解析的捩率と保型形式

吉川謙一（京都大学）

この文章では, 解析的捩率から構成される 3 次元 Calabi-Yau 多様体の不変量（BCOV 不変量）とその不変量がミラー対称性において果す役割を復習した後, ミラー対称性の帰結として対称有界領域で助変数付けされる 3 次元 Calabi-Yau 多様体族には無限積展開を持つ保型形式が自然に付随すると期待される事を説明する. 例として, 例外型 Borcea-Voisin 多様体の場合を述べた. 対応する保型形式が Del Pezzo 曲面の Kähler モジュライ上の保型形式である事から, 例外型 Borcea-Voisin 多様体のミラーが Del Pezzo 曲面と楕円曲線の直積である事が期待される.

Contents

1. BCOV 予想 — 楕円曲線に対するミラー対称性予想

1.1. Calabi-Yau 多様体.

Definition 1. 連結コンパクト n 次元 Kähler 多様体 X が Calabi-Yau $\Longleftrightarrow$

- $K_X := \Omega_X^n \cong \mathcal{O}_X$ • $H^q(X, \mathcal{O}_X) = 0 \quad (0 < q < n)$.

Fact 2. *n 次元 Calabi-Yau 多様体に対して, 以下の事実が知られている.*

- *Calabi-Yau 多様体の各 Kähler 類 $[\omega]$ は唯一の Ricci-平坦 Kähler 形式を含む. ここで, Kähler 形式 $\omega = \sqrt{-1}\sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz_i \wedge d\bar{z}_j$ が Ricci 平坦であるとは, 以下の Ricci 平坦方程式が成り立つ事である:*

$$\operatorname{Ric}\omega = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\det(g_{i\bar{j}}) = 0.$$

- *$n \neq 2$ ならば, Calabi-Yau 多様体は射影的である.*
- *$n \geq 3$ ならば, n 次元 Calabi-Yau 多様体の位相型は一意的ではない.*
- *Calabi-Yau 多様体の倉西空間は非特異である.*

1.2. **BCOV 不変量.** $(M, g_M = \sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz_i \otimes d\bar{z}_j)$ をコンパクト n 次元 Kähler 多様体, $A_M^{p,q}$ を M 上の (p,q)-形式全体とする時, $A_M^{p,q}$ に作用するラプラシアンが次の式で定義される:

$$\square_{p,q} = 2(\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}) = -2\sum_{i,j} g^{i\bar{j}} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} + 1\,\text{階微分作用素}$$

ラプラシアン $\square_{p,q}$ のゼータ関数 $\zeta_{p,q}(s)$ を以下の式で定義する:

$$\zeta_{p,q}(s) := \sum_{\lambda \in \sigma(\square_{p,q}) \setminus \{0\}} \lambda^{-s} \dim E(\lambda, \square_{p,q}).$$

ただし, $\sigma(\square_{p,q}) \subset \mathbf{R}_{\geq 0}$ は $\square_{p,q}$ の固有値全体の集合であり, $E(\lambda, \square_{p,q})$ は固有値 λ に対する $\square_{p,q}$ の固有空間である. $\square_{p,q}$ がコンパクト多様体上の強楕円型偏微分作用素である事から, $\sigma(\square_{p,q})$ は $\mathbf{R}_{\geq 0}$ の離散部分集合であり, 各 $E(\lambda, \square_{p,q})$ は有限次元である.

Fact 3. *$\zeta_{p,q}(s)$ は $\Re s > n$ の時に絶対収束し, $\mathbf{C}$ 上の有理型関数に解析接続され, $s = 0$ において正則である.*

この事実から, 実数 $\zeta'_{p,q}(0)$ が定義される.

Definition 4 ([2], [5])**.** X を 3 次元 Calabi-Yau 多様体とし, γ を X 上の Ricci 平坦 Kähler 形式とする. X 上の (p,q)-形式に作用するラプラシアンのスペクトル・ゼータ関数を $\zeta_{p,q}(s)$ とする時, 以下の実数を X の BCOV 不変量と言う

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(X) := \frac{\mathrm{Vol}(X,\gamma)^{\frac{\chi(X)}{12}-3}}{\mathrm{Vol}_{L^2}(H^2(X,\mathbf{Z}),[\gamma])} \exp\left[-\sum_{p,q\geq 0} (-1)^{p+q} pq\, \zeta'_{p,q}(0)\right].$$

ここで, $\chi(X)$ は X の位相的 Euler 数であり, $\mathrm{Vol}_{L^2}(H^2(X,\mathbf{Z}),[\gamma])$ は（調和形式とコホモロジーを同一視する事により得られる $H^2(X,\mathbf{R})$ 上の計量に関する）実トーラス $H^2(X,\mathbf{R})/H^2(X,\mathbf{Z})$ の体積である.

Fact 5 ([5])**.** *$\tau_{\mathrm{BCOV}}(X)$ は Ricci 平坦 Kähler 計量に依らず, X の複素構造のみから定まる X の不変量である.*

この事実から, τ_{BCOV} を 3 次元 Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間上の関数と見なす事ができる.

1.3. **A-model — 種数 1 振幅関数.** 3 次元 Calabi-Yau 多様体 X に対して, Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa は以下の形式的無限積を複素 Kähler 錐

$$H^2(X,\mathbf{R})/H^2(X,\mathbf{Z}) + i\,\mathcal{K}_X$$

上に導入した [1], [2]: $t \in H^2(X,\mathbf{R}) + i\,\mathcal{K}_X$ に対して, $q^d := e^{2\pi i\langle d,t\rangle}$ とする時,

$$F_1^{\mathrm{top}}(q) := q^{c_2^\vee/24} \prod_{d \in H_2(X,\mathbf{Z})\setminus\{0\}} (1-q^d)^{n_0(d)/12} \prod_{k>0} (1-q^{kd})^{n_1(d)}.$$

ただし, $n_g(d)$ は種数 g インスタントン数であり, $c_2^\vee \in H_2(X,\mathbf{Z})$ は X の第 2 Chern 類 $c_2(X) \in H^4(X,\mathbf{Z})$ の Poincaré 双対である.

論文や本によっては, $n_g(d)$ を Gromov-Witten 不変量と書いているものもある. ここでは, Zinger の論文 [10] に従い, 上の式に現れた $n_g(d)$ をインスタントン数と呼び, Gromov-Witten 不変量を $N_g(d)$ で表す. Zinger の論文 [10] の Appendix B にある関係式を筆者が正しく理解しているとすれば, インスタントン数と Gromov-Witten 不変量の関係は一般に以下の式で与えられると推測される:

$$\sum_{d\in H_2(X,\mathbf{Z})\setminus\{0\}} N_0(d)q^d(\log q^d)^3 = \sum_{d\in H_2(X,\mathbf{Z})\setminus\{0\}} n_0(d)\frac{q^d}{1-q^d}(\log q^d)^3,$$

$$\begin{aligned}\sum_{d\in H_2(X,\mathbf{Z})\setminus\{0\}} N_1(d)q^d = &\sum_{d\in H_2(X,\mathbf{Z})\setminus\{0\}} n_1(d)\sum_{k>0}\log(1-q^{kd})\\ &+\frac{1}{12}\sum_{d\in H_2(X,\mathbf{Z})\setminus\{0\}} n_0(d)\log(1-q^d).\end{aligned}$$

(これらの関係式は Zinger の論文にある公式 [10, (B.2), (B.11)] から一般の場合を類推したものであり, 間違っているかもしれません.)

1.4. **B-model — BCOV 不変量.** ミラー対称性予想によれば, 3 次元 Calabi-Yau 多様体 X に対して, そのミラー族 $\pi\colon \mathcal{X}^\vee \to S^o$ の存在が予想されている. BCOV 予想の定式化に必要なので, ミラー族を復習する.

1.5. **極大冪単族と標準座標.** $\pi\colon \mathcal{Y}^o \to S^o$ を 3 次元 Calabi-Yau 多様体のスムーズ族とする. ただし, $S^o \cong (\varDelta^*)^n$ であり, この族の一般ファイバーを Y_s, $s\in S^o$ とする時, $n = h^{1,2}(Y_s)$ を仮定する. さらに, 族 $\pi\colon \mathcal{Y}^o \to S^o$ が Morrison [8] の意味で極大冪単族 (maximally unipotent) または大複素構造極限 (large complex structure limit) であると仮定する. この時, $H_3(Y_s,\mathbf{Z})$ の整シンプレクティック基底 $\{A_0,\dots,A_n,B_0,\dots,B_n\}$ で, 以下の性質を充たすものが存在する [7]:

- 族 $\pi\colon \mathcal{Y}^o \to S^o$ から定まる $H_3(Y_s,\mathbf{Q})$ のモノドロミー篩を $S_0 \subset \cdots \subset S_6$ とする時, $S_{2k} = S_{2k+1}$ であり,

$$B_0 \in S_0, \quad B_1,\dots,B_n \in S_2, \quad A_1,\dots,A_n \in S_4, \quad A_0 \in S_6 = H_3(Y_s,\mathbf{Q}).$$

- B_0 は全ての $\pi_1(S^o)$ の元の作用に対して不変なホモロジー類.

族 $\pi\colon \mathcal{Y}^o \to S^o$ の相対正則 3-形式を $\{\varXi_s\}_{s\in S^o}$ とする時, S^o 上の標準座標を以下の写像として定義する

$$M\colon S^o \ni s \to \left(\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\frac{\int_{B_1}\varXi_s}{\int_{B_0}\varXi_s}\right),\dots,\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\frac{\int_{B_n}\varXi_s}{\int_{B_0}\varXi_s}\right)\right) \in (\varDelta^*)^n.$$

M が S^o 上の座標系を与える事が知られており, S^o 上の標準座標と呼ばれる. 以下, q_i を次式で定める

$$q_i := \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\frac{\int_{B_i}\varXi_s}{\int_{B_0}\varXi_s}\right) \qquad (i=1,\dots,n).$$

1.6. **有理曲線の数え上げに関するミラー対称性予想.** X と S^o は上と同様とし, 3 次元 Calabi-Yau 多様体の族 $\pi\colon \mathcal{X}^\vee \to S^o$ が, 以下の性質を充たすと仮定する:

(i) $h^{1,1}(X) = h^{1,2}(X_s^\vee)$, $h^{1,2}(X) = h^{1,1}(X_s^\vee)$. ただし, $X_s^\vee = \pi^{-1}(s)$.
(ii) $\pi\colon \mathcal{X}^\vee \to S^o$ は極大冪単族.

Definition 6. 族 $\pi\colon \mathcal{X}^\vee \to S^o$ が X のミラー族であるとは, 上記条件 (i), (ii) が充たされ, さらに標準座標による $H^2(X,\mathbf{R})/H^2(X,\mathbf{Z}) + i\mathcal{K}_X$ と S^o の同一視（ミラー写像）

$$(e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_{h^{1,1}}}) = (q_1, \dots, q_{h^{1,2}_\vee}).$$

の下で, 以下の等式が任意の α, β, γ に対して成り立つ事である:

$$(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\gamma) + \sum_{d \in H_2(X,\mathbf{Z})\setminus\{0\}} \frac{n_0(d)\, q^d}{1-q^d} \langle d, \mathbf{e}_\alpha\rangle \langle d, \mathbf{e}_\beta\rangle \langle d, \mathbf{e}_\gamma\rangle$$
$$= \frac{\int_{X_s^\vee} \Xi_s \wedge (\nabla_{2\pi i q_\alpha \frac{\partial}{\partial q_\alpha}} \nabla_{2\pi i q_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta}} \nabla_{2\pi i q_\gamma \frac{\partial}{\partial q_\gamma}} \Xi_s)}{(\int_{B_0} \Xi_s)^2}.$$

ただし, $h^{1,1} = h^{1,1}(X)$, $h^{1,2}_\vee = h^{1,2}(X_s^\vee)$ であり, ∇ は Gauss-Manin 接続である． 右辺は相対正則 3-形式 Ξ_s の選び方に依らない事に注意する.

1.7. **楕円曲線に対するミラー対称性予想.**

Conjecture 7 (Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa)**.** X を 3 次元 Calabi-Yau 多様体, $\pi\colon \mathcal{X}^\vee \to S^o$ をそのミラー族とすれば, S^o 上の関数として以下の等式が（定数倍を除いて）成り立つ:

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(X_s^\vee) = |F_1^{\mathrm{top}}(q)|^4 \cdot \left\| \left(\frac{\Xi_s}{\int_{B_0} \Xi_s} \right)^{3 + h^{1,2}_\vee + \frac{\chi_\vee}{12}} \otimes \left(q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \wedge \cdots \wedge q_{h^{1,2}_\vee} \frac{\partial}{\partial q_{h^{1,2}_\vee}} \right) \right\|^2.$$

ただし, $h^{1,2}_\vee$, $\chi_\vee$ はそれぞれ $\pi\colon \mathcal{X}^\vee \to S^o$ の一般ファイバーの $(1,2)$ Hodge 数と位相的 Euler 数であり, Ξ_s と $\frac{\partial}{\partial q_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial q_{h^{1,2}_\vee}}$ の長さはそれぞれ L^2-計量と Weil-Petersson 計量で計測される. 特に, $F_1^{\mathrm{top}}(q)$ は原点の近傍で収束する.

筆者の知る限り, この予想が確認された例は 5 次超曲面（A モデル）[10] とミラー 5 次超曲面（B モデル）[5] の組だけである.

1.8. **無限積展開を持つ保型形式と BCOV 予想.** $\pi\colon (\mathcal{Y}, L) \to S$ を偏極 3 次元 Calabi-Yau 多様体のスムーズ族とし, その小平-Spencer 写像は S の一般の点で同型であると仮定する. Ω を有界対称領域の管状領域表示とし, $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ を算術群とする. 以下の条件 (C1), (C2), (C3) を考える:

(C1) S は $\Gamma\backslash\Omega$ の Zariski 開集合に同型.
(C2) S 上の Weil-Petersson 計量 ω_{WP} は $\Gamma\backslash\Omega$ 上の Bergman 計量 ω_Ω に一致する:

$$\omega_{\mathrm{WP}} = \omega_\Omega.$$

ただし, Ω が既約でない時は, 右辺は Ω の各既約成分の Bergman 計量の適当な整係数線形結合と理解する.

(C3) 以下の条件を充たす 3 次元 Calabi-Yau 多様体 X が存在する.
- $H^2(X,\mathbf{R})+i\,\mathcal{K}_X$ は Ω の開部分領域.
- $\Gamma\backslash\Omega$ の尖点の近傍において $\pi\colon\mathcal{Y}\to S$ は X のミラー族である.
- ミラー写像の逆 $M^{-1}\circ\exp(2\pi i(\cdot))$ は複素 Kähler 錐 $H^2(X,\mathbf{R})+i\,\mathcal{K}_X$ に拡張され, モジュラー射影の制限に一致する. つまり, 次の図式は可換になる

$$\begin{array}{ccc} H^2(X,\mathbf{R})+i\,\mathcal{K}_X & \xrightarrow{M^{-1}\circ\exp(2\pi i(\cdot))} & S \\ \iota\big\downarrow & & \big\downarrow\iota \\ \Omega & \xrightarrow[\Pi]{} & \Gamma\backslash\Omega \end{array}$$

ただし, ι は包含写像を表し, Π は自然な射影を表す.

S 上の関数 $\tau_{\mathrm{BCOV}}(\mathcal{Y}/S)$ を以下の式で定める

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(\mathcal{Y}/S)(s):=\tau_{\mathrm{BCOV}}(Y_s),\qquad s\in S.$$

筆者は最近以下の定理を得た.

Theorem 8. 条件 (C1), (C2) の下で, Γ に関する Ω 上の（有理型）保型形式 $\Psi_{\mathcal{Y}/S}$ が存在して, 以下の等式が成り立つ

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(\mathcal{Y}/S)=\|\Psi_{\mathcal{Y}/S}\|,\qquad \operatorname{div}(\Psi_{\mathcal{Y}/S})\subset\Omega\setminus\Pi^{-1}(S).$$

この定理と BCOV 予想から, 以下の観察が従う.

Observation 9. 条件 (C1), (C2), (C3) と BCOV 予想を仮定すれば, 保型形式 $\Psi_{\mathcal{Y}/S}$ は $H^2(X,\mathbf{R})+i\,\mathcal{K}_X$ の無限遠点 $+i\infty$ に対応した尖点の近傍で無限積展開を持つ. この意味で, BCOV 予想は Borcherds 積の拡張を導く.

これらの条件 (C1), (C2), (C3) のすべてが充たされる例は非常に稀であるが, 少なくとも (C1), (C2) に関しては筆者の知る限り何個かの例が存在するので, その例を解説する.

Definition 10. (1) S を $K3$ 曲面とし, $\theta\colon S\to S$ を反シンプレクティック正則対合とする. T を楕円曲線とし, $X_{(S,\theta,T)}$ を以下のように定める:

$$X_{(S,\theta,T)}:=\mathrm{Bl}_{\Sigma}\left(\frac{S\times T}{\theta\times(-1_T)}\right),\qquad \Sigma:=\mathrm{Sing}\left(\frac{S\times T}{\theta\times(-1_T)}\right).$$

この時, $X_{(S,\theta,T)}$ は 3 次元 Calabi-Yau 多様体であり, Borcea-Voisin 多様体と呼ばれる.

(2) Borcea-Voisin 多様体 $X_{(S,\theta,T)}$ の型を以下の格子として定める:

$$H^2_-(S,\mathbf{Z}):=\{\ell\in H^2(S,\mathbf{Z});\ \theta^*(\ell)=-\ell\}\subset\mathbb{L}_{K3}:=\mathbb{U}^{\oplus3}\oplus\mathbb{E}_8^{\oplus2}.$$

ここで, $\mathbb{U}$ は符号 $(1,1)$ の偶ユニモジュラー格子であり, $\mathbb{E}_8$ は符号 $(0,8)$ の偶ユニモジュラー格子である.

(3) Del Pezzo 曲面 V に対して, 格子 $H(V,\mathbf{Z})(2)$ を以下の式で定める:

$$H(V,\mathbf{Z})(2) := (H(V,\mathbf{Z}), 2\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{Mukai}}).$$

ただし, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{Mukai}}$ は $H(V,\mathbf{Z})$ 上の向井ペアリングである. Borcea–Voisin 多様体はその型が $H(V,\mathbf{Z})(2)$ で与えられる時, 例外型と呼ばれる.

Remark 11. 上の (3) の Borcea-Voisin 多様体を例外型と呼ぶのは以下の理由による.

(1) Borcea-Voisin によるミラー構成法 $X^{\vee}_{(S,\theta,T)} := X_{(S^{\vee},\theta^{\vee},T^{\vee})}$ は, $X_{(S,\theta,T)}$ が例外型の時に機能しない. その結果, 例外型の場合には $X_{(S,\theta,T)}$ のミラーの存在は知られていない. (ここで言うミラーとは, 第 1.6 節の条件 (i) を充たす 3 次元 Calabi-Yau 多様体を意味する.)
(2) $X_{(S,\theta,T)}$ が例外型ならば, その小変形もまた Borcea-Voisin 多様体である.
(3) 逆に, $X_{(S,\theta,T)}$ の任意の小変形が Borcea-Voisin 多様体ならば, $X_{(S,\theta,T)}$ は例外型か又は S/θ は Enriques 曲面である. (後者の Calabi-Yau 多様体を FHSV モデルと言う.)

(2), (3) は, 任意の小変形が Borcea-Voisin である Borcea-Voisin 多様体は例外型か FHSV モデルに限る事を述べている. 例外型 Borcea-Voisin 多様体や FHSV モデルに対して, 条件 (C1), (C2) を確かめる事ができる. 特に, それらの BCOV 不変量に付随する保型形式がモジュライ空間上に存在する.

Problem 12. 例外型 Borcea-Voisin 多様体に対して, τ_{BCOV} から定まるモジュライ空間上の保型形式は無限積展開を持つか?

BCOV 予想が正しければ, 上の問いに対する答えは肯定的なはずである.

2. Del Pezzo 曲面の Kähler モジュライ上の或る Borcherds 積

上の問に答えるために, Del Pezzo 曲面の Kähler モジュライ上に或る保型形式を無限積として導入する.

Definition 13. コンパクト連結複素曲面 V は, 反標準束 K_V^{-1} が豊富な時 Del Pezzo 曲面と呼ばれる.

Fact 14. *Del Pezzo* 曲面 V は $\mathbf{P}^2$ の一般の位置にある高々 8 点までの点のブローアップか又は $\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$ である. *Del Pezzo* 曲面の次数を $\deg V := c_1(V)^2 \in \{1,\ldots,9\}$ で定める.

Notation 以下の記号を用いる.

- $\mathcal{C}_V^+ \subset H^2(V,\mathbf{R})$: 双曲ベクトル空間 $H^2(V,\mathbf{R})$ の正錐で $c_1(V)$ を含む成分
- $\mathcal{K}_V \subset H^2(V,\mathbf{R})$: V の Kähler 錐 $\Longrightarrow \mathcal{K}_V \subset \mathcal{C}_V^+$
- $\mathrm{Eff}(V) \subset H^2(V,\mathbf{Z})$: V の有効因子類
- $W^{(1)}(V) \subset O(H^2(V,\mathbf{Z}))$: V の第一種例外曲線の因子類が定める鏡映で生成される $H^2(V,\mathbf{Z})$ 上の鏡映群.

$H(V,\mathbf{Z})$ を以下の二次形式（向井ペアリング）の入った格子と見る:

$$(\alpha_0,\alpha_2,\alpha_4)^2=\int_V(\alpha_2)^2-2\alpha_0\alpha_4,\qquad \alpha_i\in H^{2i}(V,\mathbf{Z}).$$

Definition 15. 条件 $q(V)=p_g(V)=0$ を充たす複素曲面 V に対して, 以下の IV 型 Hermite 対称領域（の二つのコピー）Ω_V を対応させる:

$$\Omega_V:=\{[\eta]\in\mathbf{P}(H(V,\mathbf{C}));\ \langle\eta,\eta\rangle=0,\ \langle\eta,\bar\eta\rangle>0\}.$$

Ω_V は二つの連結成分から成り, その一つを Ω_V^+ で表す. V の Kähler モジュライを以下の直交型モジュラー多様体として定める:

$$\mathcal{KM}(V):=O^+(H(V,\mathbf{Z}))\backslash\Omega_V^+.$$

ただし, $O^+(H(V,\mathbf{Z}))$ は Ω_V の連結成分を保つ $O(H(V,\mathbf{Z}))$（格子 $H(V,\mathbf{Z})$ の自己同型群）の指数 2 の部分群である. 指数写像

$$\exp\colon H^2(V,\mathbf{R})+\sqrt{-1}\mathcal{C}_V^+\ni\omega\to[\exp(\omega)]=\left[1+\omega+\frac{\omega\wedge\omega}{2}\right]\in\Omega_V$$

により与えられる複素多様体の同型は, Kähler モジュライの一意化を与える:

$$\exp\colon H^2(V,\mathbf{R})+\sqrt{-1}\mathcal{C}_V^+\to\mathcal{KM}(V).$$

Definition 16. $H^2(V,\mathbf{R})+\sqrt{-1}\mathcal{K}_V$ 上の形式的無限積 $\Phi_V(z)$ を以下の式で定める:

$$\Phi_V(z):=e^{\pi\sqrt{-1}\langle c_1(V),z\rangle}\prod_{\alpha\in\mathrm{Eff}(V)}\left(1-e^{2\pi\sqrt{-1}\langle\alpha,z\rangle}\right)^{c^{(0)}_{\deg V}(\alpha^2)}$$
$$\times\prod_{\beta\in\mathrm{Eff}(V),\ \beta/2\equiv c_1(V)/2 \mod H^2(V,\mathbf{Z})}\left(1-e^{\pi\sqrt{-1}\langle\beta,z\rangle}\right)^{c^{(1)}_{\deg V}(\beta^2/4)}.$$

ここで, 数列 $\{c_k^{(0)}(\ell)\}_{\ell\in\mathbf{Z}}$, $\{c_k^{(1)}(\ell)\}_{\ell\in\mathbf{Z}+k/4}$ は以下の母関数で定義される:

$$\sum_{\ell\in\mathbf{Z}}c_k^{(0)}(\ell)\,q^\ell=\frac{\eta(2\tau)^8\theta_{\mathbb{A}_1}(\tau)^k}{\eta(\tau)^8\eta(4\tau)^8},\qquad\sum_{\ell\in\frac{k}{4}+\mathbf{Z}}c_k^{(1)}(\ell)\,q^\ell=-8\,\frac{\eta(4\tau)^8\theta_{\mathbb{A}_1+\frac12}(\tau)^k}{\eta(2\tau)^{16}}.$$

ただし, $\theta_{\mathbb{A}_1+\frac{\epsilon}{2}}(\tau):=\sum_{n\in\mathbf{Z}}q^{(n+\epsilon/2)^2}$ $(\epsilon\in\{0,1\})$ は一次元格子 $\langle 2\rangle$ のテータ関数であり, $\eta(\tau):=q^{1/24}\prod_{n>0}(1-q^n)$ は Dedekind エータ関数である.

Theorem 17 ([9])**.** *以下の主張が成り立つ.*

(1) *$\Phi_V(z)$ は $H^2(V,\mathbf{R})+\sqrt{-1}\mathcal{C}_V^+$ 上の群 $O^+(H(V,\mathbf{Z}))$ に関する重さ $\deg V+4$ の保型形式に解析接続され, その因子は以下の式で与えられる:*

$$\operatorname{div}\Phi_V=\sum_{\delta\in H(V,\mathbf{Z}),\ \delta^2=-1}\delta^\perp\subset\Omega_V.$$

(2) $\Phi_V(z)$ は *Lie* 型の整 *Fourier* 展開を持つ*:*

$$\Phi_V(z) = \sum_{w \in W^{(1)}(V)} \det w \, \{e^{\pi i w(c_1(V)) \cdot z} - \sum_{r \in H^2(V,\mathbf{Z}) \cap \overline{\mathcal{K}}_V \setminus \{0\}} m(r) \, e^{\pi i w(c_1(V)+r) \cdot z}\}$$

ここで*,* V の第一 *Chern* 類 $c_1(V)$ は $H^2(V,\mathbf{Z})$ の *Weyl* ベクトルであり*,* $m(r) \in \mathbf{Z}$ である*.* （最近*,* $\Phi_V(z)$ の明示的な *Fourier* 展開が *Gritsenko* により与えられた*.*）

保型形式 $\Phi_V(z)$ はアファイン Weyl 群の対称性を持つ．それを説明するために, Kähler 錐 $\mathcal{K}_V$ の自己同型群を $\mathrm{Aut}(\mathcal{K}_V)$ で表す:

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{K}_V) := \{g \in O(H^2(V,\mathbf{Z}));\ g(\mathcal{K}_V) = \mathcal{K}_V\}.$$

Fact 18. *Del Pezzo* 曲面 V に対して*,* 以下の条件を充たす *ADE* 型ルート系 R_V が一意的に存在する*:*

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{K}_V) = W(R_V).$$

ここで*,* $W(R_V)$ は R_V の *Weyl* 群である*.* $W(R_V)$ と $c_1(V)^\perp \cap H^2(V,\mathbf{Z})$ で生成される $O(H^2(V,\mathbf{Z}))$ の部分群 $\widetilde{W}(R_V)$ は R_V のアファイン *Weyl* 群である*.*

Theorem 19 ([9])**.** $\Phi_V(z)$ はアファイン *Weyl* 群 $\widetilde{W}(R_V)$ の作用で不変である*.* 即ち*,* 任意の $g \in \widetilde{W}(R_V)$ と任意の $z \in H^2(V,\mathbf{R}) + \sqrt{-1}\mathcal{K}_V$ に対して*,* 以下の等式が成り立つ*:*

$$\Phi_V(g(z)) = \Phi_V(z).$$

ここで見た通り, $\Phi_V(z)$ は Del Pezzo 曲面の Kähler モジュライ上の大変良い保型形式であるが, その構成は Del Pezzo 曲面の幾何学とどのように関係しているのか不明である．Del Pezzo 曲面を用いた $\Phi_V(z)$ の幾何学的構成は可能であろうか？

3. **Borcea-Voisin** 多様体の **BCOV** 不変量

この節では, 例外型 Borcea-Voisin 多様体の BCOV 不変量が Del Pezzo 曲面の Kähler モジュライ上の保型形式 $\Phi_V(z)$ を用いて表示される事を見る．

3.1. 主結果**.**

Fact 20 ([9])**.** 対応

$$X_{(S,\theta,T)} \mapsto (\varpi(S,\theta), \varpi(T)) \in (\mathcal{KM}(V) \setminus \bigcup_{\delta \in H(V,\mathbf{Z}),\, \delta^2=-1} \delta^\perp) \times (SL_2(\mathbf{Z})\backslash\mathfrak{H})$$

により*,* 型 $H(V,\mathbf{Z})(2)$ の例外型 *Borcea-Voisin* 多様体のモジュライ空間はモジュラー多様体（の *Zariski* 開集合）

$$\mathcal{KM}^o(V) \times (SL_2(\mathbf{Z})\backslash\mathfrak{H}).$$

に同型である*.* ただし*,*

$$\varpi(S,\theta) \in \mathcal{KM}^o(V) := \mathcal{KM}(V) \setminus \bigcup_{\delta \in H(V,\mathbf{Z}),\, \delta^2=-1} \delta^\perp$$

は対合付き $K3$ 曲面 (S,θ) の周期であり,

$$\varpi(T) \in SL_2(\mathbf{Z})\backslash\mathfrak{H}$$

は楕円曲線 T の周期である.

BCOV 予想で予言された通り, 例外型 Borcea-Voisin 多様体の BCOV 不変量が無限積展開を持つ保型形式で書ける.

Theorem 21 ([9])**.** *V を次数が $1 \leq \deg V \leq 6$ を充たす Del Pezzo 曲面とする. この時, $\mathcal{KM}^o(V) \times (SL_2(\mathbf{Z})\backslash\mathfrak{H})$ 上の関数の等式*

$$\tau_{\mathrm{BCOV}} = \|\Phi_V \otimes \eta^{24}\|^2$$

が $\deg V$ のみに依存する定数倍を除いて成り立つ. ここで, $\|\cdot\|$ は保型形式の Petersson ノルムを表す. つまり, 型 $H(V,\mathbf{Z})(2)$ を持つ任意の Borcea-Voisin 多様体 $X_{(S,\theta,T)}$ に対して, 以下の等式が（普遍定数を除き）成り立つ:

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(X_{(S,\theta,T)}) = \|\Phi_V(\varpi(S,\theta))\|^2 \cdot \|\eta^{24}(\varpi(T))\|^2.$$

この定理から, 例外型の Borcea-Voisin 多様体のミラーは Del Pezzo 曲面と楕円曲線の直積であるかのように見える. もしこの仮説が正しければ, Del Pezzo 曲面と楕円曲線の直積（の適当な商？）の種数 0 インスタントン数の母関数と例外型の Borcea-Voisin 多様体の湯川結合の等価性が従うはずである. この主張（有理曲線の数え上げに関するミラー対称性）は成り立つのであろうか？

3.2. **Del Pezzo 曲面のブローアップと Φ_V の擬引き戻し.** Del Pezzo 曲面に付随する保型形式 $\Phi_V(z)$ は相互に無関係という訳ではない. これらの保型形式の相互関係を見る.

V を Del Pezzo 曲面とし,

$$\widetilde{V} := \mathrm{Bl}_{\mathfrak{p}}(V)$$

を V の一点 $\mathfrak{p} \in V$ におけるブローアップとする. $\widetilde{V}$ が Del Pezzo 曲面ならば, 以下のモジュラー多様体の包含が存在する:

$$\mathcal{KM}(V) \subset \text{判別式軌跡} = O^+(H^2(\widetilde{V},\mathbf{Z}))\backslash \bigcup_{\delta\in H^2(V,\mathbf{Z}),\,\delta^2=-1} \delta^{\perp} \subset \mathcal{KM}(\widetilde{V}).$$

このモジュラー多様体の包含に関して, 保型形式 Φ_V と $\Phi_{\widetilde{V}}$ の関係は以下の様に与えられる.

Theorem 22. *以下の主張が成立する:*

- *V が次数 $\deg V > 1$ の Del Pezzo 曲面ならば,*

$$\Phi_V = \Phi_{\widetilde{V}} \text{の}\ \mathcal{KM}(V)\ \text{への擬引き戻し.}$$

- *V が次数 $\deg V = 1$ の Del Pezzo 曲面ならば, 自然な包含 $\mathcal{KM}(V) \subset \mathcal{KM}(\mathrm{Enr})$ が存在して,*

$$\Phi_V = \Phi_{\mathrm{Enr}} \text{の}\ \mathcal{KM}(V)\ \text{への擬引き戻し.}$$

  ここで, $\mathcal{KM}(\mathrm{Enr})$ は Enriques 曲面の Kähler モジュライであり, Φ_{Enr} は Borcherds Φ-関数である.

上の定理で現れた保型形式の擬引き戻しとは以下の操作の事である.

Definition 23. $\Psi(z)$ が IV 型領域 Ω 上の群 $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ に関する保型形式で, $\Omega' \subset \Omega$ が線形部分空間の時, Ω' 上の保型形式

$$\widetilde{\Psi}|_{\Omega'}(z) := \left. \frac{\Psi(z)}{\prod_{\mathrm{div}(\Psi)\supset r^{\perp},\, r^{\perp}\supset\Omega'} (r,z)^{\mathrm{mult}(r)}} \right|_{\Omega'}$$

を Ψ の Ω' への擬引き戻しと言う.

要するに, $\Psi(z)$ の自明な零因子を全て取り除いた後で $\Psi(z)$ を Ω' に制限する操作が擬引き戻しである.

上の定理の状況は以下の図式に表される:

$$\begin{array}{lllllllll} \mathcal{KM}(\mathrm{Enr}) & \supset & \mathcal{KM}(\mathrm{delP}_1) & \supset & \cdots & \supset & \mathcal{KM}(\mathrm{delP}_8) & \supset & \mathcal{KM}(\mathbf{P}^2) \\ \mathit{\Phi}_{\mathrm{Enr}} & \to & \mathit{\Phi}_{\mathrm{delP}_1} & \to & \cdots & \to & \mathit{\Phi}_{\mathrm{delP}_8} & \to & \mathit{\Phi}_{\mathbf{P}^2} \end{array}$$

ここで, 包含はモジュラー多様体を判別式因子として埋め込む事を表し, 矢線は保型形式の擬引き戻しを表す. 又, $\mathcal{KM}(\mathrm{delP}_d)$ は次数 d の Del Pezzo 曲面の Kähler モジュライを表す. この図式から, Enriques 曲面に付随する Borcherds Φ-関数が親玉として存在していて, 他の Del Pezzo 曲面に対応する $\mathit{\Phi}_V(z)$ は本質的にそこから得られる.

Remark 24. $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ の Kähler モジュライを含めて定理が成り立つので, 本来ならば $\mathcal{KM}(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ と対応する保型形式 $\eta(\sigma)^{24}\eta(\tau)^{24}$ も図式に記入すべきであるが, 筆者の力不足のため割愛した.

3.3. $\mathit{\Phi}_V(z)$ の Fourier 展開.

最近, $\mathit{\Phi}_V(z)$ の明示的な Fourier 展開が Gritsenko により与えられた. 以下, $\mathbb{D}_k$ により, 負定値 D_k 格子を表す.

Theorem 25 ([6]). *$k := 8 - \deg V$ と置く. 二次形式付きベクトル空間の同一視 $(\mathbb{U} \oplus \mathbb{D}_k) \otimes \mathbf{C} \cong H^2(V, \mathbf{C})$ の下で, $\mathit{\Phi}_V(z)$ は以下の Fourier 展開を持つ:*

$$\mathit{\Phi}_V(z) = \sum_{n,m\in\mathbf{Z}_{>0}} \sum_{\ell\in\mathbb{D}_k^{\vee}} \sum_{d|(n,\ell,m)} \left(\frac{-4}{2\ell/d}\right) d^{11-k} \tau_{24-3k}\left(\frac{2nm-\ell^2}{2d^2}\right) \times \exp(2\pi\sqrt{-1}(nu + (\ell, \mathfrak{z}_k) + mv)).$$

ここで, (u,v) は $\mathbb{U}$ の座標であり, $\mathfrak{z}_k = (z_1, \ldots, z_k)$ は $\mathbb{D}_k^{\vee}$ の座標である. 記号 $d|(n,\ell,m)$ により, 整数 d がベクトル $(n,\ell,m) \in \mathbb{U} \oplus \mathbb{D}_k^{\vee}$ の（全ての成分の）因子である事を意味し, 数列 $\{\tau_{3m}(n)\}$ は母関数 $\eta(\tau)^{3m}$ により定義される

$$\eta(\tau)^{3m} = \sum_{n>0} \tau_{3m}(n/8)\, q^{n/8}.$$

さらに, $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_k) \in \mathbb{D}_k^{\vee} = \{(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbf{Z}^k;\, x_1 + \cdots + x_k \in 2\mathbf{Z}\}^{\vee}$ に対して,

$$\left(\frac{-4}{2\ell/d}\right) := \left(\frac{-4}{2\ell_1/d}\right)\left(\frac{-4}{2\ell_2/d}\right)\cdots\left(\frac{-4}{2\ell_k/d}\right)$$

と定める. ただし, $(\frac{p}{q})$ は平方剰余記号である.

$\varPhi_V(z)$ の Fourier 展開は Lie 型なので, Fourier 展開から一般化された Kac-Moody 超代数 $\mathfrak{g}$ が構成される. $\varPhi_V(z)$ の Fourier 係数から, $\mathfrak{g}$ の生成元と関係式が具体的に記述される. 筆者の知る限り, 保型形式を分母関数に持つ一般化された Kac-Moody 超代数で, 分母関数と生成元と関係式の全てが明示的に求められているものは僅かである. (特に, Weyl ベクトルのノルムが零でない場合の例は少ない.) $\varPhi_V(z)$ はそのような保型形式の一系列を与える.

References

[1] Bershadsky, M., Cecotti, S., Ooguri, H., Vafa, C. *Holomorphic anomalies in topological field theories*, Nuclear Phys. B **405** (1993), 279–304.

[2] ——— *Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes*, Commun. Math. Phys. **165** (1994), 311–427.

[3] Candelas, P., de la Ossa, X., Green, P., Parkes, L. A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly solvable superconformal field theory, Nuclear Physics **B407** (1993), 115–154.

[4] Cox, D.A., Katz S. *Mirror Symmetry and Algebraic Geometry*, Amer. Math. Soc. Providence (1999)

[5] Fang, H., Lu, Z., Yoshikawa, K.-I. *Analytic torsion for Calabi–Yau threefolds*, J. Diff. Geom. **80** (2008), 175–259.

[6] Gritsenko, V. *Reflective modular forms in algebraic geometry*, preprint, arXiv:1005.3753v1 (2010)

[7] Gross, M., Huybrechts, D., Joyce, D. *Calabi-Yau Manifolds and Related Geometries*, Universitext, Springer (2003).

[8] Morrison, D. *Compactifications of moduli spaces inspired by mirror symmetry*, Astérisque **218** (1993), 243–271.

[9] Yoshikawa, K.-I. *Calabi–Yau threefolds of Borcea–Voisin, analytic torsion, and Borcherds products*, Astérisque **328** (2009), 355–393

[10] Zinger, A. *The reduced genus* 1 *Gromov-Witten invariants of Calabi-Yau hypersurfaces*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), 691–737.