\varepsilon + m_0) \quad \text{a.e. in } Q, \quad \xi_{\Gamma,\varepsilon} \in \beta(w_{\Gamma,\varepsilon} + m_0) \quad \text{a.e. on } \Sigma.$$

(GMS; ε) の解としては
$\boldsymbol{\xi}_\varepsilon \in L^2(0, T; \boldsymbol{H})$,
$\boldsymbol{\mu}_\varepsilon \in L^2(0, T; \boldsymbol{V})$.



- 定理の鍵　Key 1. 変数変換: $\boldsymbol{w} := \boldsymbol{u} - m_0\mathbf{1}$.

Key 2. 補助関数: $\boldsymbol{f} = (f, f_\Gamma)$.

$$\begin{aligned} -\Delta f(t) &= g(t) \quad \text{a.e. in } \Omega, \\ \partial_{\boldsymbol{\nu}} f(t) - \Delta_\Gamma f_\Gamma(t) &= g_\Gamma(t) \quad \text{a.e. on } \Gamma. \end{aligned}$$

Key 3. 一様評価と極限操作: $\varepsilon \to 0$

$$\big\langle \boldsymbol{w}'_\varepsilon(t), \boldsymbol{z} \big\rangle_{\boldsymbol{V}_0^*, \boldsymbol{V}_0} + a\big(\boldsymbol{\mu}_\varepsilon(t), \boldsymbol{z}\big) = 0,$$

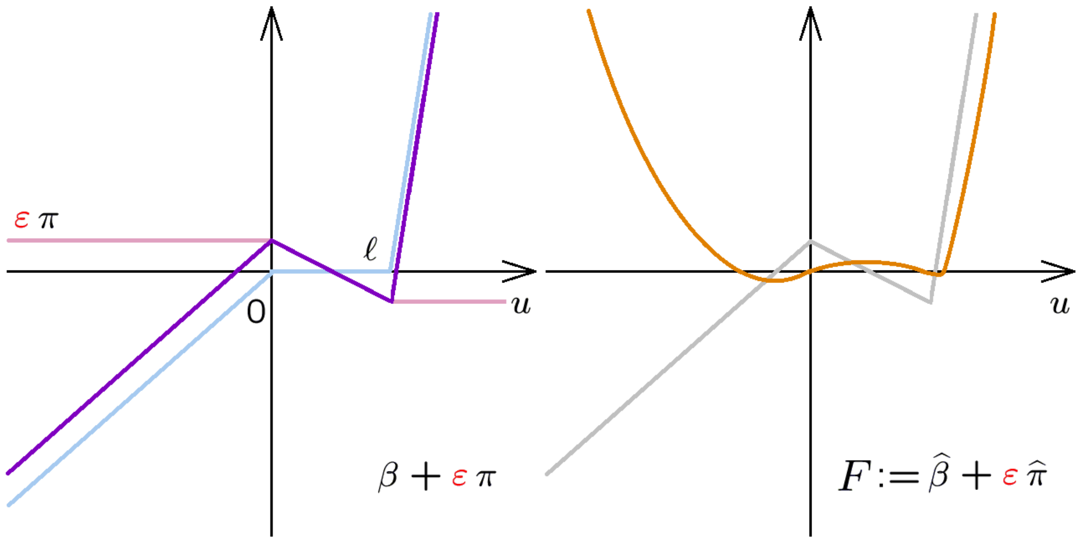
$$\big(\boldsymbol{\mu}_\varepsilon(t), \boldsymbol{z}\big)_{\boldsymbol{H}} = \varepsilon a\big(\boldsymbol{w}_\varepsilon(t), \boldsymbol{z}\big) + \big(\boldsymbol{\xi}_\varepsilon(t) + \varepsilon \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{w}_\varepsilon(t) + m_0\mathbf{1}) - \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{z}\big)_{\boldsymbol{H}},$$

$$\xi_\varepsilon \in \beta(w_\varepsilon + m_0) \quad \text{a.e. in } Q, \quad \xi_{\Gamma,\varepsilon} \in \beta(w_{\Gamma,\varepsilon} + m_0) \quad \text{a.e. on } \Sigma.$$

(GMS; ε) の解としては

$\boldsymbol{\xi}_\varepsilon \in L^2(0, T; \boldsymbol{H})$,

$\boldsymbol{\mu}_\varepsilon \in L^2(0, T; \boldsymbol{V})$.



- 定理の鍵 Key 1. 変数変換: $\boldsymbol{w} := \boldsymbol{u} - m_0\mathbf{1}$.

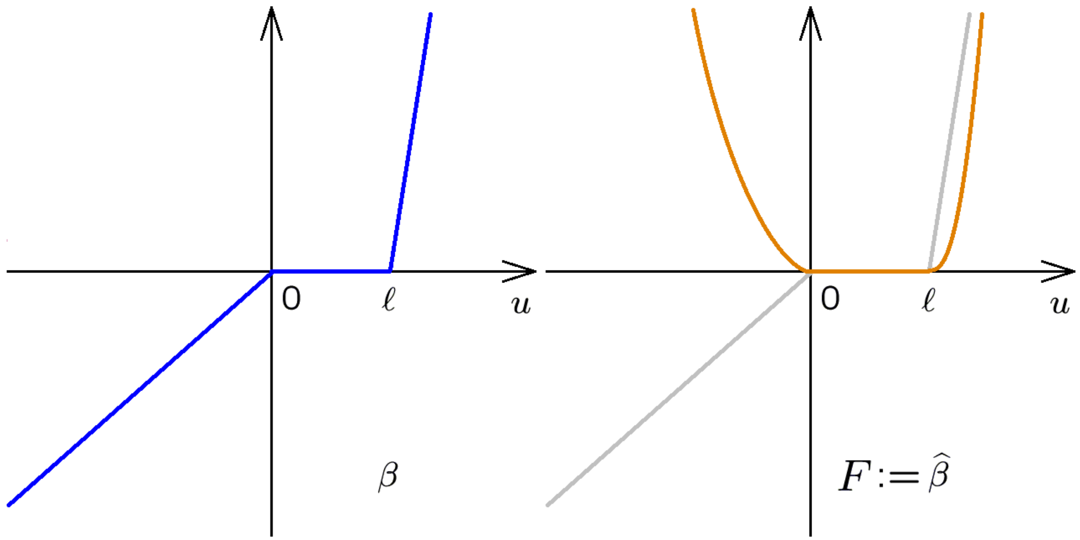
Key 2. 補助関数: $\boldsymbol{f} = (f, f_\Gamma)$.

$$-\Delta f(t) = g(t) \quad \text{a.e. in } \Omega,$$
$$\partial_{\boldsymbol{\nu}} f(t) - \Delta_\Gamma f_\Gamma(t) = g_\Gamma(t) \quad \text{a.e. on } \Gamma.$$

Key 3. 一様評価と極限操作: $\varepsilon \to 0$

$$\left\langle \boldsymbol{w}'(t), \boldsymbol{z} \right\rangle_{\boldsymbol{V}_0^*, \boldsymbol{V}_0} + a\big(\boldsymbol{\mu}(t), \boldsymbol{z}\big) = 0,$$
$$\big(\boldsymbol{\mu}(t), \boldsymbol{z}\big)_{\boldsymbol{H}} = \big(\boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{z}\big)_{\boldsymbol{H}},$$
$$\xi \in \beta(w + m_0) \quad \text{a.e. in } Q, \quad \xi_\Gamma \in \beta(w_\Gamma + m_0) \quad \text{a.e. on } \Sigma.$$

$\boldsymbol{\mu} \in L^2(0,T;\boldsymbol{V})$,
$\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;\boldsymbol{V})$,
$\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{f} \in L^2(0,T;\boldsymbol{V})$より,
$\boldsymbol{\xi} \in L^2(0,T;\boldsymbol{V})$を得る.



注: 増大条件ある定数 c_1, $c_2 > 0$ が存在して $\widehat{\beta}(r) \geq c_1|r|^2 - c_2$ $({}^\forall r \in \mathbb{R})$ から

$$\int_\Omega \widehat{\beta}\bigl(w_\varepsilon(t)\bigr)dx \geq c_1|w_\varepsilon(t)|_H^2 - c_2,$$

が得られ，一様評価に利用できるが，これを使わず必要な評価が Cahn–Hilliard 系から直接得られる．

増大条件は本質的に退化放物型方程式を共役空間で捉える Damlamian の方法の際にポテンシャルの下半連続性を得るために課した仮定であった: $\tilde{\varphi} : V^* \to [0,\infty]$

$$\tilde{\varphi}(z) := \int_\Omega \widehat{\beta}(z)dx \quad \text{if } \widehat{\beta}(z) \in L^1(\Omega), \qquad \partial_{V^*}\tilde{\varphi}(z) = \boldsymbol{F}\beta(z) \quad \text{in } V^*.$$

◇ A. Damlamian and N. Kenmochi, Evolution equations generated by subdifferentials in the dual space of $H^1(\Omega)$, Discrete Contin. Dyn. Syst., **5** (1999), 269–278.

上記論文では Robin 境界条件下の退化放物型方程式に対して「下半連続拡張」の手法で増大条件を外しているが，定理 4.1 により，Cahn–Hilliard 系からの接近では「下半連続拡張」を必要としない点に利点がある．

- 増大条件の緩和について

◇ N. Kenmochi, Neumann problem for a class of nonlinear degenerate parabolic equations, Differential Integral Equations, **2** (1990), 253–273.
◇ M. Kubo and Q. Lu, Nonlinear degenerate parabolic equations with Neumann boundary condition, J. Math. Anal., Appl., **307** (2005), 232–244.
◇ G. Akagi, Energy solutions of the Cauchy–Neumann problem for porous medium equations, pp.1–10 in "Discrete and Continuous Dynamical Systems, supplement 2009", AIMS, 2009.

Neumann 境界条件下で様々な非線形拡散方程式に対して異なる接近方法.

- Neumann 境界条件下での Cahn–Hilliard 系から非線形拡散方程式への接近

◇ P. Colli and F., Nonlinear diffusion equations as asymptotic limits of Cahn–Hilliard systems, J. Differential Equations, **260** (2016), 6930–6959.

5. Fast diffusion 方程式と有限時刻消滅

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$, 有界領域でその境界 Γ は十分滑らか.

$0 < m < 1$, $p, q > 1$, $(a, b), (\lambda, \mu) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$, $u_0 \geq 0$, $u_{\Gamma,0} \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
&\partial_t u - \Delta u^m + a u^m = \lambda u^p \quad \text{in } \Omega, t > 0,\\
u_{|\Gamma} = u_\Gamma, \quad &\partial_t u_\Gamma + \partial_\nu u^m - \Delta_\Gamma u_\Gamma^m + b u_\Gamma^m = \mu u_\Gamma^q \quad \text{on } \Gamma, t > 0,\\
&u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \quad u_\Gamma(0) = u_{\Gamma,0} \quad \text{on } \Gamma.
\end{aligned}
$$

J. Filo の一連の研究に従い, Fast diffusion 方程式の特徴である「有限時刻消滅 (finite time extinction)」について考察する.

◇ E. S. Sabinina, On a class of non-linear degenerate parabolic equations, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **143** (1962), 794–797.

◇ J. Filo, On solutions of a perturbed fast diffusion equation, Apl. Mat., **32** (1987), 364–380.

◇ J. L. Vázquez, *The Porous Medium Equation. Mathematical Theory*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$, 有界領域でその境界 Γ は十分滑らか．$0 < m < 1$, $p, q > 1$,

$(a, b, \lambda, \mu) = (1, 0, 1, 0)$

$$\partial_t u - \Delta u^m + u^m = u^p \quad \text{in } \Omega, t > 0,$$
$$u_{|_\Gamma} = u_\Gamma, \quad \partial_t u_\Gamma + \partial_{\boldsymbol{\nu}} u^m - \Delta_\Gamma u_\Gamma^m = 0 \quad \text{on } \Gamma, t > 0.$$

$(a, b, \lambda, \mu) = (0, 1, 1, 0)$

$$\partial_t u - \Delta u^m = u^p \quad \text{in } \Omega, t > 0,$$
$$u_{|_\Gamma} = u_\Gamma, \quad \partial_t u_\Gamma + \partial_{\boldsymbol{\nu}} u^m - \Delta_\Gamma u_\Gamma^m + u_\Gamma^m = 0 \quad \text{on } \Gamma, t > 0.$$

$(a, b, \lambda, \mu) = (1, 0, 0, 1)$

$$\partial_t u - \Delta u^m + u^m = 0 \quad \text{in } \Omega, t > 0,$$
$$u_{|_\Gamma} = u_\Gamma, \quad \partial_t u_\Gamma + \partial_{\boldsymbol{\nu}} u^m - \Delta_\Gamma u_\Gamma^m = u_\Gamma^q \quad \text{on } \Gamma, t > 0.$$

$(a, b, \lambda, \mu) = (0, 1, 0, 1)$

$$\partial_t u - \Delta u^m = 0 \quad \text{in } \Omega, t > 0,$$
$$u_{|_\Gamma} = u_\Gamma, \quad \partial_t u_\Gamma + \partial_{\boldsymbol{\nu}} u^m - \Delta_\Gamma u_\Gamma^m + u_\Gamma^m = u_\Gamma^q \quad \text{on } \Gamma, t > 0.$$

- 動的境界条件下での fast diffusion 方程式

$\beta(r) := |r|^m \mathrm{sgn} r$, $\gamma(r) := \beta^{-1}(r) = |r|^\alpha \mathrm{sgn} r$, $\alpha := 1/m$,
$v := u^m$, $v_\Gamma := u_\Gamma^m$, $g(r) := |r|^{p-1} r$, $g_\Gamma(r) := |r|^{q-1} r$

$$
\begin{aligned}
\partial_t \gamma(v) - \Delta v + av &= \lambda g\bigl(\gamma(v)\bigr) && \text{a.e. in } \Omega,\ t > 0,\\
v_{|_\Gamma} &= v_\Gamma && \text{a.e. on } \Gamma,\ t > 0,\\
\partial_t \gamma(v_\Gamma) + \partial_{\boldsymbol{\nu}} v - \Delta_\Gamma v_\Gamma + b v_\Gamma &= \mu g_\Gamma\bigl(\gamma(v_\Gamma)\bigr) && \text{a.e. on } \Gamma,\ t > 0,\\
v(0) &= v_0 := u_0^m && \text{a.e. in } \Omega,\\
v_\Gamma(0) &= v_{\Gamma,0} := u_{\Gamma,0}^m && \text{a.e. on } \Gamma.
\end{aligned}
$$

$v_0 \geq 0$, $v_{\Gamma,0} \geq 0$.
簡単のため，$p_* := \lambda p + \mu q$ とおく．また，エネルギー E を次のように用意する．

$$
E(\boldsymbol{z}) := \varphi_1(\boldsymbol{z}) - \varphi_2(\boldsymbol{z}),
$$

$$
\varphi_1(\boldsymbol{z}) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla z|^2 dx + \frac{a}{2}\int_\Omega |z|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Gamma |\nabla_\Gamma z_\Gamma|^2 d\Gamma + \frac{b}{2}\int_\Gamma |z_\Gamma|^2 d\Gamma,
$$

$$
\varphi_2(\boldsymbol{z}) := \frac{1}{\alpha p_* + 1}\left(\lambda \int_\Omega |z|^{\alpha p + 1} dx + \mu \int_\Gamma |z_\Gamma|^{\alpha q + 1} d\Gamma\right).
$$

- 動的境界条件下での fast diffusion 方程式

簡単のため，$p_* := \lambda p + \mu q$ とおく．また，エネルギー E を次のように用意する．

$$E(\boldsymbol{z}) := \varphi_1(\boldsymbol{z}) - \varphi_2(\boldsymbol{z}),$$

$$\varphi_1(\boldsymbol{z}) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla z|^2 dx + \frac{a}{2}\int_\Omega |z|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Gamma |\nabla_\Gamma z_\Gamma|^2 d\Gamma + \frac{b}{2}\int_\Gamma |z_\Gamma|^2 d\Gamma,$$

$$\varphi_2(\boldsymbol{z}) := \frac{1}{\alpha p_* + 1}\left(\lambda \int_\Omega |z|^{\alpha p+1} dx + \mu \int_\Gamma |z_\Gamma|^{\alpha q+1} d\Gamma\right).$$

さらに，安定集合 $\mathcal{W}$ とポテンシャルの深さ d を

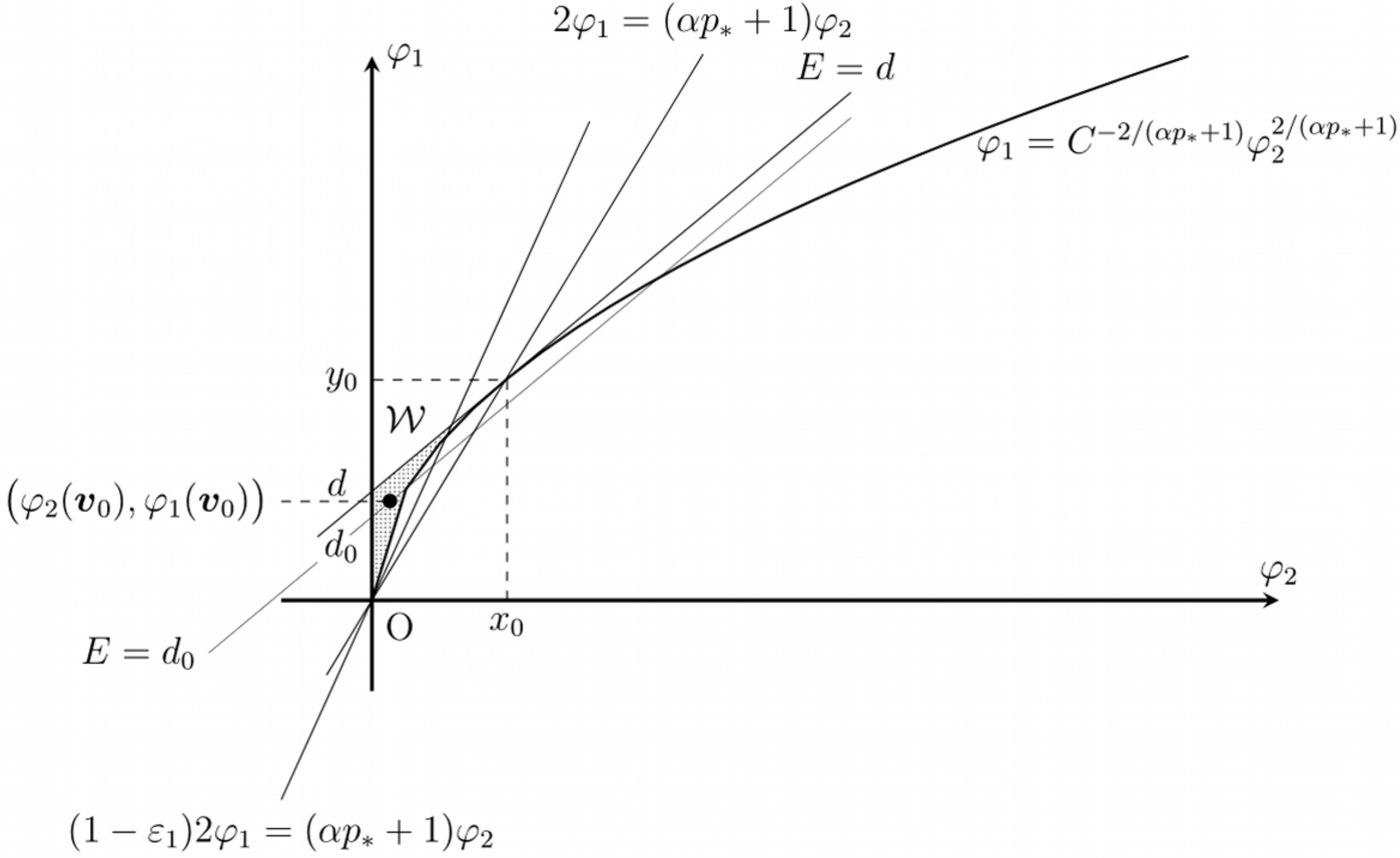
$$\mathcal{W} := \left\{ \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V} \setminus \{\boldsymbol{0}\} : \begin{array}{l} z \geq 0, z_\Gamma \geq 0, \\ E(\boldsymbol{z}) < d, \\ 2\varphi_1(\boldsymbol{z}) > (\alpha p_* + 1)\varphi_2(\boldsymbol{z}) \end{array} \right\} \cup \{\boldsymbol{0}\},$$

$$d = \inf\Big\{E(\boldsymbol{z}) : \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V} \setminus \{\boldsymbol{0}\}, 2\varphi_1(\boldsymbol{z}) = (\alpha p_* + 1)\varphi_2(\boldsymbol{z})\Big\}.$$

と定義する．(先行研究，Lions (1968), Sattinger (1968), Tsutsumi (1972)), Ishii (1977)), Ôtani (1981)), Nakao (1985)) 参照),

c.f.

$$\boldsymbol{v}'(t) + \partial\varphi_1\big(\boldsymbol{v}(t)\big) - \partial\varphi_2\big(\boldsymbol{v}(t)\big) \ni \boldsymbol{0} \quad \text{in } \boldsymbol{H}.$$



$2\varphi_1 = (\alpha p_* + 1)\varphi_2$
φ_1
$E = d$
$\varphi_1 = C^{-2/(\alpha p_*+1)}\varphi_2^{2/(\alpha p_*+1)}$
y_0
$\mathcal{W}$
d
$\big(\varphi_2(\boldsymbol{v}_0), \varphi_1(\boldsymbol{v}_0)\big)$
d_0
φ_2
O
x_0
$E = d_0$
$(1-\varepsilon_1)2\varphi_1 = (\alpha p_* + 1)\varphi_2$

- Fast diffusion 方程式と有限時刻消滅

定理 5.1. $(a,b) \in \{(1,0),(0,1)\}$, $(\lambda,\mu) = (0,1)$, $1/5 < m < 1$, さらに $q > 1$ とし, $\boldsymbol{v}_0 := (v_0, v_{\Gamma,0}) \in \mathcal{W} \cap \boldsymbol{L}^\infty$ を仮定する. このとき, $\boldsymbol{v}_0$ に依存する $T_{\mathrm{ext}} \in (0,\infty)$ が存在し, $v(t) = 0$ a.e. in Ω, $v_\Gamma(t) = 0$ a.e. on Γ がすべての $t \geq T_{\mathrm{ext}}$ に対して成立する. さらに, m に依存する正定数 $C(m) > 0$ が存在して

$$\left|v(t)\right|_{L^{(1+m)/m}(\Omega)} + \left|v_\Gamma(t)\right|_{L^{(1+m)/m}(\Gamma)} \leq C(m)(T_{\mathrm{ext}} - t)^{m/(1-m)} \quad (1)$$

がすべての $t \in [0, T_{\mathrm{ext}}]$ に対して成立する.

定理 5.2. $(a,b) \in \{(1,0),(0,1)\}$, $(\lambda,\mu) = (1,0)$, $1/5 < m < 1$, さらに $1 < p < 5m$ とし, $\boldsymbol{v}_0 := (v_0, v_{\Gamma,0}) \in \mathcal{W} \cap \boldsymbol{L}^\infty$ を仮定する. このとき, $\boldsymbol{v}_0$ に依存する $T_{\mathrm{ext}} \in (0,\infty)$ が存在し, $v(t) = 0$ a.e. in Ω, $v_\Gamma(t) = 0$ a.e. on Γ がすべての $t \geq T_{\mathrm{ext}}$ に対して成立する. さらに, (1) がすべての $t \in [0, T_{\mathrm{ext}}]$ に対して成立する.

- 証明の概要ならびに注意点

Fast diffusion 方程式 ($0 < m < 1$) では，時間微分の取り扱いが難しさの１つとなる．実際，弱解は任意の $T \in [0, \infty)$ に対して

$$\boldsymbol{v}^{(\alpha+1)/2} = \boldsymbol{v}^{(1+m)/2m} \in H^1(0, T; \boldsymbol{H}),$$

ならびに

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} I\bigl(\boldsymbol{v}(t)\bigr) + 2\varphi_1\bigl(\boldsymbol{v}(t)\bigr) \\
&= \lambda \int_\Omega v^{\alpha p+1}(t)\,dx + \mu \int_\Gamma v_\Gamma^{\alpha q+1}(t)\,d\Gamma \quad \text{for a.a. } t \in (0, \infty)
\end{aligned}$$

や

$$\frac{4\alpha}{(\alpha+1)^2} \int_s^t \left|\partial_t \boldsymbol{v}^{(\alpha+1)/2}(\tau)\right|_{\boldsymbol{H}}^2 d\tau + \underline{E\bigl(\boldsymbol{v}(t)\bigr)} \le \underline{E\bigl(\boldsymbol{v}(s)\bigr)} \quad ({}^\forall s, t \in [0, \infty))$$

が得られる一方で，$\boldsymbol{v}'$ には十分な正則性が期待できない．ここで，

$$\begin{aligned}
I(\boldsymbol{z}) &:= \frac{1}{1+m} \int_\Omega z^{(1+m)/m}\,dx + \frac{1}{1+m} \int_\Gamma z_\Gamma^{(1+m)/m}\,d\Gamma \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+1} \int_\Omega z^{\alpha+1}\,dx + \frac{\alpha}{\alpha+1} \int_\Gamma z_\Gamma^{\alpha+1}\,d\Gamma.
\end{aligned}$$

- 定理の鍵

Key 1. $g(r) = |r|^{p-1}r$, $g_\Gamma(r) = |r|^{q-1}r$ に以下の cut off を行う:
$g_M, g_{\Gamma,M} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g_M(r) := \begin{cases} r^p & \text{if } |r| \le (M+1)^\alpha, \\ (M+1)^{\alpha p} & \text{if } |r| > (M+1)^\alpha, \end{cases}$$

$$g_{\Gamma,M}(r) := \begin{cases} r^q & \text{if } |r| \le (M+1)^\alpha, \\ (M+1)^{\alpha q} & \text{if } |r| > (M+1)^\alpha, \end{cases}$$

ただし，$M := 2(|v_0|_{L^\infty(\Omega)} + |v_{\Gamma,0}|_{L^\infty(\Gamma)})$.

$0 < T < \infty$ とし，問題を時間離散化し，次の不等式から $\gamma(\boldsymbol{v}) \in H^1(0,T;\boldsymbol{H})$ なる時間微分の正則性の獲得へつなげる:

$$\frac{4\alpha}{(\alpha+1)^2}\left(r^{(\alpha+1)/2} - s^{(\alpha+1)/2}\right)^2 \le (r^\alpha - s^\alpha)(r-s),$$

$$|r^\alpha - s^\alpha| \le \frac{2\alpha}{\alpha+1}\max\{r,s\}^{(\alpha-1)/2}\left|r^{(\alpha+1)/2} - s^{(\alpha+1)/2}\right| \quad ({}^\forall r, s \ge 0).$$

ただし，$\alpha = 1/m \ge 1$.

- 定理の鍵

Cut off $g_M, g_{\Gamma,M} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対する補助問題の解としては

$$v \in C\big([0,T];H\big) \cap L^\infty\big(0,T;V \cap L^\infty(\Omega)\big) \cap L^2(0,T;W),$$
$$v^{(\alpha+1)/2} = v^{(1+m)/2m} \in H^1(0,T;H),$$
$$\gamma(v) \in H^1(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V),$$
$$v_\Gamma \in C\big([0,T];H_\Gamma\big) \cap L^\infty\big(0,T;V_\Gamma \cap L^\infty(\Gamma)\big) \cap L^2(0,T;W_\Gamma),$$
$$v_\Gamma^{(\alpha+1)/2} = v_\Gamma^{(1+m)/2m} \in H^1(0,T;H_\Gamma),$$
$$\gamma(v_\Gamma) \in H^1(0,T;H_\Gamma) \cap L^\infty(0,T;V_\Gamma).$$

$0 < T < \infty$ とし，問題を時間離散化し，次の不等式から $\gamma(\boldsymbol{v}) \in H^1(0,T;\boldsymbol{H})$ なる時間微分の正則性の獲得へつなげる:

$$\frac{4\alpha}{(\alpha+1)^2}\Big(r^{(\alpha+1)/2} - s^{(\alpha+1)/2}\Big)^2 \le (r^\alpha - s^\alpha)(r-s),$$
$$|r^\alpha - s^\alpha| \le \frac{2\alpha}{\alpha+1}\max\{r,s\}^{(\alpha-1)/2}\Big|r^{(\alpha+1)/2} - s^{(\alpha+1)/2}\Big| \quad (^\forall r,s \ge 0).$$

- 定理の鍵

Cut off $g_M, g_{\Gamma,M} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対する補助問題の解としては

$$
\begin{aligned}
&v \in C\big([0,T];H\big) \cap L^\infty\big(0,T;V \cap L^\infty(\Omega)\big) \cap L^2(0,T;W),\\
&v^{(\alpha+1)/2} = v^{(1+m)/2m} \in H^1(0,T;H),\\
&\gamma(v) \in H^1(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V),\\
&v_\Gamma \in C\big([0,T];H_\Gamma\big) \cap L^\infty\big(0,T;V_\Gamma \cap L^\infty(\Gamma)\big) \cap L^2(0,T;W_\Gamma),\\
&v_\Gamma^{(\alpha+1)/2} = v_\Gamma^{(1+m)/2m} \in H^1(0,T;H_\Gamma),\\
&\gamma(v_\Gamma) \in H^1(0,T;H_\Gamma) \cap L^\infty(0,T;V_\Gamma).
\end{aligned}
$$

$0 < T < \infty$ とし，問題を時間離散化し，次の不等式から $\gamma(\boldsymbol{v}) \in H^1(0,T;\boldsymbol{H})$ なる時間微分の正則性の獲得へつなげる:

$$
\frac{4\alpha}{(\alpha+1)^2}\Big(r^{(\alpha+1)/2} - s^{(\alpha+1)/2}\Big)^2 \le (r^\alpha - s^\alpha)(r-s),
$$

$$
|r^\alpha - s^\alpha| \le \frac{2\alpha}{\alpha+1}\max\{r,s\}^{(\alpha-1)/2}\Big|r^{(\alpha+1)/2} - s^{(\alpha+1)/2}\Big| \quad ({}^\forall r, s \ge 0).
$$

- 定理の鍵

Key 2. 弱解としての空間方向の正則性は，Δ_Γ からあることから楕円型正則性の靴ひも理論によって獲得する:

$$\int_\Omega \partial_t \gamma(v) z dx + \int_\Gamma \partial_t \gamma(v_\Gamma) z_\Gamma d\Gamma + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla z dx + a \int_\Omega v z dx$$
$$+ \int_\Gamma \nabla_\Gamma v_\Gamma \cdot \nabla_\Gamma z_\Gamma d\Gamma + b \int_\Gamma v_\Gamma z_\Gamma d\Gamma = \int_\Omega g_M\bigl(\gamma(v)\bigr) z dx + \int_\Gamma g_{\Gamma,M}\bigl(\gamma(v_\Gamma)\bigr) z_\Gamma d\Gamma$$

$^\forall \boldsymbol{z} = (z, z_\Gamma) \in \boldsymbol{V}$ for a.a. $t \in (0,T)$. もし $z \in \mathcal{D}(\Omega)$ ならば $z_\Gamma = 0$ でさらに

$$-\Delta v(t) = g_M\Bigl(\gamma\bigl(v(t)\bigr)\Bigr) - a v(t) - \partial_t \gamma\bigl(v(t)\bigr) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega).$$

を得るが，一方で $g_M(\gamma(v)) - \partial_t \gamma(v) - av \in L^2(0,T;H)$ であるので $-\Delta v \in L^2(0,T;H)$ でさらに

$$\partial_t \gamma\bigl(v(t)\bigr) - \Delta v(t) + a v(t) = g_M\Bigl(\gamma\bigl(v(t)\bigr)\Bigr) \quad \text{in } H,$$

for a.a. $t \in (0,T)$. 次に，一般の $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}$ に対して，

$$\int_\Gamma \partial_t \gamma\bigl(v_\Gamma(t)\bigr) z_\Gamma d\Gamma + \bigl\langle \partial_{\boldsymbol{\nu}} v(t), z_\Gamma \bigr\rangle + \int_\Gamma \nabla_\Gamma v_\Gamma(t) \cdot \nabla_\Gamma z_\Gamma d\Gamma + b \int_\Gamma v_\Gamma(t) z_\Gamma d\Gamma$$
$$= \int_\Gamma g_{\Gamma,M}\Bigl(\gamma\bigl(v_\Gamma(t)\bigr)\Bigr) z_\Gamma d\Gamma, \quad \text{for a.a. } t \in (0,T).$$

- 定理の鍵

Key 2. 弱解としての空間方向の正則性は，Δ_Γ からあることから楕円型正則性の靴ひも理論によって獲得する:

$$\int_\Omega \partial_t \gamma(v) z dx + \int_\Gamma \partial_t \gamma(v_\Gamma) z_\Gamma d\Gamma + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla z dx + a \int_\Omega v z dx$$

$$+ \int_\Gamma \nabla_\Gamma v_\Gamma \cdot \nabla_\Gamma z_\Gamma d\Gamma + b \int_\Gamma v_\Gamma z_\Gamma d\Gamma = \int_\Omega g_M\bigl(\gamma(v)\bigr) z dx + \int_\Gamma g_{\Gamma,M}\bigl(\gamma(v_\Gamma)\bigr) z_\Gamma d\Gamma$$

${}^\forall \boldsymbol{z} = (z, z_\Gamma) \in \boldsymbol{V}$ for a.a. $t \in (0,T)$. もし $z \in \mathcal{D}(\Omega)$ ならば $z_\Gamma = 0$ でさらに

$$-\Delta v(t) = g_M\Bigl(\gamma\bigl(v(t)\bigr)\Bigr) - a v(t) - \partial_t \gamma\bigl(v(t)\bigr) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega).$$

を得るが，一方で $g_M(\gamma(v)) - \partial_t \gamma(v) - av \in L^2(0,T;H)$ であるので $-\Delta v \in L^2(0,T;H)$ でさらに

$$\partial_t \gamma\bigl(v(t)\bigr) - \Delta v(t) + a v(t) = g_M\Bigl(\gamma\bigl(v(t)\bigr)\Bigr) \quad \text{in } H,$$

for a.a. $t \in (0,T)$. 次に，一般の $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}$ に対して，

$$\int_\Gamma \partial_t \gamma\bigl(v_\Gamma(t)\bigr) z_\Gamma d\Gamma + \bigl\langle \partial_{\boldsymbol{\nu}} v(t), z_\Gamma \bigr\rangle + \int_\Gamma \nabla_\Gamma v_\Gamma(t) \cdot \nabla_\Gamma z_\Gamma d\Gamma + b \int_\Gamma v_\Gamma(t) z_\Gamma d\Gamma$$

$$= \int_\Gamma g_{\Gamma,M}\Bigl(\gamma\bigl(v_\Gamma(t)\bigr)\Bigr) z_\Gamma d\Gamma, \quad \text{for a.a. } t \in (0,T).$$

- 定理の鍵

Key 2. 弱解としての空間方向の正則性は，Δ_Γ からあることから楕円型正則性の靴ひも理論によって獲得する:

$$\int_\Omega \partial_t\gamma(v)z\,dx + \int_\Gamma \partial_t\gamma(v_\Gamma)z_\Gamma\,d\Gamma + \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla z\,dx + a\int_\Omega vz\,dx$$
$$+\int_\Gamma \nabla_\Gamma v_\Gamma\cdot\nabla_\Gamma z_\Gamma\,d\Gamma + b\int_\Gamma v_\Gamma z_\Gamma\,d\Gamma = \int_\Omega g_M\bigl(\gamma(v)\bigr)z\,dx + \int_\Gamma g_{\Gamma,M}\bigl(\gamma(v_\Gamma)\bigr)z_\Gamma\,d\Gamma$$

$^\forall \boldsymbol{z} = (z, z_\Gamma) \in \boldsymbol{V}$ for a.a. $t\in(0,T)$. もし $z\in\mathcal{D}(\Omega)$ ならば $z_\Gamma = 0$ でさらに

$$-\Delta v(t) = g_M\Bigl(\gamma\bigl(v(t)\bigr)\Bigr) - av(t) - \partial_t\gamma\bigl(v(t)\bigr) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega).$$

を得るが，一方で $g_M(\gamma(v)) - \partial_t\gamma(v) - av \in L^2(0,T;H)$ であるので $-\Delta v \in L^2(0,T;H)$ でさらに

$$\partial_t\gamma\bigl(v(t)\bigr) - \Delta v(t) + av(t) = g_M\Bigl(\gamma\bigl(v(t)\bigr)\Bigr) \quad \text{in } H,$$

for a.a. $t\in(0,T)$. 次に，一般の $\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{V}$ に対して，

$$\int_\Gamma \partial_t\gamma\bigl(v_\Gamma(t)\bigr)z_\Gamma\,d\Gamma + \bigl\langle \partial_{\boldsymbol{\nu}} v(t), z_\Gamma\bigr\rangle + \int_\Gamma \nabla_\Gamma v_\Gamma(t)\cdot\nabla_\Gamma z_\Gamma\,d\Gamma + b\int_\Gamma v_\Gamma(t)z_\Gamma\,d\Gamma$$
$$= \int_\Gamma g_{\Gamma,M}\Bigl(\gamma\bigl(v_\Gamma(t)\bigr)\Bigr)z_\Gamma\,d\Gamma, \quad \text{for a.a. } t\in(0,T).$$

まず，$-\Delta v \in L^2(0,T;H)$ と $v_\Gamma \in L^2(0,T;V_\Gamma)$ を得ているので楕円型正則性から

$$v \in L^2\Bigl(0,T;H^{3/2}(\Omega)\Bigr).$$

次に，ラプラシアンの評価も含めたトレース定理から

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}} v \in L^2(0,T;H_\Gamma)$$

が得られるので，先の弱形式で比較を行えば $\Delta_\Gamma v_\Gamma \in L^2(0,T;H_\Gamma)$ でさらに

$$\partial_t \gamma\Bigl(v_\Gamma(t)\Bigr) + \partial_{\boldsymbol{\nu}} v(t) - \Delta_\Gamma v_\Gamma(t) + b v_\Gamma(t) = g_{\Gamma,M}\Bigl(\gamma\Bigl(v_\Gamma(t)\Bigr)\Bigr) \quad \text{in } H_\Gamma,$$

for a.a. $t \in (0,T)$. $-\Delta_\Gamma v_\Gamma \in L^2(0,T;H_\Gamma)$ から $v_\Gamma \in L^2(0,T;H^2(\Gamma))$ が得られるので楕円型正則性を再び用いると境界の正則性が上がっているため

$$v \in L^2\Bigl(0,T;H^2(\Omega)\Bigr)$$

まで正則性が上がり，$\boldsymbol{v} = (v, v_\Gamma)$ が方程式を a.e. で満たすことまで分かる.

L^∞-評価からオリジナルの問題の局所解の存在定理を保証できる．そこで

$$T_{\max} := \sup\Bigl\{\delta > 0 \ : \ 一意解を\ [0,\delta]\ で持つ\Bigr\}.$$

と置いておく.

Key 3. もし，$\mathcal{W}$の不変性，すなわち，

$$\boxed{\boldsymbol{v}_0 \in \mathcal{W} \cap \boldsymbol{L}^\infty \text{ ならば } \boldsymbol{v}(t) \in \mathcal{W} \cap \boldsymbol{L}^\infty \quad ({}^\forall t \in [0, T_{\max}))}$$

が得られていれば，

$$\varphi_2\bigl(\boldsymbol{v}(t)\bigr) \le x_0$$

を利用してtに依存しない

L^∞-評価

Alikakos (1979),

Nakao (1985) $(m > 1)$

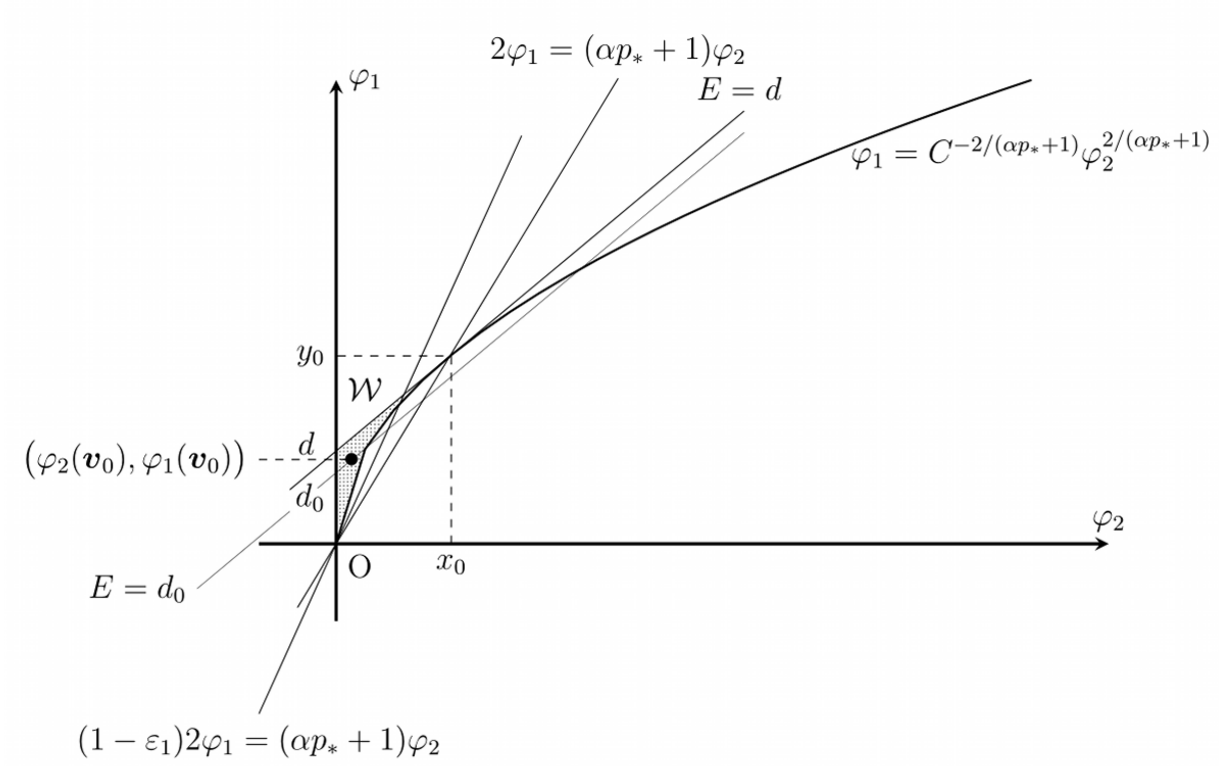
を$(0 < m < 1)$に拡張した

Fila–Filo (1990) の結果を

応用し(要仮定$1 < p < 5m$)

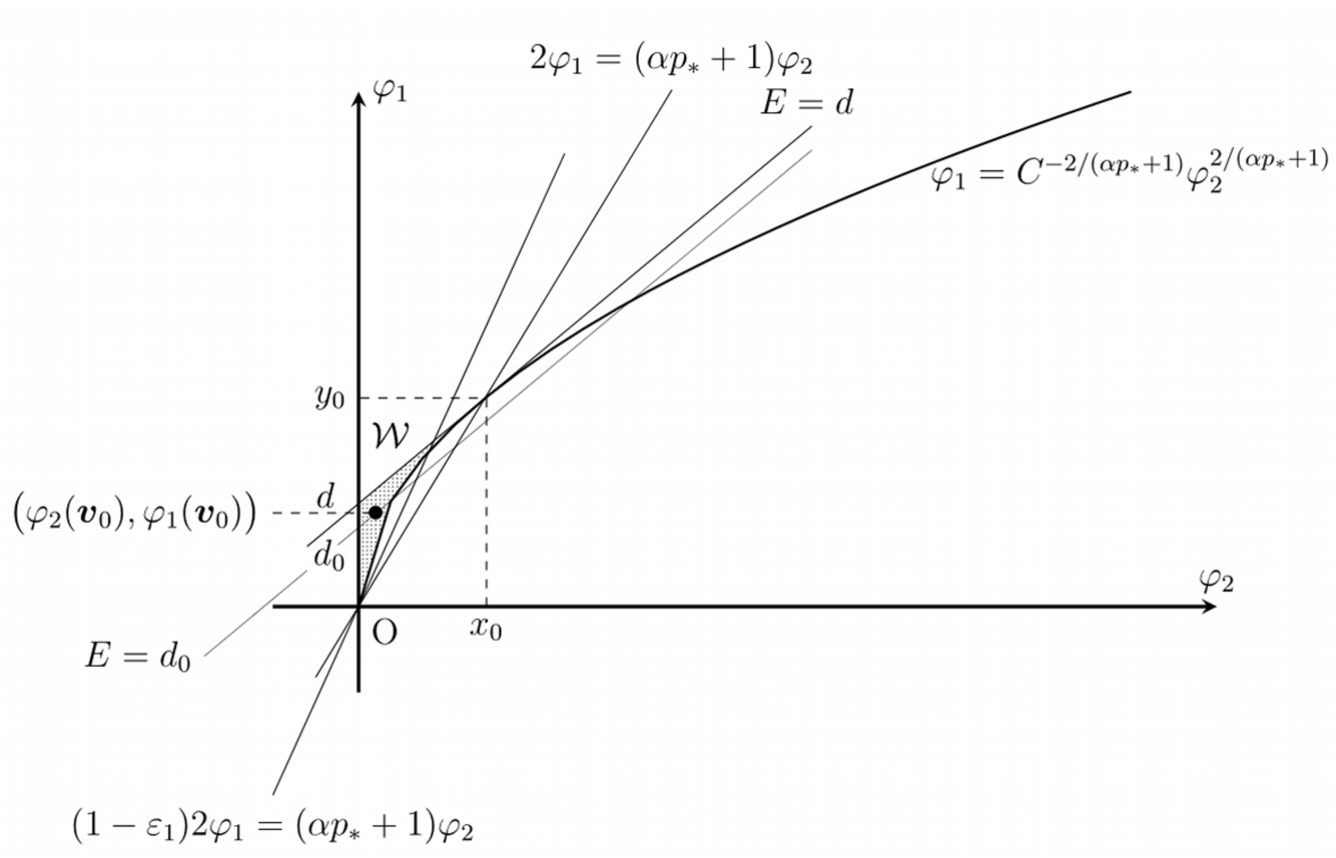
$$T_{\max} = \infty$$

が分かる．



Key 3. 「$\boldsymbol{v}_0 \in \mathcal{W} \cap \boldsymbol{L}^\infty$ ならば $\boldsymbol{v}(t) \in \mathcal{W} \cap \boldsymbol{L}^\infty$ $({}^\forall t \in [0, T_{\mathsf{max}}))$」の仮定の下まず，$E(\boldsymbol{v}(t))$ の単調減少性はすぐに分かる．次に $\varepsilon_1 \in (0,1)$ が存在して

$$(1-\varepsilon_1)2\varphi_1\big(\boldsymbol{v}(t)\big) \geq (\alpha p_* + 1)\varphi_2\big(\boldsymbol{v}(t)\big) \quad \big({}^\forall t \in [0, T_{\mathsf{max}})\big).$$



$\varepsilon_1 \in (0,1)$ が存在して

$$(1-\varepsilon_1)2\varphi_1\big(\boldsymbol{v}(t)\big) \ge (\alpha p_* + 1)\varphi_2\big(\boldsymbol{v}(t)\big) \quad \big({}^\forall t \in [0, T_{\mathsf{max}})\big).$$

よって質量保存の式から

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} I\big(\boldsymbol{v}(t)\big) + 2\varphi_1\big(\boldsymbol{v}(t)\big) - (\alpha p_* + 1)\varphi_2\big(\boldsymbol{v}(t)\big) \\ &\ge \frac{d}{dt} I\big(\boldsymbol{v}(t)\big) + 2\varepsilon_1\varphi_1\big(\boldsymbol{v}(t)\big) \\ &\ge \frac{d}{dt} I\big(\boldsymbol{v}(t)\big) + \varepsilon_1 C_{\mathsf{C}} \big|\boldsymbol{v}(t)\big|_{\boldsymbol{V}}^2 \end{aligned}$$

つまり，$1 < \alpha < 5$ に注意すれば，定数 $C(\alpha) > 0$ が存在して

$$\frac{d}{dt} I\big(\boldsymbol{v}(t)\big) \le -C(\alpha) I\big(\boldsymbol{v}(t)\big)^{2/(\alpha+1)}$$

for a.a. $t \in (0, T_{\mathsf{max}})$．さらに $0 < 2/(\alpha+1) < 1$ にも注意しながら

$$I\big(\boldsymbol{v}(t)\big) \le \left(\left[I(\boldsymbol{v}_0)^{(\alpha-1)/(\alpha+1)} - \frac{\alpha-1}{\alpha+1} C(\alpha) t\right]^+\right)^{(\alpha+1)/(\alpha-1)}.$$

Key 4. 最後に $\mathcal{W}$ の不変性を示す.

$\boldsymbol{v}_0 \in \mathcal{W} \cap \boldsymbol{L}^\infty$ ならば $\boldsymbol{v}(t) \in \mathcal{W} \cap \boldsymbol{L}^\infty$ $({}^\forall t \in [0, T_{\mathrm{max}}))$.

実際,

$$\mathcal{W} := \left\{ \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V} \setminus \{\boldsymbol{0}\} : \begin{array}{l} z \ge 0, z_\Gamma \ge 0, \\ E(\boldsymbol{z}) < d, \\ 2\varphi_1(\boldsymbol{z}) > (\alpha p_* + 1)\varphi_2(\boldsymbol{z}) \end{array} \right\} \cup \{\boldsymbol{0}\},$$

$$d = \inf \Big\{ E(\boldsymbol{z}) : \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V} \setminus \{\boldsymbol{0}\}, 2\varphi_1(\boldsymbol{z}) = (\alpha p_* + 1)\varphi_2(\boldsymbol{z}) \Big\}.$$

にあるポテンシャルの深さ d は

$$\varphi_2(\boldsymbol{z}) \le C\varphi_1(\boldsymbol{z})^{(\alpha p_* + 1)/2} \quad ({}^\forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V})$$

を満たす最良定数 $C > 0$ によって

$$d = \frac{\alpha p_* - 1}{2} \left(\frac{2}{\alpha p_* + 1} \right)^{(\alpha p_* + 1)/(\alpha p_* - 1)} C^{-2/(\alpha p_* - 1)},$$

と表現されることと, 適切な近似問題を補助的に利用することで証明できる.
ここで, $(\lambda, \mu) = (1, 0)$ の際には $p/m + 1 = \alpha p + 1 \le 6$ を用いる. $\square$

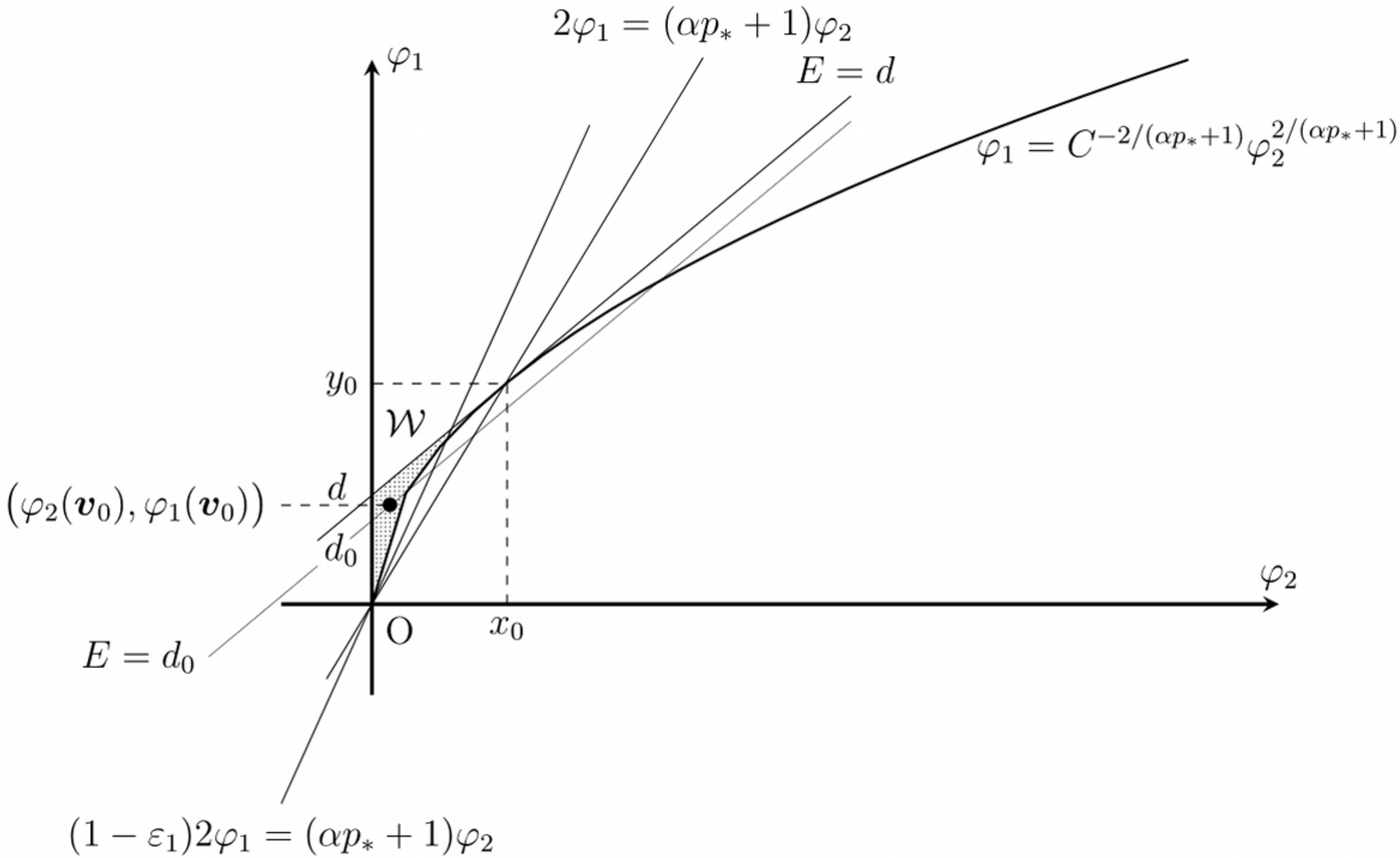
6. まとめと今後の課題

☑ 動的境界条件下でのStefan問題の弱形式を例に，単調項βを拡散項に持つ非線形拡散方程式に対して，Goldstein–Miranville–Schimperna (2011) らが提唱した総質量保存則を保つモデル(GMS)の適切性の結果を紹介し(定理 3.1)，その極限として特徴付けることで弱解の存在定理を証明した．(定理 4.1)

☑ この着想は境界条件とは無関係で，一般に，単調項βを拡散項に持つ非線形拡散方程式に対して，抽象発展方程式による接近を試みる場合の単調項βに課す増大条件の仮定が緩和できることを紹介した．Damlamian–Kenmochi (1999) で議論された「下半連続拡張」による増大条件の緩和はCahn–Hilliard系からの接近で回避できることを紹介した．

☑ 摂動項を持つ動的境界条件下でのfast diffusion 方程式に対して，Filo (1987) の研究を元に，既存の結果を応用し有限時刻消滅を証明した．(定理 5.1, 5.2)

□ $E(v_0) < 0$などの場合の解の爆発について (concavity methodが有効!?).


$2\varphi_1 = (\alpha p_* + 1)\varphi_2$
$E = d$
φ_1
$\varphi_1 = C^{-2/(\alpha p_*+1)}\varphi_2^{2/(\alpha p_*+1)}$
y_0
$\mathcal{W}$
d
$(\varphi_2(\boldsymbol{v}_0), \varphi_1(\boldsymbol{v}_0))$
d_0
φ_2
O
x_0
$E = d_0$
$(1 - \varepsilon_1)2\varphi_1 = (\alpha p_* + 1)\varphi_2$