平田分離拡大と作用素環の拡大
HIRATA SEPARABLE EXTENSIONS AND OPERATOR ALGEBRA EXTENSIONS

綿谷　安男（WATATANI, YASUO）　九大数理

1. はじめに

今回の話では、通常の数学の範囲である体の拡大を超えて、なぜ環の拡大 $A \subset B$ を研究するのかを作用素環によくでてくる例を中心にして説明し、環の拡大の重要さと豊かさを伝えたい。体の拡大はガロワ理論を中核として学部で学ぶような基本的な対象であるが、体ではなく環の拡大も実はいろんなところに現れている。

可換環 K 上の多元環 B を環の拡大 $K \subset B$ とみなした時に、東屋多元環と分離多元環に対応する環の拡大の概念が平田分離拡大と分離拡大である。東屋多元環のある種の一般化としての「環の平田分離拡大」の導入の論文 [4] は 1968 年に発表され、分離多元環の一般化としての「環の分離拡大」の導入の平田-菅野による論文 [6] は 1966 年に発表されている。一方作用素環論における Jones の「部分因子環」の論文 [10] はずっと後の 1983 年に発表されている。これは II_1 型因子環 M の部分因子環 N の包含関係 $N \subset M$ の Jones 指数 $[M : N]$ を主題とした研究であるが、部分因子環 N の方から眺めればこれも環の拡大 $N \subset M$ の研究ともいえる。ここで、最も興味深いことの一つは、Jones 指数 $[M : N]$ が有限であることと環の拡大 $N \subset M$ が分離拡大であることが同値であることである。その意味で、年代的に先行している、平田分離拡大の論文 [4], [5] や平田-菅野による分離拡大の論文 [6] の重要性を再認識し、その先駆性故に、作用素環の研究をしている者として私は、彼らの研究に敬意を抱いている。

作用素環とはヒルベルト空間 H 上の有界作用素全体 $B(H)$ の作る環のつくるよい $*$-部分環であり、作用素ノルムからくる一様位相で閉じているものは C^*-環といい、弱作用素位相で閉じているものを von Neumann 環という。

リーマン面の被覆写像の理論はその上の有理関数体の拡大の理論とみなせる。同様なことを位相空間と連続関数環の枠組みで考えることができる。コンパクト Hausdorff 空間 X という幾何的な空間を考えることと, その X 上の連続関数全体のつくる可換環 $A = C(X)$ を考えることとは、ある意味で同じことである。逆の対応は可換環 A のスペクトル（極大イデアル全体）をとることで X を復元できる。そこで特に、コンパクト Hausdorff 空間 X、Y と被覆写像 $\pi : Y \to X$ があると、連続関数環 $A = C(X)$, $B = C(Y)$ の「よい」埋め込み $\pi^* : A \to B$ が、次で標準的にきまる : $\pi^*(a)(y) = a(\pi(y))$, $a \in A = C(X)$, $y \in Y$. ここで A をその埋め込み先 $\pi^*(A)$ と同一視すると、環の拡大 $A \subset B$ があるといえる。コンパクト Hausdorff 空間と連続写像のつくる圏と可換な C^*-環と準同型写像のつくる圏の間には上で標準的に与えたような、連続関数環をつくるという反変関手が存在している。さらに単位元をもつ

Table 1. 作用素環のみえる姿

姿	C^*-環	von Neumann 環
幾何学的空間	コンパクト Hausdorff 空間 X	測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$
可換環	連続関数環 $A = C(X)$	可測関数環 $A = L^\infty(X, \mathfrak{B}, \mu)$
作用素環	C^*-環	von Neumann 環
Hilbert 空間上の 有界作用素からなる $*$ 環	一様位相で閉じた $*$ 環	作用素弱位相で閉じた $*$ 環
building block	単純な C^*-環	因子環

可換な C^*-環はすべてあるコンパクト Hausdorff 空間 X 上の連続関数環 $C(X)$ と同型になる。そこで作用素環からなる非可換環の「よい」拡大 $A \subset B$ は被覆写像の量子化とみなすことができる。

また、測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ を考えることとその X 上の本質的に有界な可測関数全体のつくる可換環 $A = L^\infty(X, \mathfrak{B}, \mu)$ を考えることとは、ある意味で同じことである。さらに可換な von-Neumann 環はすべてある測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 上の本質的に有界な可測関数環 $A = L^\infty(X, \mathfrak{B}, \mu)$ と同型になる。そして（非可換な）von-Neumann 環でその中心が自明なものは因子環（factor）とよばれ、von-Neumann 環の building block である。こうして Jones の因子環の指数理論に戻ってくる。この見方からすると II_1 型因子環 M の部分因子環 N の包含関係 $N \subset M$ の Jones 指数 $[M : N]$ は被覆空間でいうところの被覆次数のようなものである。

この他にも環の分離拡大と部分因子環の Jone 指数の有限性が類似していることがある。環の分離拡大は、separable elements とよばれるある条件をみたすよい元の族の存在と同値である。同様に、II_1 型因子環 M の部分因子環 N の Jones 指数 $[M : N]$ が有限であることは、Pimsner-Popa basis とよばれるある条件をみたすよい元の族の存在と同値である。

Jones 指数が有限の部分因子環の作り方としては有限群や有限量子群による外部作用の不動点環がある。この意味で一般の部分因子環 $N \subset M$ の研究は量子群をさらに一般化したもののガロア理論ということができる。代数における環 A の場合も有限群 G による不動点環 A^G を考えて拡大 $A^G \subset A$ が G-ガロア拡大になっていれば環の分離拡大になる。

Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の分岐被覆写像である有理関数からは、複素力学系が作られる。そこで最後に複素力学系から作られた C^*-環についての私たちの研究の一端（梶原-綿谷 [16]、泉-梶原-綿谷 [9]、梶原 [12], 綿谷 [22]）も紹介したい。

2. 環の拡大

単位元をもつ環 A の単位元を共有する環の拡大 $1 \in A \subset B$ を考察する。体ではなく環の拡大になっている簡単な例から始めよう。

例 1. A を単位元をもつ環とする。$B = A \oplus A \oplus A$ とし、埋め込み $A \ni a \mapsto (a,a,a) \in B$ を考える。同様に埋め込み $A \subset B = A^n$ がある。この環の拡大 $A \subset B$ はもちろん簡単ではあるが、分離拡大になっているので、後で separable elements とは何かを知るには助けになる。

例 2. 単位円周 $X = \mathbb{T}$ とその disjoint union $Y = \mathbb{T} \cup \mathbb{T} \cup \mathbb{T}$ を考える。自然な被覆写像 $\pi : Y \to X$ から導かれる連続関数環の埋め込み $\pi^* : A = C(X) \to B = C(Y)$ は $\pi^*(a)(y) = a(\pi(y))$, $a \in A, y \in Y$ になる。よってこれは $A \ni a \mapsto (a,a,a) \in B = A \oplus A \oplus A$ できまる連続関数環の拡大 $A = C(X) \subset B = C(Y)$ と自然に同一視できる。

例 3. コンパクト Hausdorff 空間 Y に有限群 G が自由に作用しているとする。等質空間 $X = Y/G$ への自然な被覆写像 $\pi : Y \to X$ から導かれる連続関数環の埋め込み $\pi^* : A = C(X) \to B = C(Y)$ は $\pi^*(a)(y) = a(\pi(y))$, $a \in A, y \in Y$ になる。これは、連続関数環の拡大 $A = C(X) \subset B = C(Y)$ と自然に同一視できる。群 G は環 $B = C(Y)$ 自然に作用し、A は B の不動点環 $A = B^G$ とみなせる。この環の拡大 $A \subset B$ は G-Galois 拡大であり、分離拡大にもなっている。

さらに、連続関数環 $B = C(Y)$ の G による接合積 $B \rtimes G$ を考えると不動点環 $A = B^G$ と接合積 $B \rtimes G$ は森田同値である。この時に環の拡大 $B \subset B \rtimes G$ は平田分離拡大であり、分離拡大にもなっている。

例 4. 体の拡大の時と同様に、環 A とその上の自己同型写像 α による歪多項式環 $B = A[x, \alpha]$ とそれの多項式 f による商は環の拡大の重要な例である。これが分離拡大や平田分離拡大になる研究については池畑 [7],[8] による解説と参考文献にある論文をみよ。

例 5. 有理関数 R は Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の分岐被覆写像 $R : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ とみなせる。分岐被覆写像 R から導かれる連続関数環の埋め込み $R^* : A = C(\hat{\mathbb{C}}) \to B = C(\hat{\mathbb{C}})$ は $R^*(a)(z) = a(R(z))$, $a \in A, z \in \hat{\mathbb{C}}$ である。これも環の拡大 $A \subset B$ とみなせる。有理関数 R の反復合成のつくる列 $(R^n)_n$ は Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の（離散的な）複素力学系をあたえる [1]。R の Fatou set F_R とは $(R^n)_n$ がその上で同等連続（または正規族）となる $\hat{\mathbb{C}}$ の最大の開集合のことである。R の Julia set J_R とは Fatou set F_R の補集合のことである。Fatou set F_R は複素力学系の安定部分で　Julia set J_R は不安定でカオス的な部分である。このような二分法がなりたつ。Fatou set F_R や Julia set J_R は、$R(J_R) = J_R, R^{-1}(J_R) = J_R$ という意味で、完全不変である。そこで R を Fatou set F_R や Julia set J_R に制限しても分岐被覆写像なので、同様に環の拡大が得られる。例えば $R(z) = z^2$ だと Julia set $J_R = \mathbb{T}$ に制限した被覆写像 $R : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ からきまる連続関数環の拡大は分離拡大になる。しかし $R(z) = z^2 - 2$ だと、Julia set $J_R = [-2, 2]$ に制限した被覆写像 $R : [-2, 2] \to [-2, 2]$ からきまる連続関数環の拡大は分離拡大にならない。一般の有理関数の場合には、その Julia set J_R が分岐点を含まないことが分離拡大になる必要かつ十分な条件である。

古典的な体の有限次分離拡大 $k \subset K$ を超えて、１９６０年代には可換環上の分離多元環が扱われるようになった。特に中心上分離多元環は東屋多元環とよばれる重要な対象である。菅野と平田は、これらを拡張し、非可換環の分離拡大 $A \subset B$ の概念が菅野-平田 [6] の論文で、　非可換環の H-拡大（平田拡大）の概念が平田 [4],[5] の論文で導入された。森田理論のある意味での一般化も含んでいる。そして非可換環の分離拡大の基本的なところが研究された。

非可換環の分離拡大については、同値な条件はいろいろあるが、bimodule 性 や separable elements を使ったもので導入する。

定義.(分離拡大)　単位元をもつ環 A の単位元を共有する環の拡大 $1 \in A \subset B$ が分離拡大とは自然な「掛け算」

$$\mu : B \otimes_A B \to B, \quad \mu(x \otimes y) = xy$$

が B-B bimodule として split することとする。つまりある B-B bimodule homomorphism $\psi : B \to B \otimes_A B$ が存在して、$\mu \circ \psi = id_B$ とできることである。またこれは、次をみたす $B \otimes B$ の元 $p = \sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i$ の存在と同値である：

$$b(\sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i) = (\sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i)b, \quad (b \in B) \quad \text{且つ} \ \sum_{i=1}^n u_i v_i = 1.$$

実際、$p := \psi(1) = \sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i$ とおけばよい。この時、$\{u_i, v_i \mid i = 1, \dots n\}$ を separable elements という。もしくは略して p 自身のことも separable element という。

例 1.A を単位元をもつ環とする。環 A の n 個の直和を $B = A^n$ とする。埋め込み $A \ni a \mapsto (a, \dots, a) \in B$ を考える。この環の拡大 $A \subset B$ は分離拡大である。実際、k 番目だけが 1 となる $e_k = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0)$ からなる基底を考える。この時 $p := \sum_{k=1}^n e_k \otimes e_k$ が separable element になる。

例 2(被覆写像). コンパクト Hausdorff 空間 X とその n 枚の disjoint union $Y = X \cup X \cup \cdots \cup X$ を考える。自然な被覆写像 $\pi : Y \to X$ から導かれる連続関数環の埋め込み $\pi^* : A = C(X) \to B = C(Y)$ は $\pi^*(a)(y) = a(\pi(y))$, $a \in A, y \in Y$ になる。よってこれは $A \ni a \mapsto (a, \dots, a) \in B = A^n$ できまる連続関数環の拡大 $A = C(X) \subset B = C(Y)$ と自然に同一視できる。これはすぐ上の例 1 と本質的に同じであるので分離拡大である。ここで separable elements は k 枚目のコピー上だけで 1 で他で 0 の値をとる関数からなる。

もっと一般のコンパクト Hausdorff 空間 X と Y に対する被覆写像 $\pi : Y \to X$ から導かれる連続関数環の埋め込み $\pi^* : A = C(X) \to B = C(Y)$ は $\pi^*(a)(y) = a(\pi(y))$, $a \in A, y \in Y$ になる。これできまる連続関数環の拡大 $A = C(X) \subset B = C(Y)$ も分離拡大になる。実際、局所的には n 枚の disjoint union の時と同じように k 枚目のコピー上だけで 1 で他で 0 の値をとる関数からなるを考え、それを 1 の分解を使ってつないで、separable elements をつくればよい。

例 3. 単位元 1 をもつ環 A に有限群 G が作用している $\alpha : G \to Aut\ A$ とする。不定元 u_g, $(g \in G)$ を使って、A を係数環とする接合積

$$B = A \rtimes G = \{b = \sum_{g \in G} a_g u_g\ |a_g \in A\ \}$$

を考えよう。ここで、交換関係 $u_g a = \alpha_g(a) u_g$ 　がはいっている。さて、G の位数を $|G|$ として $|G|1$ が環 A の中で可逆とする。この時、環の拡大 $A \subset B = A \rtimes G$ は分離拡大である。実際、$\{|G|^{-1} u_g, u_{g^{-1}} \mid g \in G\}$ が separable elements になっている。

次に環の分離拡大よりもっと強い性質である環の G-ガロア拡大や環の平田分離拡大をみよう。

定義.(G-ガロア拡大) 単位元をもつ環 B とその上の自己同型からなる有限群 $G \subset Aut\ B$ を考える。不動点環 $A = B^G$ をみて、拡大 $A = B^G \subset B$ が G-ガロア拡大とは次をみたす B の元の族 $\{u_i, v_i \mid i = 1, \ldots, n\} \subset B$ が存在することである：

$$\sum_{i=1}^{n} u_i g(v_i) = 0\ (g \neq 1), \quad \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = 1.$$

この時次をみたす:

(1)B_A は A 上有限生成射影加群になる。

(2) 接合積 $B \rtimes G$ は自然に $End(B_A)$ と環として同型になる

ここで、同型写像は B の元 b を、b を左からかける掛け算写像として $End(B_A)$ の元とみなすと、

$$\sum_{g \in G} b_g u_g \mapsto \sum_{g \in G} b_g g$$

で与えられる。

逆にこの (1) と (2) は拡大 $A = B^G \subset B$ が G-ガロア拡大であることを特徴づける。

また拡大 $A = B^G \subset B$ が G-ガロア拡大であればこれは環の分離拡大になる。実際、$\{u_i, v_i \mid i = 1, \ldots, n\} \subset B$ が separable elements になっている。トレース写像 $T : B \to B^G$ を $T(b) = \sum_{g \in G} g(b)$ できめるとこれは

$$\sum_{j=1}^{n} u_j T(v_j b) = b, \quad \sum_{i=1}^{n} T(b u_i) v_i = b, \quad (b \in B)$$

をみたすことを使えば、

$$b(\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_j T(v_j b u_i) \otimes v_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_j \otimes T(v_j b u_i) v_i = (\sum_{j=1}^{n} u_j \otimes v_j) b$$

がでるので、すぐわかる。

例 4. A を単位元をもつ環とする。環 A の n 個の直和を $B = A^n$ とする。群 $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が巡回置換として $B = A^n$ に作用している。つまり巡回置換 $\sigma = (1, 2, \ldots, n)$ として、$\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_2, \ldots, a_n, a_1)$ で作用させると G は σ で生成される。埋め込み $A \ni a \mapsto (a, \ldots, a) \in B$ を考える。この環の拡大 $A \subset B$ は G-ガロア拡大で

ある。実際、i 番目だけが 1 となる $e_i = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0)$ からなる基底を考える。この時

$$\sum_{i=1}^{n} e_i \sigma^k(e_i) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i v_i = 1$$

となっているからである。

しかしここで $G = S_n$ として n 次対称群すべてをとると環の拡大 $A \subset B = A^n$ は G-ガロア拡大ではない。違いは、n 点集合 $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ に対して、$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は Ω 上に「自由に」作用しているが、S_n は Ω 上に「自由に」作用していないということである。

定義.（平田分離拡大） 単位元をもつ環 A の単位元を共有する環の拡大 $1 \in A \subset B$ が平田分離拡大 (H-分離拡大）とは、B の有限直和 B^n の直和因子に $B \otimes_A B$ が B-B 加群として同型になることである。

Centralizer を次のようにあらわす :

$$C_B(A) := \{x \in B \mid \forall a \in A \ ax = xa\}$$

$$(B \otimes_A B)^B = \{x \in B \otimes_A B \mid \forall b \in B \ bx = xb\}$$

環の拡大 $1 \in A \subset B$ が平田分離拡大である必要十分条件は有限個からなる族 $v_i \in C_B(A), i = 1, \dots, m$ と $\sum_j x_{ij} \otimes y_{ij} \in (B \otimes_A B)^B, j = 1, \dots, n$ で次をみたすものが存在することである :

$$1 \otimes 1 = \sum_i \sum_j v_i x_{ij} \otimes y_{ij} = \sum_i \sum_j x_{ij} \otimes y_{ij} v_i$$

例 5. R を単位元をもつ環とし、 $B = M_n(R)$ を R の元を成分にもつ $n \times n$ 行列全体とする。$A = R^n$ が行列の対角として $B = M_n(R)$ に埋め込んでできる環の拡大 $A \subset B$ は平田分離拡大である。実際 $\{e_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$ を matrix units とする。$v_i := e_{ii} \in C_B(A)$, $\sum_j x_{ij} \otimes y_{ij} := \sum_j e_{ji} \otimes e_{ij} \in (B \otimes_A B)^B$ とおくと条件をみたす。。

例 6. コンパクト Hausdorff 空間 Y に有限群 G が自由に作用しているとする。等質空間 $X = Y/G$ への自然な被覆写像 $\pi : Y \to X$ から導かれる連続関数環の埋め込み $\pi^* : A = C(X) \to B = C(Y)$ は、連続関数環の拡大 $A = C(X) \subset B = C(Y)$ と自然に同一視できる。群 G は環 $B = C(Y)$ 自然に作用する。つまり、$\alpha : G \to Aut\ A$ が

$$(\alpha_g(a))(x) = a(g^{-1} \cdot x), \ g \in G, a \in A, x \in X$$

できまる。A は B の不動点環 $A = B^G$ とみなせる。この環の拡大 $A \subset B$ は G-Galois 拡大である。

実際有限群 G が自由に作用しているので、任意の $x \in X$ に対して x の開近傍 U_x と $f_x \in A = C(X)$ で、$f_x|_{U_x} = 1$ で

$$\alpha_g(f_x)\alpha_h(f_x) = 0, \quad (g \neq h)$$

となるものがとれる。$X=\cup_{x\in X}U_x$ はコンパクトなので有限個の $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ がとれて $X=\cup_{i=1}^n U_{x_i}$ とできる。$v:=\sum_{k=1}^n f_{x_k}\geq 1$ なので $u_i=v_i=(v^{-1}f_{x_i})^{1/2}\in A$ とおくと、$\sum_{i=1}^n u_i g(v_i)=0 \quad (g\neq 1)$ で、$\sum_{i=1}^n u_i v_i=\sum_{i=1}^n u_i^2=1$ となっている。

さらに環の拡大

$$B=C(X)\subset C=C(X)\rtimes G:=\{c=\sum_{g\in G}a_g\lambda_g \mid a_g\in A\ \}$$

は平田分離拡大である。実際 $v_i\in C_C(B)=B=C(X)$ で, $x_{ig}=\lambda_g v_i^{1/2}$, $y_{ig}=v_i^{1/2}\lambda_g{}^{-1}$, とおくと $\sum_g x_{ig}\otimes y_{ig}\in(B\otimes_A B)^B$ が条件をみたす。

この例をみると、G-Galois 拡大と平田分離拡大はある意味で双対的な関係にあることがわかる。

分離拡大に関連している概念に Frobenius 拡大がある。環 A 上の加群全体の圏を Mod_A とかく。

定義.(Frobenius 拡大) 単位元をもつ環 A の単位元を共有する環の拡大 $1\in A\subset B$ に対して関手 $H:Mod_A\to Mod_B$ を $H(M_A)=Hom_A(B_A,M_A)$ できめ、関手 $T:Mod_A\to Mod_B$ を $T(M_A)=M\otimes_A B$ できめる。拡大 $A\subset B$ が Frobenius 拡大とは、関手 H と T が naturally equivalent になることをいう。これは次をみたす A-A 双加群準同型 $E:B\to A$ と有限個の族 $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n\in B$ が存在することと同値である：

$$\sum_{i=1}^n x_iE(y_ib)=b=\sum_{i=1}^n E(bx_i)y_i,\quad (b\in B)$$

Frobenius 拡大と分離拡大はどちらも G-ガロア拡大を含むが、直接の包含関係はない。しかし、Frobenius 拡大 $A\subset B$ にある centralizer の元 $d\in C_B(A)$ で $\sum_{i=1}^n x_idy_i=1$ をみたすものが存在すれば、拡大 $A\subset B$ は分離拡大になることが知られている。Frobenius 拡大については L.Kadison の本 [11] をみよ。

3. 環の分離拡大と作用素環

作用素環とはヒルベルト空間 H 上の有界作用素全体 $B(H)$ のなす環のよい $*$-部分環のことである。有界作用素 T のノルムを

$$\|T\|=\sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\mid x\in H,x\neq 0\}$$

できめる。任意の $x,y\in H$ に対して

$$<T_\lambda x,y>\to<Tx,y>$$

となる時、作用素 T_λ は作用素 T に弱作用素位相で収束するという。$B(H)$ の $*$-部分環で作用素ノルムからくる一様位相で閉じているものは C^*-環といい、弱作用素位相で閉じているものを von Neumann 環という。von-Neumann 環でその中心が自明なものは因子環（factor）とよばれ、von-Neumann 環の building block である。特に無限次元の因子環 M で finite trace τ をもつものを II_1 型因子環という。M に

$(x|y) = \tau(y^*x)$ で内積をいれて完備化したものを $L^2(M,\tau)$ とする。これは自然に M が左から作用している。

定義.(Jones 指数) II_1 型因子環 M の部分因子環 N の包含関係 $N \subset M$ の Jones 指数 $[M:N]$ とは M-加群 $L^2(M,\tau)$ を N に制限したときの「加群次元」である：

$$[M:N] = \dim_N L^2(M,\tau) \in [0,\infty]$$

これは正確には coupling constant を使って定義できるものである。Jones 指数 $[M:N]$ が有限であるのは N と可換な $L^2(M,\tau)$ 上の有界作用素全体である N' がまた II_1 型因子環になることと同値である。この時、正射影 $e_n : L^2(M,\tau) \to L^2(N,\tau)$ を使うと Jones 指数 $[M:N]$ の値は e_N の N' 上の traceτ' の値の逆数である。つまり

$$[M:N] = \frac{1}{\tau'(e_N)}$$

といってもよい。条件付期待値 $M \to N$ を使うと、Jones 指数 $[M:N]$ が有限である必要十分条件は Pimsner-Popa basis とよばれる次をみたす有限個の M の元の族 $u_1, u_2, \ldots, u_n$ が存在することである：

$$m = \sum_{i=1}^{n} u_i E_N(u_i^* m)$$

この時 Jones 指数 $[M:N] = \sum_{i=1}^{n} u_i u_i^*$ とも表せる。

双加群 ${}_N M_M$ と ${}_M M_N$ を交互にテンソル積をとってからその直既約成分を集めて頂点とするグラフを principal graph という。

行列環で近似可能な AFD という部分因子環の分類は Jones 指数 $[M:N]$ が 4 未満の場合には、Jones, Popa, Ocneanu, Kawahigashi, Izumi らにより次のように完全分類された。詳細は Evans-Kawahigashi の本 [2] を見よ。

Theorem 3.1. *AFDII_1*型因子環 M とその部分因子環 N について *Jones*指数 $[M:N]$ が *4* 未満ならば、完全分類が可能である。現れる *principal graph* は *Dinkin* 図形の *A,D,E*型であり、A_n 型は各 1 個、D_{2n} 型は各 1 個、D_{2n+1} 型は 0 個、E_6 型は 2 個、E_7 型は 0 個、E_8 型は 2 個ある。その *Jones* 指数 $[M:N]$ は *Dinkin* 図形の *Perron-Frobenius* 固有値の 2 乗であり、$4\cos^2\{\pi/k \mid k = 3,4,5,\ldots\}$ になる。

このように II_1 型因子環 M の部分因子環 N の研究は、包含関係 $N \subset M$ の Jones 指数 $[M:N]$ を主題とした研究であるが、部分因子環 N の方から眺めればこれも環の拡大 $N \subset M$ の研究ともいえる。ここで、最も興味深いことの一つは、Jones 指数 $[M:N]$ が有限であることと環の拡大 $N \subset M$ が分離拡大であることが強く関連していたということである。

Theorem 3.2. II_1 型因子環 M とその部分因子環 N について次は同値である。

(1) *Jones* 指数 $[M:N]$ は有限である。

(2) 環の拡大 $N \subset M$ は分離拡大である。

(3) 環の拡大 $N \subset M$ は *Frobenius* 拡大である。

上の定理は単純な C^*-環の場合にも成立している [21]。II_1 型因子環 M の部分因子環 N の包含関係 $N \subset M$ の depth が有限とはその principal graph が有限ということである。Ocneanu により、包含関係 $N \subset M$ が量子群から来るのは depth が 2 以下のときという特徴づけがある。L. Kadison らは [14],[15] 一般の環で同様な depth が 2 という条件を研究している。さらに平田分離拡大の場合も調べていて興味深い。L. Kadison は分離拡大を使って Jones 多項式を再構成している [13] がそれについては、平野の解説 [3] をみよ。

4. 複素力学系からつくられる C^*-環

有理関数は分岐被覆写像の典型的な例である。有理関数 R の反復合成のつくる列 $(R^n)_n$ は Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の（離散的な）複素力学系をあたえる [1]。R の Fatou set F_R とは $(R^n)_n$ がその上で同等連続（または正規族）となる $\hat{\mathbb{C}}$ の最大の開集合のことである。R の Julia set J_R とは Fatou set F_R の補集合のことである。Fatou set F_R は複素力学系の安定部分で　Julia set J_R は不安定でカオス的な部分である。

有理関数の代わりにクライン群の作用を考える。一次分数変換（メビウス変換）

$$R(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad - bc = 1,\ a, b, c, d \in \mathbb{C}),$$

を $PSL(2, \mathbb{C})$ と同一視しよう。この時、$PSL(2, \mathbb{C})$ の離散部分群 Γ を Kleinian group という。

Kleinian group Γ の ordinary set Ω_Γ とは、$z \in \hat{\mathbb{C}}$ でそのある近傍で Γ が正規族になるもの全体のなす開集合のことで、その $\hat{\mathbb{C}}$ での補集合 Λ_Γ を Γ の limit set という。Ordinary set Ω_Γ はクライン群の安定部分で、limit set Λ_Γ は不安定部分（カオス部分）である。

Sullivan [20] は、有理関数の反復合成の複素力学系の理論と、Kleinian groups の理論との類似を示す辞書を作った。Sullivan の辞書は、有理関数 R の Julia set J_R と Kleinian group Γ の limit set Λ_Γ との間に、強い類似性があることを示している。Kleinian group Γ の limit set Λ_Γ への作用からは接合積で C^*-環を作れる。有理関数の反復合成の複素力学系からは Cuntz-Pimsner 構成を利用してやはり C^*-環を作れる。このような複素力学系と作られた C^*-環のあいだの相互関連の視点から Sullivan の辞書を $C*$-環のレベルで解明することをめざしてきた。

梶原氏との共同研究 [16] で、有理関数 R に対してリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ と Julia set J_R と Fatou set F_R のそれぞれに応じて、3 つの C^*-環 $\mathcal{O}_R(\hat{\mathbb{C}})$ と $\mathcal{O}_R(J_R)$ と $\mathcal{O}_R(F_R)$ を導入した。これらは、分岐点を含んだ R のグラフを使って C^*-bimodules　(C^*-correspondences ともいう) を作り、その Cuntz-Pimsner algebras として構成された。例えば　C^*-環 $\mathcal{O}_R(J_R)$ は $C(J_R)$ と $\{S_f ; f \in C(\mathrm{graph}\, R|_{J_R})\}$ から生成され、Cuntz-Pimsner の交換関係をみたす普遍的な環である。私たちはこの C^*-環 $\mathcal{O}_R(J_R)$ を Kleinian group Γ の boundary action による $C(\Lambda_\Gamma)$ の接合積 $C(\Lambda_\Gamma) \rtimes \Gamma$ [17] の類似としてとらえている。

ここで複素力学系と C^*-環の「不完全な」辞書を示してみよう。

Table 2. a dictionary

Rational function R	Kleinian group Γ	C^*-algebra
Julia set J_R	limit set Λ_Γ	$\mathcal{O}_R(J_R)$
unstable, self-similar	unstable	purely infinite
Fatou set F_R	ordinary set Ω_Γ	$\mathcal{O}_R(F_R)$
J_R は 3 点を含み完全不変	Λ_Γ は 3 点を含み完全不変	?
反発周期点は J_R で稠密	双曲型不動点は Λ_Γ で稠密	?
F_R の成分は $0, 1, 2, \infty$	Λ_Γ の成分は $0, 1, 2, \infty$	?
∂(完全不変成分)$= J_R$	∂(不変成分)$= \Lambda_\Gamma$	?
no wandering domains thm.	Ahlfors' finiteness thm.	?
$N = \deg R$	the number of generators	基本群?
$\deg R \geq 2$	non elementary	not $C(\mathbb{T})$
orbit structure	orbit structure	?
invariant measure $+\alpha$	invarinat measure $+\alpha$	KMS state
branched points (singularity)	?	extreme KMS states
?	?	K-groups
?	?	gauge action
Blaschke product	Fucks group	?
双曲型有理関数	放物型変換なしの幾何学的有限なクライン群	?
双曲型有理関数の面積 0 定理	Ahlfors の 0-1 定理	?
Hausdorff dimension	Hausdorff dimension	?

Theorem 4.1. R を２次以上の有理関数とするならば、有理関数 R の作る複素力学系が *Julia set* J_R 上で生成する C^*-環 $\mathcal{O}_R(J_R)$ は純無限単純な C^*-環になる。

Theorem 4.2. ２次以上の有理関数 R に対して、有理関数 R の作る複素力学系が *Julia set* J_R 上で生成する C^*-環 $\mathcal{O}_R(J_R)$ を考える。次は同値である。
（１）ゲージ作用による不動点環（コア）$\mathcal{O}_R(J_R)^{\mathbb{T}}$ は単純である。
（２）*Julia set* J_R が分岐点を含まない：$J_R \cap B_R = \emptyset$。

References

[1] A. F. Beardon, *Iteration of rational functions* GTM 132, 1991, Springer New York.
[2] D. Evans and Y. Kawahigashi, *Quantum Symmetries on Operator Algebras,* 1998, Oxford Science Publications.
[3] Y. Hirano, *Separability and the Jones basic construction,* 第 43 回代数学シンポジウム報告集 33-42.
[4] K. Hirata, *Some Types of separable extensions of rings,* Nagoya Math. J. **33** (1968), 107-115.
[5] K. Hirata, *Separable extensions and centralizers of rings,* Nagoya Math. J. **35** (1969), 31-45.
[6] K. Hirata and K. Sugano, *On semisimple extensions and separable extensions over non commutative rings,* J. Math. Soc. Japan **18** (1966), 360-373.
[7] S. Ikehata, *On separable extensions of Noncommutative rings,* 数理研講究録 **1562** (2007), 14-18.
[8] S. Ikehata, 歪多項式環の分離多項式*,* 数理研講究録 **1655** (2009), 11-21.
[9] M. Izumi, T. Kajiwara and Y. Watatani, *KMS states and branched points*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **27** (2007), 18887-1918.
[10] V. Jones, *Index for subfactors,* Inv. Math. **72** (1983), 1-25.
[11] L. Kadison, *New Examples of Frobenius Extensions,* University Lecture Series 14, Amer. Math. Soc. 1999.
[12] T. Kajiwara, *Countable basis for Hilbert C^*-modules and classification of KMS states*, Contemp. Math. AMS, **503** (2009), Operator struture and dynamical systems,
[13] L. Kadison, *The Jones polynomial and certain separable Frobenius extensions,* J. Algebra, **186** (1996), 461-475.
[14] L. Kadison and D. Nikshych, *Hopf algebra actions on strongly separable extensions of depth two,* Adv. in Math.**163** (2001), 258-286.
[15] L. Kadison and K. Szlachanyi, *Bialgebroid actions on depth two extensions and duality,* Adv. in Math. **179** (2003), 75-121.
[16] T. Kajiwara T. and Y. Watatani, *C^*-algebras associated with complex dynamical systems,* Indiana Math. J. **54** (2005), 755-778.
[17] M. Laca and J. Spielberg, *Purely infinite* C^**-algebras from boundary actions of discrete groups,* J. reine angew. Math. **480** (1996), 125-139.
[18] F. Murray and J. von Neumann, *On rings of operators IV*, Ann. Math. **44**, (1943), 716–808.
[19] M. Pimsner, *A class of C^*-algebras generating both Cuntz-Krieger algebras and crossed product by $\mathbb{Z}$,* Free probability theory, AMS, (1997), 189–212.
[20] D. Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains*, Annals of Math. **122** (1985), 401-418.
[21] Y. Watatani, *Index for C^*-subalgebras,* Memoirs AMS **424** (1990).
[22] Y. Watatani, *Countable dynamical systems and associated C^*-algebras,* , Contemp. Math. AMS, **503** (2009), Operator struture and dynamical systems.

(Yasuo Watatani) Department of Mathematical Sciences, Kyushu University, Motooka, Fukuoka, 819-0395, Japan