Scattering problem for semilinear wave equation with a potential

谷口 晃一　中央大学大学院理工学研究科　修士課程 2 年

1　導入

次の半線形波動方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + V(x)u + |u|^{p-1}u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x),\, \partial_t u(x,0) = u_1(x) & \text{in } \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで $p > 1$ とし, ポテンシャル $V(x)$ は次を満たす非負な実数値可測関数とする. c_0, $\epsilon_0 > 0$ に対して

$$0 \le V(x) \le \frac{c_0}{|x|^2(|x|^{\epsilon_0} + |x|^{-\epsilon_0})}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \tag{1.2}$$

が成り立つとし, さらに, $V(x) \in C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, $0 < \alpha < 1$ と仮定する. ここで, $C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ は $\mathbb{R}^3$ 上の局所 Hölder 連続な関数の空間である. 本講演では, Georgiev-Visciglia [1] によって示された全空間におけるポテンシャル付き波動方程式に対する Strichartz 評価を用いて, 初期値問題 (1.1) の時間大域解の存在と散乱問題を考える.

2　Besov 空間

本研究では, 斉次 Besov 空間を用いて時間大域解の存在の結果を記す. 以下, 斉次 Besov 空間を導入する. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を Schwartz 空間とし, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の双対空間とする. また $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を Littlewood-Paley の 2 進単位分解とする:

$$\hat{\phi}(\xi) \ge 0, \quad \text{supp}\ \hat{\phi} \subset \{\xi : 1/2 \le \xi \le 2\}, \quad \hat{\phi}(\xi) = \hat{\phi}(|\xi|)$$
$$\hat{\phi}_j(\xi) = \hat{\phi}(2^{-j}\xi), \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\phi}_j(\xi) = 1 \quad (\xi \ne 0).$$

ここで, $\hat{\phi}$ は ϕ の Fourier 変換である.

Definition 2.1 (斉次 Besov 空間). “$1 \le p, q \le \infty$, $s < d/p$” あるいは “$1 \le p \le \infty$, $q = 1$, $s = d/p$”とする. このとき, $\|\cdot\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)}$ を

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)} := \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsq} \|\phi_j * f\|^q_{L^p(\mathbb{R}^d)} \right\}^{1/q} \tag{2.1}$$

と定義し, 斉次 Besov 空間 $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ を

$$\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in \mathcal{S}' \;\middle|\; f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \phi_j * f \text{ in } \mathcal{S}',\ \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)} < \infty \right\} \tag{2.2}$$

と定義する.

Remark 2.1. 通常, 斉次 Besov 空間は,

$$\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P} \;\middle|\; \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)} < \infty \right\} \tag{2.3}$$

と定義する. ここで, $\mathcal{P}$ は多項式全体のなす線形空間である. $f \in \mathcal{S}'$ に対して, $\|\cdot\|_{\dot{B}^s_{p,q}}$ はノルムの条件を満たしていない. 実際, 任意の $f \in \mathcal{P}$ に対して, $\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = 0$ となる. このような事情から斉次 Besov 空間を定義する場合は, (2.3) のように $\mathcal{S}'$ ではなく $\mathcal{S}'$ の部分集合 $\mathcal{P}$ で $\mathcal{S}'$ を割った, 商空間 $\mathcal{S}'/\mathcal{P}$ で考えなければならない (澤野 [3], Triebel [4] を参照). しかしながら, (2.3) で定義された Besov 空間は商空間であるため, そのままでは偏微分方程式に応用することが出来ない. そのため, (2.2) で定義された Besov 空間を導入する必要がある. “$1 \le p, q \le \infty$, $s < d/p$” あるいは “$1 \le p \le \infty$, $q = 1$, $s = d/p$” という条件の下で, (2.2) で定義された Besov 空間と (2.3) で定義された Besov 空間が Banach 空間として同型であることが知られている (Kozono-Yamazaki [2], 澤野 [3] を参照).

以下, $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ は (2.3) で定義された Besov 空間とする.

3 Strichartz 評価式

この節では, (1.1) の局所可解性や大域的挙動の研究において重要な道具である Strichartz 評価式について述べる. (1.1) の分散型評価式と Strichartz 評価式はすでに Georgiev-Visciglia [1] によって示されている.

指数の組 (s, θ, p) が “許容指数組” であるとは, 次を満たすときをいう:

$$0 < s < 3,\ 2 < \theta, q < \infty,\quad \frac{1}{\theta} = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) - s,\quad 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \le s.$$

Lemma 3.1 (Strichartz 評価, [1]). $0 \le s < 3/2$ とし, (s,θ,q) を許容指数組, θ', q' は $1/\theta + 1/\theta' = 1/q + 1/q' = 1$ を満たす実数とする. 次の非斉次波動方程式の初期値問題：

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + V(x)u = F & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x),\, \partial_t u(x,0) = u_1(x) & \text{in } \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{3.1}$$

の解 u に対して次が成り立つ.

$$\|u\|_{L^\theta \dot{B}^0_{q,2}} + \|u\|_{L^\infty \dot{H}^s} \le C\big(\|u_0\|_{\dot{H}^s} + \|u_1\|_{\dot{H}^{s-1}} + \|F\|_{L^{\theta'} \dot{B}^{2s-1}_{q',2}}\big).$$

4 主結果

Strichartz 評価を用いて縮小写像の原理を適用することで (1.1) の局所可解性を得ることができる. さらにエネルギー空間 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$ 上では, エネルギー不等式が成り立ち, それを用いることで時間局所解を時間大域的に延長できる. また, 非線形項 $|u|^{p-1}u$ の指数 p が Sobolev 臨界指数のときは, 初期値を十分小さくとれば, (1.1) の大域可解性を得ることができる. このことを次の定理にまとめる.

p_s を空間 3 次元における Sobolev 臨界指数とする:

$$p_s = 1 + \frac{4}{3-2s}.$$

Theorem 4.1 (時間大域解). $1/2 \le s < 3/2$ とする.
(i) $1 < p < p_s$ かつ $p \in \mathbb{N}$ のとき, ある許容指数組 $(1,\theta,q)$ が存在し, 任意の初期値 $(u_0,u_1) \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^3) \times \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^3)$ に対してある時刻 $T > 0$ が存在し, 初期値問題 (1.1) の時間局所解 u が $C((-T,T)\,;\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)) \cap L^\theta_{loc}((-T,T)\,;\dot{B}^{s-\frac{1}{2}}_{q,2}(\mathbb{R}^3))$ で一意的に存在する. 特に, $s=1$ のときは $T=\infty$ とすることができる.
(ii) $p = 1 + 4/(3-2s) \in \mathbb{N}$ のとき, 十分小さい初期値 $(u_0,u_1) \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^3) \times \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^3)$ に対して, 初期値問題 (1.1) の時間大域解 u が $C(\mathbb{R}\,;\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)) \cap L^6(\mathbb{R}\,;\dot{B}^{s-\frac{1}{2}}_{\frac{18}{5},2}(\mathbb{R}^3))$ で一意的に存在する.

次に, エネルギー空間上で初期値問題 (1.1) の解が次の線形波動方程式：

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ w(x,0) = w_0(x),\, \partial_t w(x,0) = w_1(x) & \text{in } \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{4.1}$$

の解に漸近することを示す. E をエネルギー空間 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$ とし, エネルギーノルムを

$$\|u(t)\|_E \overset{\text{def}}{=} \left[\frac{1}{2}\Big\{\|u(t)\|^2_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)} + \|\partial_t u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\Big\}\right]^{1/2},$$

により定義する. $U(t)$ を (1.1) の解作用素, $U_0(t)$ を (4.1) の解作用素とする：

$$U(t)\boldsymbol{f} = (u(t), \partial_t u(t)), \quad U_0(t)\boldsymbol{f} = (w(t), \partial_t w(t)) \quad \text{for any } \boldsymbol{f} \in E.$$

エネルギー空間 E の部分集合 E_R を

$$E_R \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\boldsymbol{f} = (u_0, u_1) \in E \ : \ \|\boldsymbol{f}\|_E \leq R\right\},$$

により定義する.

Theorem 4.2 (波動作用素の存在). ある定数 $R > 0$ が存在し, 次の (i)–(ii) が成り立つ.
(i) 任意の $\boldsymbol{f} = (u_0, u_1) \in E_R$ に対して，次を満たす $\boldsymbol{f}^{\pm} \in E$ が存在する:

$$\|U(t)\boldsymbol{f} - U_0(t)\boldsymbol{f}^{\pm}\|_E \to 0 \ \ (t \to \pm\infty).$$

(ii) 波動作用素 $W_{\pm} : E_R \to E$ を

$$W_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} s - \lim_{t \to \pm\infty} U_0(-t)U(t) : \ \boldsymbol{f} \ \mapsto \ \boldsymbol{f}^{\pm}$$

で定義する．このとき，波動作用素 $W_{\pm}$ は E_R から $Ran(W_{\pm})$ への全単射である.

本研究は, 今回述べた時間大域解, 散乱問題の結果を外部領域に拡張することを目標としている.

参考文献

[1] V. Georgiev and N. Visciglia, *Decay estimates for the wave equation with potential*, Comm. Partial Differential Equations **28** (2003), no. 7-8, 1325–1369.

[2] H.Kozono and M. Yamazaki, *Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data*, Comm. Partial Differential Equations **19** (1994), no. 5-6, 959–1014.

[3] 澤野 嘉宏, ベゾフ空間論, 日本評論社, 2011.

[4] H. Triebel, *Theory of function spaces*, Monogr. Math., vol. 78, Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.