Mirror symmetry and strange duality

for weighted homogeneous polynomials

高橋 篤史

平成 22 年 12 月 1 日

1　まえがき

ミラー対称性は複素代数幾何学とシンプレクティック幾何学の双対性と考えることができる．ミラー対称性のアイデアを特異点理論に応用することで，特異点・ルート系・ワイル群・リー環・有限次元代数 ... といった異なる数学的背景を持つ分野を結び付け，新たな知見を得ることができる．ここでは，14 個の例外型特異点に対する Arnold の「奇妙な双対性」を可逆多項式という 3 変数の重み付き斉次多項式のクラスに拡張し，その代数的・幾何学的背景を明確にする．例えば，Arnold の「奇妙な双対性」を述べるためには Gablielov 数という概念が必要であるが，Gablielov 数は 14 個の例外型特異点に対してのみ「実験的に」与えられたものであり，一般の特異点に対する定義は存在していなかった．このことは，重み付き斉次多項式に対して系統的にカスプ特異点を対応させることで解決されることになる．そして，重み付き射影直線とカスプ特異点のホモロジー的ミラー対称性現象が Arnold の「奇妙な双対性」の真の姿であることがわかるのである．

より正確に述べることにしよう．$f(x,y,z)$ を原点 $0\in\mathbb{C}^3$ にのみ孤立特異点を持つ多項式とする．f の Milnor ファイバーにおける消滅 Lagrangian 部分多様体の distinguish basis は，有向深谷圏と呼ばれる A_∞-圏 $\mathrm{Fuk}^{\rightarrow}(f)$ に圏化される．とくに，その導来圏 $D^b\mathrm{Fuk}^{\rightarrow}(f)$ は，三角圏としては，さまざまな幾何的変形・選択によらないことが知られている．このようにして，f に対してシンプレクティック幾何学に対する不変量が得られる．とくに，定義により $D^b\mathrm{Fuk}^{\rightarrow}(f)$ は full exceptional collection を持つことがわかる．

一方で，$f(x,y,z)$ が重み付き斉次多項式ならば，極大次数付き特異点の圏と呼ばれる三角圏

$$D^{L_f}_{Sg}(R_f) := D^b(\mathrm{gr}^{L_f}\text{-}R_f)/D^b(\mathrm{proj}^{L_f}\text{-}R_f) \tag{1.1}$$

を構成することができる．ここで，$R_f := \mathbb{C}[x,y,z]/(f)$，$L_f$ は（後で定義を述べる）f の極大次数である．なお，定義からでは明らかではないが，この圏 $D^{L_f}_{Sg}(R_f)$ は，滑らかで固有な代数多様体の有界導来圏の重み付き斉次特異点に対する類似である．

Calabi–Yau 多様体の位相的ミラー対は，特異点（物理学における Landau–Ginzburg 軌道体理論）のミラー対称性により，系統的に構成された．そこでは，良い性質を持つ重み付き斉次多項式に対する Berglund–Hübsch 転置が重要であった．そこで，Calabi–Yau 多様体のホモロジー的ミラー対称性のアイデアを特異点に対して適用し，これらを合わせて考察することで，次の予想が自然に期待されることとなる（定義は後の節にて述べる）：

予想 1.1 ([T1][T2])**.** $f(x,y,z)$ を可逆多項式とする．

(i) 箙と関係式 (Q,I) で，三角同値

$$D_{Sg}^{L_f}(R_f) \simeq D^b(\text{mod-}\mathbb{C}Q/I) \simeq D^b\mathrm{Fuk}^{\to}(f^t) \tag{1.2}$$

をもたらすものが存在する．

(ii) 箙と関係式 (Q',I') で，三角同値

$$D^b\mathrm{coh}(\mathcal{C}_{G_f}) \simeq D^b(\text{mod-}\mathbb{C}Q'/I') \simeq D^b\mathrm{Fuk}^{\to}(T_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}) \tag{1.3}$$

をもたらすものが存在する．とくに，これは三角同値 (1.2) と整合的である．ここで，$\mathcal{C}_{G_f}$ は f の極大可換対称性 G_f に付随した重み付き射影直線，$T_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ は「カスプ特異点」である．

これらの予想に対する多くの証拠が多くの研究者によりすでに発見されている．その中でも最も重要なものは，(Q',I') として後で述べる図形 $T(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ に適切な向き付けと 2 重破線に対する関係式を与えたものがとれるということである．これにより，主定理 5.1 が証明されることになるのである．

2 可逆多項式

$f(x_1,\dots,x_n)$ を重み付き斉次多項式とする．つまり，正の整数 $w_1,\dots,w_n$ および d で，$\lambda\in\mathbb{C}^*$ に対して $f(\lambda^{w_1}x_1,\dots,\lambda^{w_n}x_n)=\lambda^d f(x_1,\dots,x_n)$ が成り立つものとする．このとき，$(w_1,\dots,w_n;d)$ を**ウェイト系**という．$\gcd(w_1,\dots,w_n,d)=1$ ならば, ウエイト系は**既約**であるという．ここでは，既約でないウエイト系も取り扱う．

定義 2.1. 次の条件をみたす重み付き斉次多項式 $f(x_1,\dots,x_n)$ を**可逆多項式**でという：

(i) 変数の数 $(=n)$ が $f(x_1,\dots x_n)$ に現れる単項式の数に一致する，つまり，$a_i\in\mathbb{C}^*$ および非負整数 E_{ij} $(i,j=1,\dots,n)$ に対して，

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n a_i\prod_{j=1}^n x_j^{E_{ij}}$$

となる．

(ii) ウェイト系 $(w_1,\dots,w_n;d)$ は，$f(x_1,\dots,x_n)$ によって（$\gcd(w_1,\dots,w_n;d)$ をのぞき）ただひととおりに決定される．つまり, 行列 $E:=(E_{ij})$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上可逆である．

(iii) $f(x_1,\dots,x_n)$ および

$$f^t(x_1,\dots,x_n) := \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{E_{ji}},$$

として定義される $f(x_1,\dots,x_n)$ の *Berglund–Hübsch* **転置** $f^t(x_1,\dots,x_n)$ が原点 $0\in\mathbb{C}^n$ に孤立特異点を持つ．言い換えれば，f, f^t の *Jacobi* **環** $Jac(f), Jac(f^t)$

$$Jac(f) := \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n] \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

$$Jac(f^t) := \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n] \Big/ \left(\frac{\partial f^t}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f^t}{\partial x_n}\right)$$

は，ともに複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元代数となり，$\dim_{\mathbb{C}} Jac(f), \dim_{\mathbb{C}} Jac(f^t) \geq 1$ である．

これらの性質をもつ多項式は，ミラー対称性研究の初期から長期間にわたり熱心に研究されてきた．その代表例は，多項式とその多項式の対称性からなる組のミラー対を考えることによる，位相的ミラー対をなす Calabi–Yau 多様体の大量構成である．なお，**可逆多項式**という名前は Kreuzer [K] によって導入された．

定義 2.2. $f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{E_{ij}}$ を可逆多項式とする．方程式

$$E\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \det(E)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d := \det(E).$$

の解として与えられるウェイト系 $(w_1,\dots,w_n;d)$ を，**標準ウェイト系** W_f とあらわす．

クラメルの公式から $w_1,\dots,w_n$ は正の整数であることがすぐにわかる．

定義 2.3. $f(x_1,\dots,x_n)$ を可逆多項式，$W_f = (w_1,\dots,w_n;d)$ をその標準ウェイト系とする．このとき

$$c_f := \gcd(w_1,\dots,w_n,d)$$

と定義する．

定義 2.4. $f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{E_{ij}}$ を可逆多項式とする．各変数 $x_i, i=1,\dots,n$ に対する文字 $\vec{x_i}$ および多項式 f に対する文字 $\vec{f}$ によって生成される自由アーベル群 $\oplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}\vec{x_i}\oplus\mathbb{Z}\vec{f}$ を考える．このとき，可逆多項式 f の**極大次数** L_f を，商

$$L_f := \bigoplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}\vec{x_i}\oplus\mathbb{Z}\vec{f}/I_f$$

によって定義する．ここで，I_f は元

$$\vec{f} - \sum_{j=1}^{n} E_{ij}\vec{x_j}, \quad i=1,\dots,n$$

により生成される部分群である．

L_f は階数 1 のアーベル群である．ただし，かならずしも自由アーベル群ではない．

定義 2.5. $f(x_1, \dots, x_n)$ を可逆多項式，L_f をその極大次数とする．f の**極大可換対称性** G_f を，

$$G_f := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}L_f)$$

で定義されるアーベル群とする．ここで，$\mathbb{C}L_f$ で L_f の群環をあらわす．言い換えれば，

$$G_f = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{C}^*)^n \,\middle|\, \prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{E_{1j}} = \cdots = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{E_{nj}} \right\}$$

である．

可逆多項式 f は G_f の変数への自然な作用により斉次である．つまり，$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in G_f$，$\lambda := \prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{E_{1j}} = \cdots = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{E_{nj}}$ に対して，

$$f(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_n)$$

が成り立つ．

3 Dolgachev 数

これからは三変数の可逆多項式に制限して話を進める．そこでは，次の可逆多項式の分類結果が重要な役割を果たす．

命題 3.1 ([AGV])**.** $f(x, y, z)$ を可逆多項式とする．このとき，各変数を適当にスケール変換することにより，f は表 *1* における *5* つのタイプのいずれかの形となる． □

これから，表 1 における「Type」という分類表記を用いる．これは [**?**] における分類に基づいており，[AGV] においては「Class」という表記で分類されている．

可逆多項式 $f(x, y, z)$ に対して，商スタック

$$\mathcal{C}_{G_f} := \left[f^{-1}(0) \backslash \{0\} / G_f \right] \tag{3.1}$$

を考えることができる．f は原点 $0 \in \mathbb{C}^3$ にのみ孤立特異点をもち，G_f は 1 次元複素トーラス $\mathbb{C}^*$ を位数 c_f の有限アーベル群で拡大したものなので，商スタック $\mathcal{C}_{G_f}$ は Deligne–Mumford スタックであり，とくに有限個の固定点を持つ滑らかな射影的曲線であることがわかる．さらに，次のことがわかる：

定理 3.2 ([ET])**.** $f(x, y, z)$ を可逆多項式とする．このとき，商スタック $\mathcal{C}_{G_f}$ は高々 *3* 点の固定点を持つ射影直線 $\mathbb{P}^1$ である．各固定点における固定化群の位数は表 *2* における $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ で与えられる．ただし，固定点の数は $\alpha_i \geq 2$ となる i の数である． □

定義 3.3. 定理 3.2 における数 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ を組 (f, G_f) に対する *Dolgachev* **数**といい，A_{G_f} であらわす．

Type	Class	f	f^t
I	I	$x^{p_1}+y^{p_2}+z^{p_3}$ $(p_1,p_2,p_3\in\mathbb{Z}_{\geq 2})$	$x^{p_1}+y^{p_2}+z^{p_3}$ $(p_1,p_2,p_3\in\mathbb{Z}_{\geq 2})$
II	II	$x^{p_1}+y^{p_2}+yz^{\frac{p_3}{p_2}}$ $(p_1,p_2,\frac{p_3}{p_2}\in\mathbb{Z}_{\geq 2})$	$x^{p_1}+y^{p_2}z+z^{\frac{p_3}{p_2}}$ $(p_1,p_2,\frac{p_3}{p_2}\in\mathbb{Z}_{\geq 2})$
III	IV	$x^{p_1}+zy^{q_2+1}+yz^{q_3+1}$ $(p_1\in\mathbb{Z}_{\geq 2},\,q_2,q_3\in\mathbb{Z}_{\geq 1})$	$x^{p_1}+zy^{q_2+1}+yz^{q_3+1}$ $(p_1\in\mathbb{Z}_{\geq 2},\,q_2,q_3\in\mathbb{Z}_{\geq 1})$
IV	V	$x^{p_1}+xy^{\frac{p_2}{p_1}}+yz^{\frac{p_3}{p_2}}$ $(p_1,\frac{p_3}{p_2}\in\mathbb{Z}_{\geq 2},\frac{p_2}{p_1}\in\mathbb{Z}_{\geq 1})$	$x^{p_1}y+y^{\frac{p_2}{p_1}}z+z^{\frac{p_3}{p_2}}$ $(p_1,\frac{p_3}{p_2}\in\mathbb{Z}_{\geq 2},\frac{p_2}{p_1}\in\mathbb{Z}_{\geq 1})$
V	VII	$x^{q_1}y+y^{q_2}z+z^{q_3}x$ $(q_1,q_2,q_3\in\mathbb{Z}_{\geq 1})$	$zx^{q_1}+xy^{q_2}+yz^{q_3}$ $(q_1,q_2,q_3\in\mathbb{Z}_{\geq 1})$

表 1: 3 変数の可逆多項式

Type	$f(x,y,z)$	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$
I	$x^{p_1}+y^{p_2}+z^{p_3}$	(p_1,p_2,p_3)
II	$x^{p_1}+y^{p_2}+yz^{\frac{p_3}{p_2}}$	$\left(p_1,\frac{p_3}{p_2},(p_2-1)p_1\right)$
III	$x^{p_1}+zy^{q_2+1}+yz^{q_3+1}$	(p_1,p_1q_2,p_1q_3)
IV	$x^{p_1}+xy^{\frac{p_2}{p_1}}+yz^{\frac{p_3}{p_2}}$	$\left(\frac{p_3}{p_2},(p_1-1)\frac{p_3}{p_2},p_2-p_1+1\right)$
V	$x^{q_1}y+y^{q_2}z+z^{q_3}x$	$(q_2q_3-q_3+1,q_3q_1-q_1+1,q_1q_2-q_2+1)$

表 2: 組 (f,G_f) に対する Dolgachev 数

なお，定理 3.2 と Geigle–Lenzing[GL] による重み付き射影直線の導来圏の構造定理により，次のことがわかる：

系 3.4 ([T1][T2])**.** 極大次数付き特異点の三角圏 $D^{L_f}_{Sg}(R_f)$ は *full exceptional collection* をもつ. □

さらに強く，Type I,II,III の場合には full strongly exceptional collection を持つ [T2]．Type IV, V の場合にも full strongly exceptional collection の構成が完成しつつある．とくに，各 Type に対して系統的に full strongly exceptional collection が構成でき，それに対応する有限次元代数の大局次元が 3 以下であるという重要な性質が得られている．

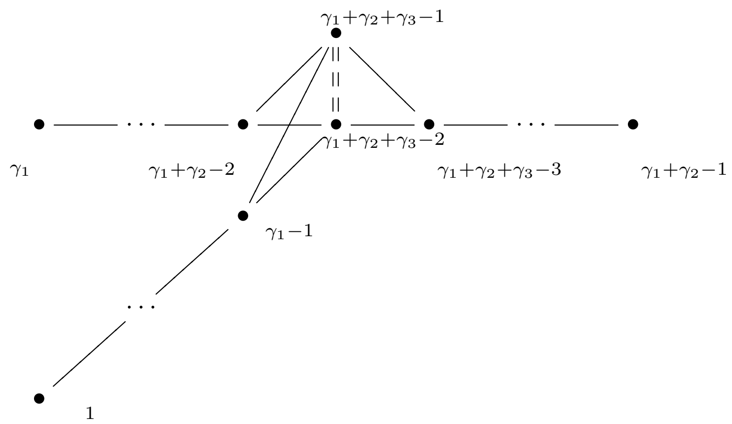

図 1: Coxeter–Dynkin 図形 $T(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$

4 Gabrielov 数

前節では可逆多項式から代数的不変量としての正の整数の組を構成した．この節では，幾何学的不変量を取り出すことが目標である．

定義 4.1. 整数 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ に対して，多項式

$$x^{\gamma_1} + y^{\gamma_2} + z^{\gamma_3} + axyz, \quad \text{for some } a \neq 0,$$

を $T_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$-型の多項式という．

正の整数の組 (a, b, c) に対して，

$$\Delta(a, b, c) := abc - bc - ac - ab$$

とおく．$\Delta(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) > 0$ ならば，$T_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$-型の多項式はカスプ特異点を定める．ただし，ここでは $\Delta(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) > 0$ に制限せず，一般的な条件のもとで考える．

$T_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$-型の多項式の Coxeter–Dynkin 図式を $T(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ であらわす（表 1）．ここで $T(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ は，$\Delta(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \geq 0$ のときは，零点集合 $T_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} = 0$ を $(\mathbb{C}^3, 0)$ の中で考えたときの，$\Delta(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) < 0$ のときは零点集合 $T_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} = 0$ を $\mathbb{C}^3$ の中で大局的に考えたときの，Milnor ファイバーにおける消滅サイクルの交叉行列を組み合わせ論的に記述したものである．つまり，交叉行列 $I = (I_{ij})$ は，各頂点 $\bullet_i$ に対して $I_{ii} = -2$，2 頂点 $\bullet_i$ および $\bullet_j$ が線分で結ばれていないとき $I_{ij} = 0$，さらに

$$I_{ij} = 1 \Leftrightarrow \bullet_i \text{———} \bullet_j\ , \quad I_{ij} = -2 \Leftrightarrow \bullet_i = = = \bullet_j$$

として与えられる．

定理 4.2 ([ET])**.** $f(x, y, z)$ を可逆多項式とする．表 *3* に基づき，f に正の整数 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ を対応させる．

(i) $\Delta(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)<0$ ならば，原点 $0\in\mathbb{C}^3$ における適当な多項式座標変換により，多項式 $f(x,y,z)-xyz$ は $T_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$-型の多項式の単項式変形

$$x^{\gamma_1}+y^{\gamma_2}+z^{\gamma_3}-xyz+\sum_{i=1}^{\gamma_1-1}a_ix^i+\sum_{j=1}^{\gamma_2-1}b_jy^j+\sum_{k=1}^{\gamma_3-1}c_kz^k+c,\ a_i,b_j,c_k,c\in\mathbb{C}$$

となる．

(ii) $\Delta(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=0$ ならば，原点 $0\in\mathbb{C}^3$ における適当な正則座標変換により，多項式 $f(x,y,z)+axyz$ はある $a\in\mathbb{C}^*$ に対して $T_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$-型の多項式となる．

(iii) $\Delta(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)>0$ ならば，原点 $0\in\mathbb{C}^3$ における適当な正則座標変換により，多項式 $f(x,y,z)-xyz$ は $T_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$-型の多項式となる．

Type	$f(x,y,z)$	$(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$
I	$x^{p_1}+y^{p_2}+z^{p_3}$	(p_1,p_2,p_3)
II	$x^{p_1}+y^{p_2}+yz^{\frac{p_3}{p_2}}$	$\left(p_1,p_2,(\frac{p_3}{p_2}-1)p_1\right)$
III	$x^{p_1}+zy^{q_2+1}+yz^{q_3+1}$	(p_1,p_1q_2,p_1q_3)
IV	$x^{p_1}+xy^{\frac{p_2}{p_1}}+yz^{\frac{p_3}{p_2}}$	$\left(p_1,(\frac{p_3}{p_2}-1)p_1,\frac{p_3}{p_1}-\frac{p_3}{p_2}+1\right)$
V	$x^{q_1}y+y^{q_2}z+z^{q_3}x$	$(q_2q_3-q_2+1,q_3q_1-q_3+1,q_1q_2-q_1+1)$

表 3: Gabrielov numbers for f

□

定義 4.3. 定理 4.2 における正の整数の組 $(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ を f の *Gabrielov* **数**といい Γ_f であらわす．

系 4.4. *$f(x,y,z)$ を可逆多項式，$\Gamma_f=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ をその Gabrielov 数とする．*

(i) *$\Delta(\Gamma_f)<0$ ならば，f の Milnor ファイバー $f(x,y,z)=1$ は $T_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$-型の多項式の Milnor ファイバーに変形できる．*

(ii) *$\Delta(\Gamma_f)>0$ ならば，特異点 $f(x,y,z)$ は $T_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$-型のカスプ特異点に変形できる．*

特異点 f が特異点 g に変形できるとき，g の Coxeter–Dynkin 図形に頂点と辺を付け加えて f の Coxeter–Dynkin 図形にできる．したがって次のことがわかる：

系 4.5. *$f(x,y,z)$ を可逆多項式，$\Gamma_f=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ をその Gabrielov 数とする．*

(i) *$\Delta(\Gamma_f)<0$ ならば，f の Coxeter–Dynkin 図形は $T(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ に含まれる．とくに，f の Coxeter–Dynkin 図形は ADE 型である．*

(ii) $\Delta(\Gamma_f)=0$ ならば，f の *Coxeter–Dynkin* 図形は $T(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ に一致する．

(iii) $\Delta(\Gamma_f)>0$ ならば，$T(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ は f の *Coxeter–Dynkin* 図形の一部である．

より強く, 系 4.4 は深谷圏 $D^b\mathrm{Fuk}^{\to}(f)$ および $D^b\mathrm{Fuk}^{\to}(T_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3})$ の間の半直交分解定理を与える．とくに，Orlov [O] によって証明された，特異点の圏に対する半直交分解定理のミラー対称性対応物である．

5 奇妙な双対性

これまでの準備により，主定理を述べることができる．とくに，Arnold の奇妙な双対性（strange duality）はもはや「奇妙」でなく，ミラー対称性として自然に理解されるものであることがわかる．

定理 5.1 ([ET])**.** $f(x,y,z)$ を可逆多項式とする．このとき

$$A_{G_f}=\Gamma_{f^t},\quad A_{G_{f^t}}=\Gamma_f \tag{5.1}$$

が成り立つ．つまり，組 (f,G_f) に対する *Dolgachev* 数 A_{G_f} は f の *Berglund–Hübsch* 転置 f^t の *Gabrielov* 数 Γ_{f^t} に一致し，組 (f^t,G_{f^t}) に対する *Dolgachev* 数 $A_{G_{f^t}}$ は f の *Gabrielov* 数 Γ_f に一致する． □

Type	$A_{G_f}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\Gamma_{f^t}$	$\Gamma_f=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=A_{G_{f^t}}$
I	(p_1,p_2,p_3)	(p_1,p_2,p_3)
II	$\left(p_1,\frac{p_3}{p_2},(p_2-1)p_1\right)$	$\left(p_1,p_2,(\frac{p_3}{p_2}-1)p_1\right)$
III	(p_1,p_1q_2,p_1q_3)	(p_1,p_1q_2,p_1q_3)
IV	$\left(\frac{p_3}{p_2},(p_1-1)\frac{p_3}{p_2},p_2-p_1+1\right)$	$\left(p_1,(\frac{p_3}{p_2}-1)p_1,\frac{p_3}{p_1}-\frac{p_3}{p_2}+1\right)$
V	$(q_2q_3-q_3+1,q_3q_1-q_1+1,q_1q_2-q_2+1)$	$(q_2q_3-q_2+1,q_3q_1-q_3+1,q_1q_2-q_1+1)$

表 4: 奇妙な双対性

参考文献

[AGV] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, and A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps*, Volume I, Birkhäuser, Boston Basel Berlin 1985.

[BH] P. Berglund and T. Hübsch, *A generalized construction of mirror manifolds*, Nuclear Physics B **393** (1993), 377–391.

[ET] W. Ebeling and A. Takahashi, *Strange duality of weighted homogeneous polynomials*, Composito Math, accepted.

[GL] W. Geigle and H. Lenzing, *A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite-dimensional algebras*, Singularities, representation of algebras, and vector bundles (Lambrecht, 1985), pp. 265–297, Lecture Notes in Math., **1273**, Springer, Berlin, 1987.

[K] M. Kreuzer, *The mirror map for invertible LG models*, Phys. Lett. B **328** (1994), no. 3-4, 312–318.

[O] D. Orlov, *Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singularities*, Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. II, pp. 503–531, Progr. Math., **270**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2009

[T1] A. Takahashi, *Weighted projective lines associated to regular systems of weights of dual type*, Adv. Stud. Pure Math. **59** (2010), 371–388.

[T2] A. Takahashi, *HMS for isolated hypersurface singularities*, talk at the "Workshop on Homological Mirror Symmetry and Related Topics" January 19-24, 2009, University of Miami, the PDF file available from http://www-math.mit.edu/~auroux/frg/miami09-notes/ .