

非有向閉曲面の \mathbb{Z}_2 係数 1 次ホモロジー上の 交叉形式を保つ自己同型群の有限表示

大森 源城

東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻修士 2 年

1 導入

N_g を種数 g の連結な向き付け不可能閉曲面、すなわち射影平面 g 個の連結和、 $\cdot : H_1(N_g; \mathbb{Z}_2) \times H_1(N_g; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ を N_g の $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 係数 1 次ホモロジー群 $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$ 上の交叉形式とする。 N_g のモデルとして g 個の境界成分を持つ球面の各境界成分にメビウスの帯を貼り合せたものを考えることにし、メビウスの帯を貼り合せた印として円 (球面の境界) の中に \times を描くことにする (図 1, 3 を参照)。この N_g の表記は、 g 個の境界成分を持つ球面の各境界成分の対蹠点を同一視したものと同一であることに注意する。このとき、 $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$ を、交叉形式 \cdot を保つ $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$ 上の自己同型写像全体からなる $\text{Aut } H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$ の部分群とする。図 1 のような $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$ の基底 $\{x_1, x_2, \dots, x_g\}$ を取ることにより $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$ は \mathbb{Z}_2^g 上の直行変換からなる群 $O(g, \mathbb{Z}_2) = \{A \in GL(g, \mathbb{Z}_2) \mid {}^tAA = E\}$ と同型である為、 $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$ は有限群である。特に、 $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$ は有限表示可能である。更に、Korkmaz [1] と Szepietowski [5] により、次の同型対応が知られている。

$$\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot) \cong \begin{cases} \text{Sp}(2h, \mathbb{Z}_2) & \text{if } g = 2h + 1, \\ \text{Sp}(2h, \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2^{2h+1} & \text{if } g = 2h + 2. \end{cases}$$

本稿では $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$ の明確な有限表示について述べ、その応用として $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$ の 1, 2 次ホモロジー群の計算についても述べる。

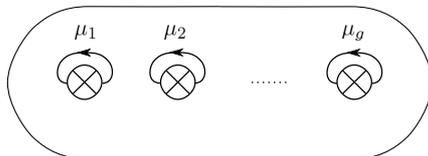


図 1: ホモロジー類 x_1, x_2, \dots, x_g を代表する N_g 上の単純閉曲線 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_g$.

2 準備

2.1 群の表示

任意の群 G に対し, ある集合 X を生成系とする自由群 F (ここでは $\#X < \infty$ でなくても良い) と全射準同型 $\pi: F \rightarrow G$ が存在する. $N := \ker \pi$ の正規生成系を R とする (ここで, 一般に群 G とその正規部分群 N に対し, $R \subset N$ が N の G 上の正規生成系とは, $\{grg^{-1} | g \in G, r \in R\}$ が N の生成系となることである). このとき, G は生成系 X と関係式 R からなる表示を持つといい, $\langle X | R \rangle := F/N$ を G の表示という. また, X と R の元を並べて, G は生成系 $x_1, x_2, \dots \in X$ と関係式 $r_1, r_2, \dots \in R$ からなる表示を持つといったり, $\langle x_1, x_2, \dots | r_1, r_2, \dots \rangle$ を G の表示ともいったりもする. 任意の群 G は表示を持ち, 特に $\#X < \infty$ かつ $\#R < \infty$ のとき, G は有限表示を持つという. ある群が与えられた時, それが有限表示可能かどうかは重要な問題である.

2.2 群のホモロジー

群 G に対し, $(G, 1)$ -型の Eilenberg-MacLane 複体 Y とは, ホモトピー群が $\pi_1(Y) = G, \pi_n(Y) = 1 (n \neq 1)$ となる CW 複体のことである. Y は G に対しホモトピーの差を除いて一意に定まるので, この Y を $K(G, 1)$ と書くことにする. このとき, 群 G のホモロジーとは $(G, 1)$ -型の Eilenberg-MacLane 複体 $K(G, 1)$ のホモロジーのことである (すなわち, $H_n(G; \mathbb{Z}) := H_n(K(G, 1); \mathbb{Z})$). 特に $n = 1$ のとき, $H_1(G; \mathbb{Z}) \cong G/[G, G]$ となることに注意する (ここで $[G, G]$ は G の交換子群). また, G に群の表示 F/N が与えられたとき, 次のような公式が成り立つ.

$$H_2(G; \mathbb{Z}) \cong \frac{K \cap [F, F]}{[K, F]}.$$

これを Hopf の公式という. この公式により G の表示が与えられていれば $H_2(G; \mathbb{Z})$ を計算する術は与えられているが, この計算の難易度は与えられた G の表示に大きく依存してくる.

2.3 $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$ の生成系

N_g 上の双側な単純閉曲線 γ に対し, γ に沿った Dehn twist とは, 次のような操作で得られる N_g 上の自己微分同相写像のことである. まず, γ の N_g 内での管状近傍 N を取る (N はアニュラスと微分同相となる). このとき, N を γ で切って 360 度 (アニュラスに適当な向きを入れ) 右回転させ再度貼り直すことによって構成される N 上の写像 τ_γ を考える (図 2 参照). γ に沿った N_g 上の Dehn twist t_γ とは, この τ_γ を恒等写像で N_g 上に拡張して得られ

る N_g 上の自己微分同相写像のことである．曲面が向き付け可能な場合と異なり， N_g 上の Dehn twist を考える場合は，Dehn twist を定義する各曲線ごとに捻る方向を指定する必要があることに注意する．

図 3 のような N_g 上の単純閉曲線 $\alpha_1, \dots, \alpha_{g-1}, \beta$ に対し，それらに沿った Dehn twist をそれぞれ $t_{\alpha_1}, \dots, t_{\alpha_{g-1}}, t_\beta$ とする．それぞれの曲線の横の矢印で Dehn twist の正の向きを定義する． N_g 上の自己微分同相写像 $f : N_g \rightarrow N_g$ に対し f の $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$ への作用を f_* とし， $a_i := (t_{\alpha_i})_*$ ($i = 1, \dots, g-1$)， $b = (t_\beta)_*$ とおく．このとき， a_i ($i = 1, \dots, g-1$)， b は 1 章で与えられた $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$ の基底 $\{x_1, x_2, \dots, x_g\}$ に対し，以下のように作用することが分かる．

$$a_i : \begin{cases} x_i & \mapsto x_{i+1}, \\ x_{i+1} & \mapsto x_i, \\ x_k & \mapsto x_k \quad (k \neq i, i+1), \end{cases} \quad b : \begin{cases} x_1 & \mapsto x_2 + x_3 + x_4, \\ x_2 & \mapsto x_1 + x_3 + x_4, \\ x_3 & \mapsto x_1 + x_2 + x_4, \\ x_4 & \mapsto x_1 + x_2 + x_3, \\ x_k & \mapsto x_k \quad (k \neq 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

Mccarthy-Pinkall [2] は， $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$ が a_1, \dots, a_{g-1}, b よって生成されることを示している．

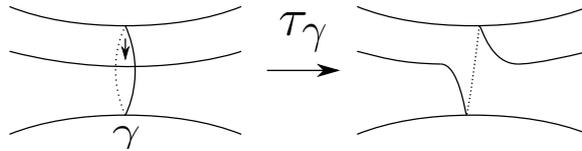


図 2: アニュラス上の写像 τ_γ .

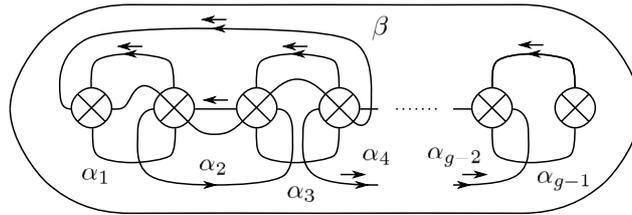


図 3: N_g 上の単純閉曲線 $\alpha_1, \dots, \alpha_{g-1}, \beta$.

3 主結果

定理 3.1. $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$ は $g = 1$ のとき自明な群となり，また $g = 2, 3$ のとき生成系を a_1, \dots, a_{g-1} ， $g \geq 4$ のとき生成系を a_1, \dots, a_{g-1}, b とし，以下のような関係式からなる群表示を持つ：

1. $a_i^2 = b^2 = 1$ $(i = 1, \dots, g-1),$
2. $(a_i a_j)^2 = 1$ $(|i-j| > 1, g \geq 4),$
3. $(a_i a_{i+1})^3 = 1$ $(i = 1, \dots, g-2, g \geq 3),$
4. $(a_i b)^2 = 1$ $(i \neq 4, g \geq 4),$
5. $(a_4 b)^3 = 1$ $(g \geq 5),$
6. $(a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 b)^{12} = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 b)^9$ $(g \geq 7),$
7. $[a_{g-5}, b_{\frac{g-2}{2}}] = 1$ $(g \geq 8 \text{ even}),$

ただし, $b_0 = a_1, b_1 = b, b_2 = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 b)^5,$

$b_{i+1} = (b_{i-1} a_{2i} a_{2i+1} a_{2i+2} a_{2i+3} b_i)^5 (b_{i-1} a_{2i} a_{2i+1} a_{2i+2} a_{2i+3})^{-6}$ $(2 \leq i \leq \frac{g-4}{2}),$
 $[X, Y] = XYX^{-1}Y^{-1}$ とする .

定理 3.2. $g \geq 9$ もしくは $g = 7$ のとき, $H_2(\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot); \mathbb{Z}) = 0$ と
なる .

注意 3.3. 定理 3.1 は $g = 1, 2$ の場合は明らかであり, $g = 3, 4$ の場合に関し
ては Szepietowski [4] によって与えられている . また, 定理 3.2 の g が奇数
の場合は Stein [3] により示されていることに注意する .

注意 3.4. 定理 3.1 の表示を用いて計算することにより, $g \geq 1$ に対し $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$
の 1 次ホモロジー群は以下ようになる .

$$H_1(\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot); \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & (g = 1, g \geq 7), \\ \langle [a_1] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 & (g = 2, 3, 5, 6), \\ \langle [a_1], [b] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & (g = 4). \end{cases}$$

この結果は $g \geq 7$ のとき Korkmaz [1] により示されている .

参考文献

- [1] M. Korkmaz, *First homology group of mapping class group of nonorientable surfaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 123 (1998), 487-499.
- [2] J. D. McCarthy and U. Pinkall. *Representing homology automorphisms of nonorientable surfaces*, Max Planck Inst. Preprint MPI/SFB 85-11, revised version written on 26 Feb 2004, available from <http://www.math.msu.edu/~mccarthy/publications/selected.papers.html>.
- [3] M. R. Stein, *Surjective stability in dimension 0 for K_2 and related functors*, Trans. Amer. Math. Soc. 178 (1973), 165-191.
- [4] B. Szepietowski. *Crosscap slides and the level 2 mapping class group of a nonorientable surface*, Geom. Dedicata 160 (2012), 169-183.
- [5] B. Szepietowski, *Low dimensional linear representations of the mapping class group of a nonorientable surface*, arXiv:1303.1917 [math.GT], 2013.