

# Uniform hyperbolicity for curve graphs of nonorientable surfaces

久野恵理香 (大阪大学)\*

本稿では,  $N = N_{g,n}$  を種数  $g \geq 1$ , 境界成分  $n \geq 0$  個の向き付け不可能曲面とする.

## 1. 導入

$\mathcal{C}(N)$  を  $N$  の curve graph とする. 2007年に Bestvina-Fujiwara[2] が, 2013年に Masur-Schleimer[6] が  $\mathcal{C}(N)$  は (Gromov の意味で) 双曲的であるということを示したが, その一様性は分かっておらず, その具体的な双曲性定数も与えられていなかった. 一方, 2013年に Aougab[1], Bowditch[3], Clay-Rafi-Schleimer[4], そして Hensel-Przytycki-Webb[5] が独立に向き付け可能曲面の curve graph は曲面の種数と境界成分の個数によらない定数で双曲的である (これを一様双曲的であるという) ことを示した. そしてこの Hensel-Przytycki-Webb[5] による議論を向き付け不可能曲面の場合に適用し, 次の結果を得た:

**定理 1.1.**  $\mathcal{C}(N)$  は連結のとき, 17-双曲的になる.

本稿は, 特にこの Hensel-Przytycki-Webb[5] による議論を向き付け不可能曲面の場合に適用するとき注意しなければならない点に重点を置く.

## 2. 準備

**定義 2.1.** 種数  $g \geq 1$ , 境界成分  $n \geq 0$  個の向き付け不可能曲面  $N = N_{g,n}$  とは, 射影平面  $g$  個の連結和から  $n$  個の開円板を取り除いたものである. これは,  $g+n$  個の境界成分を持った球面に  $g$  個のメビウスの帯を境界成分に沿って張り合わせた曲面 (図 1 の左) に同相である. そしてこれを,  $n$  個穴あき球面上に  $g$  個の crosscap と呼ばれるものを書いた模式図 (図 1 の右) で表す. 各 crosscap の円周には対蹠点の同一視が入っている.

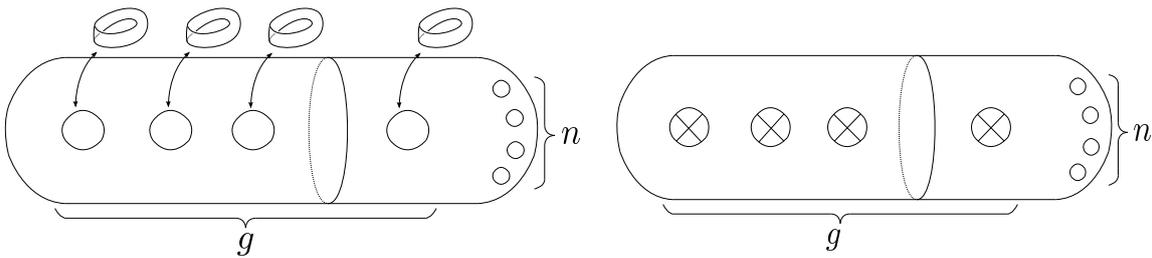


図 1: 向き付け不可能曲面  $N_{g,n}$ .

**定義 2.2.**  $N$  上の単純弧または単純閉曲線が, 境界は  $N$  の境界に, 内部は  $N$  の内部に埋め込まれているとき, それらは  $N$  に固有に埋め込まれているという.  $N$  に固有に埋め込まれている単純弧が本質的であるとは, その単純弧が  $N$  の境界成分の一部にホモトピックでないことである.  $N$  に固有に埋め込まれている単純閉曲線が本質的である

\* 〒 560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1 大阪大学大学院理学研究科 数学専攻  
e-mail: e-kuno@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

とは、その単純閉曲線が  $N$  上で円板やメビウスの帯の境界になっておらず、更に  $N$  の境界成分にホモトピックでないことである。

**定義 2.3.**  $N$  の **arc curve graph**  $\mathcal{AC}(N)$  とは、 $N$  に固有に埋め込まれた本質的な単純弧 (以下、単純弧) と本質的な単純閉曲線 (以下、単純閉曲線) のホモトピー類を頂点とし、2つの頂点はそれらに対応する単純弧または単純閉曲線のホモトピー類の中で交わらない代表元の組が選べるときに辺で結ばれる、と定めることによってできるグラフのことである。また、 $N$  の **arc graph**  $\mathcal{A}(N)$  とは  $N$  上の単純弧のホモトピー類のみによってできる  $\mathcal{AC}(N)$  の部分グラフのことである。 $N$  の **curve graph**  $\mathcal{C}(N)$  とは  $N$  上の単純閉曲線のホモトピー類のみによってできる  $\mathcal{AC}(N)$  の部分グラフのことである。それぞれのグラフの各辺には 1 という長さを入れ、2つの頂点の距離は2つの頂点を結ぶ辺の最小列 (測地線) の長さで定め、 $\mathcal{AC}(N)$ ,  $\mathcal{A}(N)$ ,  $\mathcal{C}(N)$  を測地空間とみなす。それぞれの距離を、 $d_{\mathcal{AC}}(\cdot, \cdot)$ ,  $d_{\mathcal{A}}(\cdot, \cdot)$ ,  $d_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot)$  とかく。

**定義 2.4.** graph が (Gromov の意味で) 双曲的であるとは、ある定数  $k \geq 0$  が存在して、graph 内の任意の測地三角形  $T = abd$  ( $a, b, d$  は graph の頂点) に対して、ある graph の頂点  $p$  が存在して、 $T$  の3つの各辺と  $p$  の距離がそれぞれ高々  $k$  になることである。(図 2 を見よ。) この  $k$  のことを双曲性定数という。但し、測地空間内の測地三角形とは、各辺が空間内の測地線で結ばれているような三角形のことである。

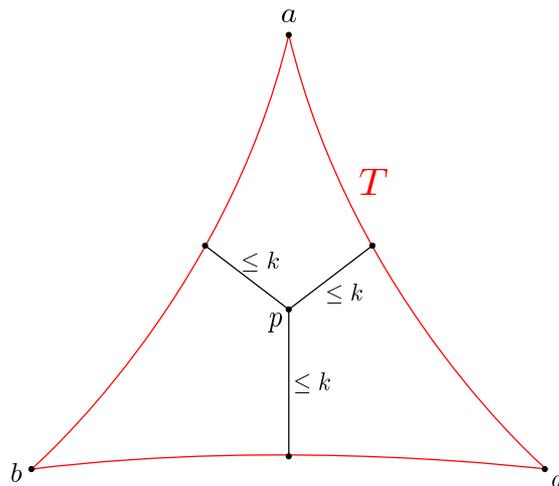


図 2: Gromov 双曲的.

### 3. 向き付け可能曲面の場合との違い

以下、 $a$  と  $b$  を  $N$  上の単純弧で minimal position にあるものとする。

単純弧  $a$  の部分弧で端点  $\alpha$  と  $\alpha'$  を持つものを  $\overline{\alpha\alpha'}$  によって表す。

**定義 3.1.**  $\alpha$  と  $\beta$  をそれぞれ  $a$  と  $b$  の片方の端点とする。  $\pi \in a \cap b$  を 1 つ選び、  $a' = \overline{\alpha\pi}$ ,  $b' = \overline{\pi\beta}$  とする。  $a' \cup b'$  が  $N$  に埋め込まれた単純弧になるとき、  $a' \cup b'$  のことを  $a^\alpha, b^\beta$  と  $\pi$  によって定められる **unicorn arc** という。(図 3 は unicorn arc の 1 つの例.)

[5] と同様に、 *unicorn path* という  $\mathcal{A}(N)$  上の 1 つの path を定めることができる。

**定義 3.2.**  $a' \cup b'$  と  $a'' \cup b''$  ( $a', a'' \subset a, b', b'' \subset b$ ) を  $a^\alpha$  と  $b^\beta$  から得られる 2 つの unicorn arc とする。  $a' \cup b' \leq a'' \cup b'' \Leftrightarrow a'' \subseteq a'$  かつ  $b' \subseteq b''$  と順序を定める。  $(c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$

を  $a^\alpha, b^\beta$  から得られる順序づけられた unicorn arc の列とする. このとき  $\mathcal{P}(a^\alpha, b^\beta) := (a = c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n = b)$  を  $a^\alpha$  と  $b^\beta$  の間の unicorn path という.

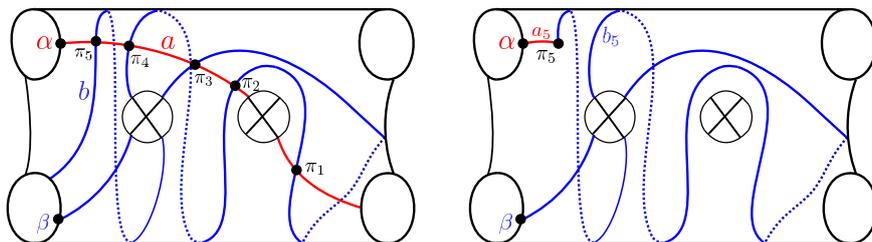


図 3:  $a^\alpha$  と  $b^\beta$  と  $\pi_5$  によって定められる unicorn arc.

向き付け可能曲面の場合 ([5]) と同様に次の命題が成り立つ.

**Proposition 3.3.**  $a, b$  を  $\mathcal{A}(N)$  の 2 つの頂点とする. 記号を乱用してこの  $a, b$  を  $N$  上の単純弧で minimal position にあるものとする. このとき, 任意の unicorn path  $\mathcal{P}(a^\alpha, b^\beta)$  は  $a$  と  $b$  を結ぶ  $\mathcal{A}(N)$  内の path になる. 但し  $\alpha, \beta$  はそれぞれ  $a, b$  の一方の端点である.

向き付け不可能曲面の場合に注意しなければならないのは, unicorn path 内の隣り合う 2 つの unicorn arc を横断的に交わらないようにするためのホモトピー変形の仕方であるが次のように工夫すればよい.  $c_i = \overline{\alpha\pi_a} \cup \overline{\beta\pi_b}$  ( $2 \leq i \leq n-1$ ) とする.  $\pi'$  を unicorn arc  $c_{i-1}$  を定める  $a \cap b$  の点とする.  $c_i$  とホモトピックな単純弧で  $c_{i-1}$  と横断的に交わらないものが存在する:  $c_i$  が  $\pi$  で曲がる時に  $c_{i-1}$  と交わらない  $\overline{\alpha\pi_a}$  の正則近傍の境界成分の方向に  $\overline{\alpha\pi_a}$  をずらし, 更に  $\pi'$  において  $c_{i-1}$  と交わらない  $\overline{\beta\pi_b}$  の正則近傍の境界成分の方向に  $\overline{\beta\pi_b}$  をずらせばよい. (図 4 は  $c_i$  を  $c_{i-1}$  と横断的に交わらないようにホモトピーによって変形した 1 つの例である.)

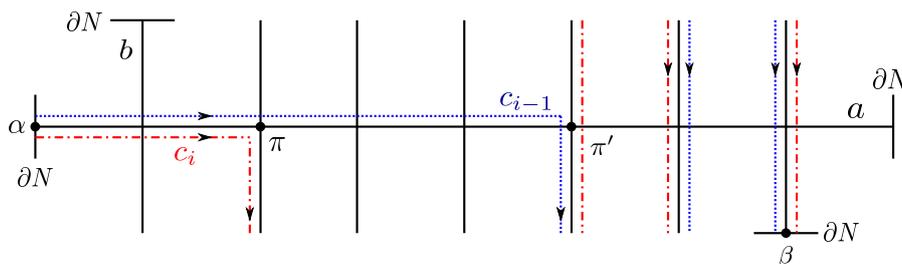


図 4:  $c_i$  を  $c_{i-1}$  と横断的に交わらないようにホモトピーによって変形した 1 つの例.

**定義 3.4.** レトラクション  $r: \mathcal{AC}(N) \rightarrow \mathcal{C}(N)$  を次のように定める (例は図 5).

$a$  が単純閉曲線の時,  $r(a) = a$  と定める.

$a$  が単純弧の時,  $a$  の端点を持つ  $N$  の境界成分を  $\gamma_1$  と  $\gamma_2$  とする ( $\gamma_1 = \gamma_2$  も含む) と,  $\gamma_1 \cup a \cup \gamma_2$  の正則近傍の 1 つの境界成分を  $r(a)$  に対応させる. もし  $\gamma_1 \cup a \cup \gamma_2$  の正則近傍の境界成分の個数が複数になった場合は, 本質的な単純閉曲線を 1 つ選ぶ.

このとき, 向き付け可能曲面の場合 ([5]) と同様に次の主張が成り立つ.

**主張 3.5.**  $r$  は 2-リプシッツである. すなわち  $d_C(r(a), r(b)) \leq 2d_{\mathcal{AC}}(a, b)$  を満たす.

向き付け可能曲面の場合との違いは、単純弧  $a, b$  が crosscap を奇数回通過することによって  $r(a), r(b)$  が“ねじれる”場合も考える必要があるということである。 $\mathcal{AC}(N)$  内での距離が 1 なる単純弧  $a, b$  の組に対してのみ示せば十分で、その組のパターンは図 6 のように 8 つある。これら全てのパターンについて  $r(a), r(b)$  がそれぞれねじれる場合とねじれない場合がある。しかし、どの場合でも  $r(a)$  と  $r(b)$  の両方に交わらない単純閉曲線  $\alpha$  が取れるということが言え、 $r(a)$  と  $r(b)$  の  $\mathcal{C}(N)$  内での距離が 2 以下になるということが示せる。

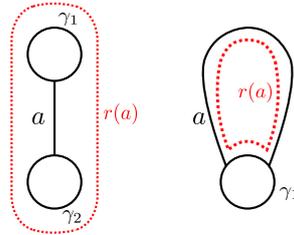


図 5: レトラクション  $r : \mathcal{AC}(N) \rightarrow \mathcal{C}(N)$  の例.

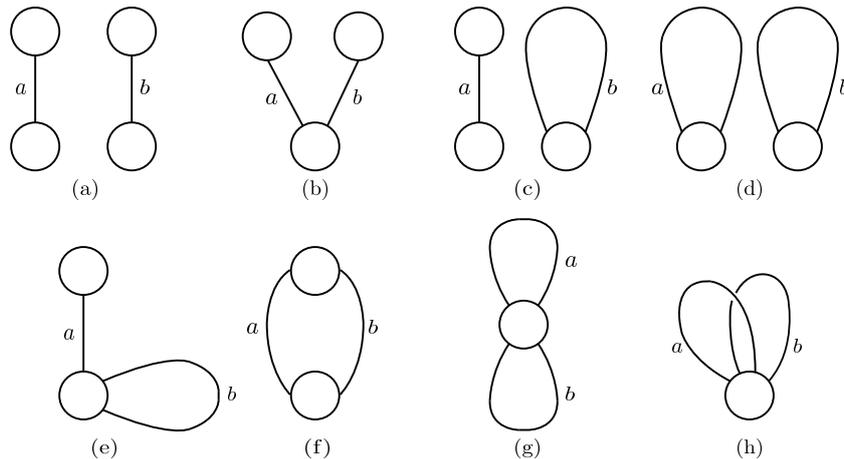


図 6:  $d_{\mathcal{AC}}(a, b) = 1$  なる単純弧  $a, b$  の組の 8 つの場合.

## 参考文献

- [1] T. Aougab, *Uniform hyperbolicity of the graphs of curves*, *Geom. Topol.* **17**, no.5 (2013), 2855-2875.
- [2] M. Bestvina and K. Fujiwara, *Quasi-homomorphisms on mapping class groups*, *Glas. Mat. Ser. III*, **42** (62) no.1 (2007), 213-236.
- [3] B. H. Bowditch, *Uniform hyperbolicity of the curve graphs*, *Pacific J. Math.* **269** (2014), 269-280.
- [4] M. T. Clay, K. Rafi, and S. Schleimer, *Uniform hyperbolicity of the curve graph via surgery sequences*, to appear in *Algebr. Geom. Topol.*
- [5] S. Hensel, P. Przytycki, and R. C. H. Webb, *Slim unicorns and uniform hyperbolicity for arc graphs and curve graphs*, to appear in *J. Europ. Math. Soc.*
- [6] H. A. Masur and S. Schleimer, *The geometry of the disk complex*, *J. Amer. Math. Soc.* **26** (2013), 1-62.