

Splitting of singular fibers in barking families

奥田喬之* (九州大学大学院数理学研究院)

概要

複素曲線族に現れる特異ファイバーの正則近傍は「リーマン面の退化」と呼ばれ、その位相同値類が曲面写像類群との間に位相モノドロミーを通した良い対応関係を持つことが知られている。これをさらに別のパラメータによって摂動した複素曲線族の族であって、もとの特異ファイバーがより簡単な特異ファイバー達へ分裂するようなもの、即ち「分裂族」の存在性は興味深い問題である。本レポートでは、講演で扱う「剥離変形族」をはじめ、こうした研究対象達の概観を紹介する。

1 特異ファイバーの分裂

滑らかな複素曲面 M から複素数平面 \mathbb{C} 上の原点中心の開円板 Δ への固有全射正則写像 $\pi: M \rightarrow \Delta$ を考えよう。このとき各 $s \in \Delta$ 上のファイバー、即ち s の逆像 $X_s := \pi^{-1}(s)$ は (滑らかとは限らないコンパクトな) 複素曲線となるため、 $\pi: M \rightarrow \Delta$ を複素曲線の族とみなすことができる。特に π が $0 \in \Delta$ にのみ特異値を持つと仮定すると、一般ファイバー X_s ($s \neq 0$) は全て滑らかな複素曲線である一方、中心ファイバー X_0 のみが特異点を持ち得る。一般ファイバーが中心に近づくにつれて潰れていく様から、こうした $\pi: M \rightarrow \Delta$ をリーマン面の退化と呼ぶ (図 1 左)。リーマン面の退化は、コンパクトな複素曲面が持つファイバー構造における特異ファイバーの正則近傍として現れる、小平邦彦による楕円曲面の結果 [K] に端を発した研究対象である。

ここでは、退化した特異ファイバーの「分裂」について考えていきたい。唯一つの特異ファイバー X_0 を持つリーマン面の退化 $\pi: M \rightarrow \Delta$ を、新たな複素パラメータ t によって摂動することで複素曲線族 $\pi_t: M_t \rightarrow \Delta_t$ が得られたとしよう。この π_t が複数の特異ファイバー $X_{t,s_1}, X_{t,s_2}, \dots, X_{t,s_k}$ ($s_1, s_2, \dots, s_k \in \Delta_t$) を持つとき、特異ファイバー X_0 は $X_{t,s_1}, X_{t,s_2}, \dots, X_{t,s_k}$ に分裂するという。

この分裂を法とした分類、即ち原子ファイバー (それ以上分裂することができない特異ファイバー) の分類は非常に興味深い。例えばレフシェッツファイバーや、多重リーマン面 (複素曲線としては滑らかだが重複度を持つもの) は原子ファイバーであることが知られている。一方、それ以外の特異ファイバーは全てレフシェッツファイバーや多重リーマン面に分裂すると予想されているが、一般にはまだ示されていない。ただ、一部の特異ファイバーの分裂可能性については解決しており、超楕円的な退化に対しては二重被覆を経由した分裂の構成法 ([Mo], [H], [AA]) が与えられた。より多くのクラスに対する分裂の構成法として、後述する「剥離変形」が高村茂 [T] によって構築され、筆者 [O3] の手によってさらなる一般化が進められている。

後のために、上で述べた“摂動による分裂”を正確に定義しておこう。 Δ^\dagger を複素数平面 \mathbb{C} 上の十分に小さい原点中心の開円板とする。ある複素 3 次元多様体 \mathcal{M} から $\Delta \times \Delta^\dagger$ への固有平坦全射正則写像 $\Psi: \mathcal{M} \rightarrow \Delta \times \Delta^\dagger$ を考えよう。第二射影 $\text{pr}_2: \Delta \times \Delta^\dagger \rightarrow \Delta^\dagger$ との合成 $\text{pr}_2 \circ \Psi: \mathcal{M} \rightarrow \Delta^\dagger$ が沈め込みであると仮定する。このとき、各 $t \in \Delta^\dagger$ に対して、 $M_t := (\text{pr}_2 \circ \Psi)^{-1}(t)$ は滑らかな複素曲面であり、 $\Delta_t := \Delta \times \{t\}$ とおくと $\pi_t := \Psi|_{M_t}: M_t \rightarrow \Delta_t$ は複素曲線の族となる。ここで、与えられたリーマン面の退化 $\pi: M \rightarrow \Delta$ が $\pi_0: M_0 \rightarrow \Delta_0$ と一致するとき、 $\pi_t: M_t \rightarrow \Delta_t$ ($t \neq 0$) は π を摂動したものとみなすことができる。こうした“複素曲線族の族” $\Psi: \mathcal{M} \rightarrow \Delta \times \Delta^\dagger$ を退化 $\pi: M \rightarrow \Delta$ に対する変形族と呼び、特に、各 $\pi_t: M_t \rightarrow \Delta_t$ ($t \neq 0$) が複数の特異ファイバーを持つとき、分裂族と呼ぶ (図 1 右)。つまり、分裂族の存在性を以て特異ファイバーの分裂可能性は定義される。

* E-mail: t-okuda@math.kyushu-u.ac.jp Webpage: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~t-okuda/>

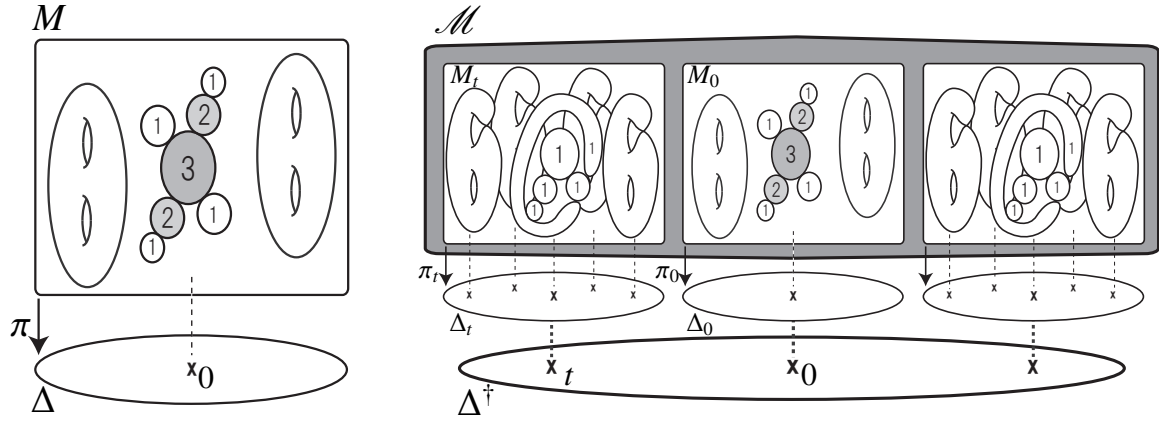


図1 リーマン面の退化 $\pi: M \rightarrow \Delta$ と、それに対する剥離変形による分裂族 $\Psi: \mathcal{M} \rightarrow \Delta \times \Delta^\dagger$ の例。

2 剥離変形族

次に、剥離変形によるリーマン面の退化に対する分裂族の構成法を紹介しよう。

まず、退化の線型性を定義する。与えられたリーマン面の退化 $\pi: M \rightarrow \Delta$ の特異ファイバー X_0 は（必要ならば適当にブローアップすることで）高々正規交差しを持たず、且つ各既約成分が滑らかであると仮定する。 X_0 の一つの既約成分 Θ に着目し、その重複度を m とおく。 Θ は h 個の点 p_1, p_2, \dots, p_h で他の既約成分達と交わり、相手の既約成分の重複度がそれぞれ m_1, m_2, \dots, m_h であるとしよう。さらに N_Θ を M における Θ の法束とする。このとき、 Θ 上の因子 $P := \sum_{j=1}^h m_j p_j$ について、

$$N_\Theta^{\otimes(-m)} \cong \mathcal{O}_\Theta(P)$$

が成り立つ。ここで、右辺は P で定義される Θ 上の線束である。すなわち、 Θ 上の線束 $N_\Theta^{\otimes(-m)}$ には点 p_j ($j = 1, 2, \dots, h$) で位数 m_j の零点を持つ正則切断 σ が存在する。線束 N_Θ の変換関数 $\{g_{\alpha\beta}\}$ に対して線束 $N_\Theta^{\otimes(-m)}$ の変換関数は $\{g_{\alpha\beta}^{-m}\}$ となることに注意すると、 $\pi_\Theta(z, \zeta) := \sigma(z)\zeta^m$ (z は底方向、 ζ はファイバー方向の N_Θ の局所座標) は N_Θ 上の正則関数を与えることがわかる。 $\pi_\Theta^{-1}(0)$ は、 N_Θ の零切断と p_j 上のファイバー達とから成り、その重複度はそれぞれ m, m_j である。以上の考察の上で、リーマン面の退化 $\pi: M \rightarrow \Delta$ が線型であるとは次を満たすものとして定義される。

- X_0 の各既約成分 Θ の M における管状近傍と、その法束 N_Θ の零切断の管状近傍とが双正則である。
- 上の双正則写像による同一視の下、 π は各既約成分 Θ の周りで π_Θ と一致する。
- X_0 の既約成分それぞれの管状近傍達は plumbing で貼り合わされている。

X_0 を π で定まる M 上の因子 $\text{div}(\pi) = \sum m\Theta$ とみなし、そのある部分因子 $Y = \sum n\Theta$ を考える。さらに、 ℓ を $\ell Y \leq X_0$ (つまり任意の既約成分に対して $\ell n \leq m$) を満たすある正の整数とする。このとき、 (Y, ℓ) がクラスト条件であるとは、各既約成分において (Y, ℓ) が“クラスト条件”と呼ばれる条件達のうちの一つを満たすときをいう。クラスト条件を満たす既約成分の周りでは、 (Y, ℓ) に関連付けられた π の局所的な変形族を構成することができる。紙面の都合上、全てのクラスト条件を挙げることはできないが、そのうちの一つを次に紹介する。

既約成分 Θ の周りに制限した線型な退化 $\pi: N_\Theta \rightarrow \Delta$ は $\pi(z, \zeta) = \sigma(z)\zeta^m$ で表され $\text{div}(\sigma) = \sum_{j=1}^h m_j p_j$ を満たすのであった。 Θ が点 p_1, p_2, \dots, p_h で交わる他の既約成分それぞれの“ Y における重複度” (つまり $\sum n\Theta$ における係数) を n_1, n_2, \dots, n_h とすると、 $P_Y := \sum_{j=1}^h n_j p_j$ は $P = \sum_{j=1}^h m_j p_j$ の部分因子である。既約成分 Θ において (Y, ℓ) がクラスト条件 (A) を満たすとは、 Θ 上にある効果的な因子 $Q_Y := \sum_{i=1}^k a_i q_i$ が存在して、

$$N_\Theta^{\otimes(-n)} \cong \mathcal{O}_\Theta(P_Y - Q_Y)$$

なるときをいう。ただし、 $\text{red}P_Y \cap \text{red}Q_Y \neq \emptyset$ (つまり $p_j = q_i$ ならば $n_j = 0$ または $a_i = 0$) とする。すなわち、 Θ 上の線束 $N_\Theta^{\otimes(-n)}$ の有理型切断 τ であって、点 p_j ($j = 1, 2, \dots, h$) で位数 n_j の零点を、点 q_i

($i = 1, 2, \dots, k$) で位数 a_i の極を持つものが存在する。この τ を用いて、既約成分 Θ の周りでの π の局所的な変形族 $\Psi : N_\Theta \times \Delta^\dagger \rightarrow \Delta \times \Delta^\dagger$ を

$$\Psi(z, \zeta, t) = \left(\sigma(z) \zeta^m \left(1 + \frac{t}{\tau \zeta^n} \right)^\ell, t \right) \quad \left(= \left(\sigma(z) \tau(z)^{-\ell} \zeta^{m-\ell n} (\tau \zeta^n + t)^\ell, t \right) \right)$$

で定義しよう。これを $\Delta_0 = \Delta \times \{0\}$ 上に制限すると明らかに $\pi(z, \zeta) = \sigma(z) \zeta^m$ と一致する。それに対し $\Delta_t = \Delta \times \{t\}$ ($t \neq 0$) 上に制限した $\pi_t : N_\Theta \times \{t\} \rightarrow \Delta_t$ については、その中心ファイバー $\pi_t^{-1}(0)$ をなす既約成分を調べると、 N_Θ の零切断と p_j 上のファイバー達 (それぞれ重複度は $m - \ell n, m_j - \ell n_j$ に下がっている) のみでなく、新たに重複度 ℓ の既約成分が現れていることがわかる。この既約成分は t を 0 に近づけていくと他の既約成分に貼り付いていくことから、摂動によって中心ファイバーから剥がれたものであると思える。この既約成分を剥離成分と呼ぶ。

各既約成分の周りで構成されたこうした局所的な変形族は、クラスト (Y, ℓ) がある条件を満たすとき (シンプルクラストと呼ぶ)、整合性を保ちつつ大域的に貼り合わせることができる。この貼り合わせで得られる $\pi : M \rightarrow \Delta$ に対する変形族 $\Psi : \mathcal{M} \rightarrow \Delta \times \Delta^\dagger$ を剥離変形族と呼ぶ。このとき、 π の変形 $\pi_t : M_t \rightarrow \Delta_t$ ($t \neq 0$) の中心ファイバー $X_{t,0} := \pi_t^{-1}(0)$ は、もとの特異ファイバー X_0 に由来する重複度の下がった既約成分達と新たに現れた重複度 ℓ の剥離成分達とから成る特異ファイバーであり、これを特に主ファイバーと呼ぶ。もとの特異ファイバー X_0 と主ファイバー $X_{t,0}$ の位相型が異なるならば、 π_t は必ず $X_{t,0}$ 以外にも特異ファイバーを持つ。したがって非自明な剥離変形族は一般に分裂族であることがわかる。こうして、以下の剥離変形による分裂可能性定理が得られる。

定理 1 ([T], [O3]). リーマン面の線型な退化に対して、その特異ファイバーが非自明なシンプルクラストを持つならば、分裂族が存在する。

注意 2. このセクションでは [O3] でより一般化された剥離変形としての術語を用いているため、[T] で導入されたものとは少し異なることに注意。この一般化によって、例えば、昨年本研究集会で講演した「周期的写像類のデーンツイスト積表示」の結果 [O1] がより種数の高い場合でも成り立つことがわかった。

3 分裂位相モノドロミー

リーマン面の退化の位相型は、次の定理による、曲面写像類群との間の位相モノドロミーを通した対応関係を以て分類される。

定理 3 ([MM]). 種数 $g \geq 2$ のリーマン面の極小な退化の位相同値類と、種数 g の実有向閉曲面の写像類群 MCG_g における負型擬周期的写像類の共役類とは、位相モノドロミーを通して一対一に対応する。

ここでの位相モノドロミーとは、退化 $\pi : M \rightarrow \Delta$ の一般ファイバー $X_s = \pi^{-1}(s)$ ($s \in \Delta \setminus \{0\}$) を、 $\Delta \setminus \{0\}$ 上で 0 の周りを反時計回りに一周するループに沿って走らせることで得られる自己同相写像 $f : X_s \rightarrow X_s$ のアイソトピー類 (つまり X_s の写像類) として定義された。

では一方、分裂族の位相型だとどうであろうか? [O2] では、上の退化の位相モノドロミーの類似として分裂族の位相モノドロミー (以下、単に分裂位相モノドロミーと呼ぶ) なるものを新たに導入した。まず、分裂族は複素曲線族の族であることに注意したい。分裂族の“一般ファイバー”として $\pi_t : M_t \rightarrow \Delta_t$ ($t \in \Delta^\dagger \setminus \{0\}$) をとり、 $\Delta^\dagger \setminus \{0\}$ 上で t を基点とし 0 の周りを反時計回りに一周するループに沿って複素曲線族 $\pi_t : M_t \rightarrow \Delta_t$

を走らせる。これにより、向きを保つ自己同相写像 $F : M_t \rightarrow M_t$, $\phi : \Delta_t \rightarrow \Delta_t$ であって図式

$$\begin{array}{ccc} M_t & \xrightarrow{F} & M_t \\ \downarrow \pi_t & & \downarrow \pi_t \\ \Delta_t & \xrightarrow{\phi} & \Delta_t \end{array}$$

を満たすものを得る。この組 (F, ϕ) の“アイソトピー類”として分裂位相モノドロミーは定義される。

F は π_t の特異ファイバーを特異ファイバーに写す。特に剥離変形族の場合、主ファイバーは主ファイバーに写る。主ファイバーへの F の作用については次の結果が得られている。

定理 4 ([O2]), $\Psi : \mathcal{M} \rightarrow \Delta \times \Delta^\dagger$ をシンプルクラスト (Y, ℓ) による剥離変形族とする。このとき、 Ψ の分裂位相モノドロミーは、複素曲線族 $\pi_t : M_t \rightarrow \Delta_t$ ($t \neq 0$) の主ファイバーの各既約成分に対して負型擬周期的に作用する。実際、剥離成分には Y に対応する負型擬周期的写像類として作用し、それ以外の既約成分には自明に作用する。

証明のアイデアとしては、まず $\Delta_0^\dagger := \{0\} \times \Delta^\dagger \subset \Delta \times \Delta^\dagger$, $M_0^\dagger := \Psi^{-1}(\Delta_0^\dagger) \subset \mathcal{M}$ とおき、 Ψ の Δ_0^\dagger 上への制限 $\pi_0^\dagger := \Psi|_{M_0^\dagger} : M_0^\dagger \rightarrow \Delta_0^\dagger$ を考える（つまり、分裂変形パラメータではなく退化パラメータを固定する）。 M_0^\dagger が滑らかでないため π_0^\dagger そのものは複素曲線族になっていない。ただし集合としては、中心ファイバーはもとの特異ファイバー X_0 と、一般ファイバーは変形後の複素曲線族の主ファイバー $X_{t,0}$ と一致しており、この $\pi_0^\dagger : M_0^\dagger \rightarrow \Delta_0^\dagger (\cong \Delta^\dagger)$ の“位相モノドロミー”が、我々の分裂位相モノドロミーの主ファイバーへの制限と対応していることがわかる。この複素曲線族もとき $\pi_0^\dagger : M_0^\dagger \rightarrow \Delta_0^\dagger$ をさらに適当に制限してやることによって、主ファイバー $X_{t,0}$ の既約成分を一般ファイバーに持つ Δ_0^\dagger 上の複素曲線族が得られる。剥離成分以外の既約成分 Θ については自明な族 $\Theta \times \Delta_0^\dagger \rightarrow \Delta_0^\dagger$ となり、剥離成分については Y に関連付けられた特異ファイバーを持つリーマン面の退化となる^{*1}。ここで定理 3 を適用することで定理 4 が示される。

この定理 4 を用いることで、興味深い分裂位相モノドロミーを持つ分裂族の例が得られるのだが、その紹介は本講演に譲りたい。そうした例は、分裂後の特異ファイバー達の位相型のみならず分裂族そのものの位相型を調べる上では、分裂位相モノドロミーが重要となるであろうことを示唆している。

謝辞 昨年に引き続き、この度このような素晴らしい講演の機会を頂けたことを光栄に思います。本研究集会「第 11 回数学総合若手研究会」の世話人の皆様には心より御礼申し上げます。

参考文献

- [AA] T. Arakawa, and T. Ashikaga, *Local splitting families of hyperelliptic pencils I*, Tohoku Math. J. (2) **53** (2001), 369–394
- [H] E. Horikawa, *Local deformation of pencil of curves of genus two*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **64** (1988), 241–244
- [K] K. Kodaira, *On compact complex analytic surfaces, II*, Ann. of Math. (2) **77** (1963), 563–626
- [MM] Y. Matsumoto and J. M. Montesinos-Amilibia, *Pseudo-periodic Maps and Degeneration of Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Math., Vol. 2030, Springer-Verlag, 2011
- [Mo] B. Moishezon, *Complex Surfaces and Connected Sums of Complex Projective Planes*, Lecture Notes in Math., Vol. 603, Springer-Verlag, 1977
- [O1] 奥田喬之, *Dehn-twist presentations of periodic mapping classes and splitting of singular fibers*, “第 10 回数学総合若手研究会”, Hokkaido Univ. Technical Report Series in Math. #160 (2014), 35–42 (和文)
- [O2] T. Okuda, *Monodromies of splitting families for degenerations of Riemann surfaces*, preprint, submitted for publication
- [O3] T. Okuda, *Generalization of barking families*, in preparation
- [T] S. Takamura, *Towards the Classification of Atoms of Degenerations, III — Splitting Deformations of Degenerations of Complex Curves*, Lecture Notes in Math., Vol. 1886, Springer-Verlag, 2006

^{*1} 正確には、この族と稠密に一致するような、 Y の極小拡張を特異ファイバーとして実現するリーマン面の退化を再構成する。