

Tridiagonal pair と q -Onsager 代数

伊藤達郎

金沢大学 数物系

概要

代数的組合せ論の中心問題のひとつに P- and Q-polynomial association scheme の分類がある [1]. P- and Q-polynomial association scheme の局所構造を調べるための道具として導入されたのが Terwilliger 代数である [15], [16], [17]. Terwilliger 代数の既約表現の決定は tridiagonal pair の分類に帰着し [6], generic case における tridiagonal pair の分類が最近解決した [12]. その副産物として, Onsager 代数の q 類似というべきものが現れ, その有限次元既約表現が決定された. この q 類似物をわれわれは q -Onsager 代数と呼ぶことにする.

本稿は, Onsager 代数の話からはじめ, q -Onsager 代数が代数的組合せ論において現れる背景を説明し, 最後に q -Onsager 代数の有限次元既約表現の分類を論じる.

1 Onsager 代数

Onsager 代数 \mathcal{A} は, 基底 A_m, G_m ($m \in \mathbb{Z}$) と関係式 (Onsager relations)

$$\begin{aligned} [A_m, A_n] &= 4G_{m-n}, \\ [A_m, G_n] &= 2A_{m-n} - 2A_{m+n}, \\ [G_m, G_n] &= 0 \end{aligned}$$

で定義される \mathbb{C} 上の無限次元リー代数である. L. Onsager により 2 次元 Ising model の解を求めるために 1944 年に導入されたが [13], その後長いあいだ忘れられていたように見える. 数学的に新たな展開があったのは, 私が調べた限りでは 80 年代から 90 年代になってからである. Onsager 代数 \mathcal{A} は, 生成元 A_0, A_1 と関係式 (Dolan-Grady relations)

$$\begin{aligned} [A_1, [A_1, [A_1, A_0]]] &= 16[A_1, A_0], \\ [A_0, [A_0, [A_0, A_1]]] &= 16[A_0, A_1] \end{aligned}$$

で定義される \mathbb{C} 上のリー代数と同型になる [5], [4]. 実際

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{4}[A_1, A_0], \\ A_{m-1} - A_{m+1} &= \frac{1}{2}[A_m, G_1], \\ G_m &= \frac{1}{4}[A_m, A_0] \end{aligned}$$

により帰納的に A_m, G_m を定めれば同型対応が成り立つ.

また Onsager 代数 \mathcal{A} は, sl_2 -loop algebra $\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes sl_2$ に対応

$$\begin{aligned} A_m &= 2(t^m e + t^{-m} f), \\ G_m &= (t^m - t^{-m})h \end{aligned}$$

によって埋め込まれる. ここで e, f, h は sl_2 の標準的な基底である: $[e, f] = h, [h, e] = 2e, [h, f] = -2f$. さらに, θ を sl_2 -loop algebra の位数 2 の自己同型で e と f を取替え, h と $-h$ を取替え, $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ の元 $p(t)$ と $p(t^{-1})$ を取替えるものとする, θ により固定される sl_2 -loop algebra の元全体がなす部分リー代数は Onsager 代数 \mathcal{A} と同型になる [14].

Onsager 代数 \mathcal{A} の有限次元既約表現は B. Davies により分類されている [3]. この論文は数学者には読み難く, 多分そのためだろうと思われるが, S.S. Roan, 伊達による別証明がある [14], [2]. ここでは, Onsager 代数 \mathcal{A} の有限次元既約表現を説明するにあたり, のちに述べる q -Onsager 代数の有限次元既約表現と対比し易い形を選ぶことにする.

まず記号の説明を兼ねて, sl_2 -loop algebra $L(sl_2) = \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes sl_2$ の有限次元表現を準備する. V_d を $d+1$ 次元既約 sl_2 -加群とする. すなわち, sl_2 の標準的基底 e, f, h は V_d の標準的基底 v_i ($i = 0, 1, \dots, d$) に次のように作用する:

$$\begin{aligned} hv_i &= (d - 2i)v_i, \\ ev_i &= (d - i + 1)v_{i-1}, \\ fv_i &= (i + 1)v_{i+1}. \end{aligned}$$

次に, $a \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$ に対して, ev_a を $\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes sl_2$ から sl_2 への evaluation map とする. すなわち ev_a は $f(t) \otimes X$ を $f(a)X$ に対応させる準同型である ($f(t) \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, $X \in sl_2$). V_d は ev_a を通して $\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes sl_2$ -加群となる. この $\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes sl_2$ -加群を $V_d(a)$ で表し, evaluation module と呼ぶ. リー環 $L(sl_2) = \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes sl_2$ の包絡環を $U = U(L(sl_2))$ とすれば, ホップ代数 U の余積

$$\Delta : U \longrightarrow U \otimes U \quad (X \mapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X)$$

を通して, evaluation modules のテンソル積 $V_{d_1}(a_1) \otimes \cdots \otimes V_{d_n}(a_n)$ は $\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes sl_2$ -加群となる. Onsager 代数 \mathcal{A} は前述のように $\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes sl_2$ に埋め込まれているので, この埋め込みを通して $V_{d_1}(a_1) \otimes \cdots \otimes V_{d_n}(a_n)$ は \mathcal{A} -加群となる. このとき次が成り立つ.

- (i) $V_{d_1}(a_1) \otimes \cdots \otimes V_{d_n}(a_n)$ が既約な \mathcal{A} -加群となる必要十分条件は, $a_1, a_1^{-1}, \dots, a_n, a_n^{-1}$ が相異なることである. (特に既約な \mathcal{A} -加群となるためには $a_i \neq \pm 1$ が必要である.)
- (ii) $V = V_{d_1}(a_1) \otimes \cdots \otimes V_{d_n}(a_n)$ と $V' = V_{d'_1}(a'_1) \otimes \cdots \otimes V_{d'_m}(a'_m)$ を既約な \mathcal{A} -加群とする. V と V' が \mathcal{A} -加群として同型になる必要十分条件は, $m = n$ かつ $V_{d_1}(a_1), \dots, V_{d_n}(a_n)$ の並べ方をかえると $d'_i = d_i$, $a'_i = a_i$ or a_i^{-1} ($i = 1, \dots, n$) が成り立つことである.
- (iii) $(0, 0)$ 型の任意の既約な有限次元 \mathcal{A} -加群は, ある $V_{d_1}(a_1) \otimes \cdots \otimes V_{d_n}(a_n)$ に同型である.

ここで上記 (iii) の $(0, 0)$ 型の意味は以下のとおりである. 既約な \mathcal{A} -加群を V とすると, \mathcal{A} -加群の生成元 A_1, A_0 は V 上対角化可能であり, 固有値はそれぞれ $\{d - 2i + c_1 \mid i = 0, 1, \dots, d\}$, $\{d - 2i + c_0 \mid i = 0, 1, \dots, d\}$ と表わされる. (c_1, c_0) を \mathcal{A} -加群 V の型という. A_1, A_0 を $A_1 - c_1, A_1 - c_0$ で置き換えれば $(0, 0)$ 型となるので, 上記 (iii) の $(0, 0)$ 型という仮定は一般性を失うものではない.

2 Tridiagonal pair と q-Onsager 代数: 背景と定義

ランク 1 のコンパクト対称空間の離散的類似物として, P- and Q-polynomial association scheme というものがあり, その分類が代数的組合せ論の中心

問題のひとつとなっている [1]. このクラスの association scheme は Lie 型の有限群のある種の Gelfand pair や 有限概均質ベクトル空間などの豊富な実例を含み, それ自身興味ある研究対象であるが, 符号理論やデザイン理論を展開するための基礎空間としても重要である. P- and Q-polynomial association scheme の研究は, それに附随する Bose-Mesner 代数 (可換代数) を通して行われていたが, 90 年代に Terwilliger により subconstituent 代数 (通称 Terwilliger 代数, あるいは T-代数) が導入されてから [15], [16], [17], 研究の様相が一変した. Terwilliger 代数は Bose-Mesner 代数を含む (有限次元) 非可換代数であり, その表現を通して P- and Q-polynomial association scheme の局所構造を (少なくとも原理的には) 詳しく調べることが可能になると信じられており, それ故, Terwilliger 代数の既約表現の決定が当面の最重要研究課題となっている.

\mathcal{X} を P- and Q-polynomial association scheme, T をその Terwilliger 代数とすると, T は標準的生成元 A, A^* で生成される. V を既約な T -加群とすると, A, A^* は V 上 tridiagonal pair (TD-pair) をなす. そして, $A|_V, A^*|_V$ で生成される $\text{End}(V)$ の部分代数は大雑把な言い方をすれば, q-Onsager 代数の準同型像となる. TD-pair や q-Onsager 代数の定義は以下で行うが, 大事なことは, T は個々の P- and Q-polynomial association scheme \mathcal{X} に依存するが, その既約表現は q-Onsager 代数という普遍的な無限次元代数の有限次元既約表現から得られるという事実である.

定義 1 V を \mathbb{C} 上の有限次元ベクトル空間, A, A^* を対角化可能な V の線形変換とする. $\langle A, A^* \rangle$ を A, A^* によって生成される $\text{End}(V)$ の部分代数とし, V は $\langle A, A^* \rangle$ -加群として既約と仮定する. A の固有空間 $\{V_i\}_{i=0}^d$ と A^* の固有空間 $\{V_i^*\}_{i=0}^{d^*}$ に次の条件 (i), (ii) を満たすような順序が入るとき A, A^* を V 上の *tridiagonal pair* (TD-pair) という [6]:

- (i) $A^*V_i \subseteq V_{i-1} + V_i + V_{i+1}$ ($0 \leq i \leq d$), ここで $V_{-1} = 0, V_{d+1} = 0$.
- (ii) $AV_i^* \subseteq V_{i-1}^* + V_i^* + V_{i+1}^*$ ($0 \leq i \leq d^*$), ここで $V_{-1}^* = 0, V_{d^*+1}^* = 0$.

注意 1 TD-pair A, A^* について次のことが成り立つ [6].

- (1) $d = d^*$ である. すなわち A, A^* は同じ個数の固有値を持つ.
- (2) A の固有空間 $\{V_i\}_{i=0}^d$ の順序付けで定義の条件 (i) を満たすものは, $d \geq 1$ なら丁度 2 つあり, そのうちのひとつを V_0, V_1, \dots, V_d とす

ると, もうひとつはその逆順序 V_d, V_{d-1}, \dots, V_0 である. 同じことが, A^* の固有空間 $\{V_i^*\}_{i=0}^d$ の順序付けで定義の条件 (ii) を満たすものについても成立する. 以下特に断らない限り, A の固有空間と A^* の固有空間には定義の条件 (i), (ii) をみたく順序がそれぞれひとつ固定されているものとする.

- (3) A, A^* は tridiagonal relations (TD-relations) をみたく [18]:
ある $q \in \mathbb{C}^\times, \gamma, \gamma^*, \delta, \delta^* \in \mathbb{C}$ が存在して

$$\begin{aligned} [A, [A, [A, A^*]_q]_{q^{-1}}] &= \gamma[A, AA^* + A^*A] + \delta[A, A^*], \\ [A^*, [A^*, [A^*, A]_q]_{q^{-1}}] &= \gamma^*[A^*, A^*A + AA^*] + \delta^*[A^*, A]. \end{aligned}$$

ここで, $[X, Y] = XY - YX$, $[X, Y]_q = qXY - q^{-1}YX$ である.

定義 2 生成元 z, z^* と関係式 (tridiagonal relations, TD-relations)

$$\begin{aligned} [z, [z, [z, z^*]_q]_{q^{-1}}] &= \gamma[z, zz^* + z^*z] + \delta[z, z^*], \\ [z^*, [z^*, [z^*, z]_q]_{q^{-1}}] &= \gamma^*[z^*, z^*z + zz^*] + \delta^*[z^*, z] \end{aligned}$$

によって定義される \mathbb{C} 上の結合代数

$$\mathcal{A} = \langle z, z^* \mid \text{TD-relations} \rangle$$

を *tridiagonal* 代数 (TD-代数) という [6].

注意 2 q が 1 の冪根でないとは定する. すると次のような意味で TD-pair と TD-代数 \mathcal{A} の有限次元既約表現は同じものとみなせる.

- (1) A, A^* を V 上の TD-pair とすると TD-代数 \mathcal{A} の有限次元既約表現

$$\rho: \mathcal{A} \longrightarrow \text{End}(V) \quad (z, z^* \mapsto A, A^*)$$

が定まり, $A = \rho(z), A^* = \rho(z^*)$ はともに対角化可能である.

- (2) 逆に TD-代数 \mathcal{A} の有限次元既約表現 $\rho: \mathcal{A} \longrightarrow \text{End}(V)$ が与えられていて, $A = \rho(z), A^* = \rho(z^*)$ がともに対角化可能ならば, A, A^* は V 上の TD-pair である [18].

注意 3 z, z^* が TD-relations を満たすならば, $\lambda z + \mu, \lambda^* z^* + \mu^*$ も TD-relations を満たす ($\lambda, \lambda^* \in \mathbb{C}^\times, \mu, \mu^* \in \mathbb{C}$). 従って適当に $\lambda, \lambda^*, \mu, \mu^*$ を選ぶことにより, TD-relations に現れる常数 $\gamma, \gamma^*, \delta, \delta^*$ を標準化することが出来る. このとき $q^2 + q^{-2}$ は不変であることに注意する. $q^2 + q^{-2} \neq 2$ ならば以下のように標準化出来る: $\varepsilon, \varepsilon^* \in \{0, 1\}$ が存在して

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma^* = 0, \\ \delta &= -\varepsilon(q^2 - q^{-2})^2, \\ \delta^* &= -\varepsilon^*(q^2 - q^{-2})^2.\end{aligned}$$

ここで $\varepsilon, \varepsilon^*$ は標準化の仕方によらずに定まる.

$\varepsilon = \varepsilon^* = 0$ のときは, 標準化された TD-relations は q-Serre relations そのものであり, TD-代数 はアフィン量子群 $U_q(\widehat{sl_2})$ の positive part と同型である.

$\varepsilon = \varepsilon^* = 1$ のときは, 標準化された TD-relations は Dolan-Grady relations の q 類似というべきもので, TD-代数 は q-Onsager 代数 と呼ぶべきものである. このようにして q-Onsager 代数 の定義にたどりつく.

定義 3 生成元 z, z^* と関係式 (q-Dolan-Grady relations)

$$\begin{aligned}[z, [z, [z, z^*]_q]_{q^{-1}}] &= -(q^2 - q^{-2})^2 [z, z^*], \\ [z^*, [z^*, [z^*, z]_q]_{q^{-1}}] &= -(q^2 - q^{-2})^2 [z^*, z]\end{aligned}$$

によって定義される \mathbb{C} 上の結合代数

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_q = \langle z, z^* \mid \text{q-Dolan-Grady relations} \rangle$$

を *q-Onsager 代数* という [12].

3 q-Onsager 代数の有限次元既約表現

以下パラメータ $q \in \mathbb{C}^\times$ は 1 の冪根でないと仮定する. 一連の結果 [6], [7], [8], [9], [10], [11] の上に立って, TD-代数 の有限次元既約表現が最近決定された [12]. ここでは, q-Onsager 代数 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_q$ の場合に話を限って, 有限次元既約表現の概略を述べる.

3.1 augmented TD-代数

q -Onsager 代数 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_q$ よりやや大きな代数 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_q$ を考える. \mathcal{T} のほうが \mathcal{A} よりも扱い易い.

定義 4 生成元 x, y, k, k^{-1} と以下の関係式で定義される \mathbb{C} 上の結合代数

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_q = \langle x, y, k, k^{-1} \rangle$$

を *augmented* TD-代数という:

$$\begin{aligned} kk^{-1} &= k^{-1}k = 1, \\ kxk^{-1} &= q^2x, \\ kyk^{-1} &= q^{-2}y \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned} [x, [x, [x, y]_q]_{q^{-1}}] &= c(x^2k^2 - k^{-2}x^2), \\ [y, [y, [y, x]_q]_{q^{-1}}] &= c(-k^2y^2 + y^2k^{-2}). \end{aligned}$$

ここで $c = -(q - q^{-1})(q^2 - q^{-2})(q^3 - q^{-3})q^4$.

augmented TD-代数 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_q$ は, 別の presentation を持つ. $t \in \mathbb{C}^\times$ を任意に選び固定し,

$$\begin{aligned} z_t &= x + tk + t^{-1}k^{-1}, \\ z_t^* &= y + t^{-1}k + tk^{-1} \end{aligned}$$

とおく. 生成元 z_t, z_t^*, k, k^{-1} と以下の関係式で定義される \mathbb{C} 上の結合代数は \mathcal{T} と同型である:

$$\begin{aligned} kk^{-1} &= k^{-1}k = 1, \\ [z_t, k]_q &= (q - q^{-1})(tk^2 + t^{-1}), \\ [k, z_t^*]_q &= (q - q^{-1})(t^{-1}k^2 + t) \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned} [z_t, [z_t, [z_t, z_t^*]_q]_{q^{-1}}] &= -(q^2 - q^{-2})^2 [z_t, z_t^*], \\ [z_t^*, [z_t^*, [z_t^*, z_t]_q]_{q^{-1}}] &= -(q^2 - q^{-2})^2 [z_t^*, z_t]. \end{aligned}$$

命題 1 $t \in \mathbb{C}^\times$ を固定すると, 代数としての準同型

$$\iota_t : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{T} \quad (z, z^* \mapsto z_t, z_t^*)$$

が定まるが, ι_t は単射である. この意味で \mathcal{A} は \mathcal{T} に埋め込まれる.

命題 2 \mathcal{A} の有限次元既約表現

$$\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \text{End}(V)$$

について以下のことが成り立つ.

- (i) $\rho(z), \rho(z^*)$ は対角化可能である.
- (ii) 埋め込み $\iota_t : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{T} \quad (z, z^* \mapsto z_t, z_t^*)$ を通して $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \text{End}(V)$ は \mathcal{T} に一意的に拡張できる. すなわち \mathcal{T} の有限次元既約表現

$$\tilde{\rho} : \mathcal{T} \longrightarrow \text{End}(V)$$

が一意的に存在して $\rho = \tilde{\rho} \circ \iota_t$ が成り立つ.

従って \mathcal{A} の有限次元既約表現の決定は, 次の3つの問題に帰着する:

- (1) \mathcal{T} の有限次元既約表現を決定すること.
- (2) \mathcal{T} の有限次元既約表現を埋め込み ι_t を通して \mathcal{A} に制限したとき, いつ既約性が保たれるかを判定すること.
- (3) 以上のようにして埋め込み ι_t を通して得られた \mathcal{A} の有限次元既約表現の同型類を t を動かして決定すること.

3.2 \mathcal{T} の有限次元既約表現と Drinfel'd 多項式

まず \mathcal{T} の有限次元既約表現を決定する.

補題 1 \mathcal{T} の有限次元既約表現 $\rho : \mathcal{T} \longrightarrow \text{End}(V)$ について以下のことが成り立つ.

- (i) $\rho(k)$ は対角化可能であり, $\rho(k)$ の固有値は $\{sq^{2i-d} \mid 0 \leq i \leq d\}$ と表わされる. この $s \in \mathbb{C}^\times$, $d \in \mathbb{N}$ をそれぞれ \mathcal{T} -加群 V の型, 直径とよぶ (あるいは, 表現 ρ の型, 直径とよぶ). 固有値 sq^{2i-d} に属する $\rho(k)$ の固有空間を U_i とする. U_i をウェイト空間, 固有空間分解 $V = \bigoplus_{i=0}^d U_i$ をウェイト空間分解とよぶ.
- (ii) \mathcal{T} の生成元 x, y は, ウェイト空間 U_i ($0 \leq i \leq d$) に次のように作用する (ただし $U_{-1} = U_{d+1} = 0$):

$$xU_i \subseteq U_{i+1}, \quad yU_i \subseteq U_{i-1}.$$

特に x, y は V に冪零に作用する.

定理 1 \mathcal{T} の直径 d の有限次元既約表現 $\rho: \mathcal{T} \rightarrow \text{End}(V)$ のウェイト空間分解を $V = \bigoplus_{i=0}^d U_i$ とすると

$$\dim U_i \leq \binom{d}{i}.$$

特に $\dim U_0 = 1$ である.

定義 5 V を直径 d の有限次元既約 \mathcal{T} -加群, $V = \bigoplus_{i=0}^d U_i$ をそのウェイト空間分解とする. 補題 1 と定理 1 により, $y^i x^i$ は U_0 上にスカラーとして作用する. このスカラーを $\sigma_i = \sigma_i(V)$ とおく:

$$y^i x^i|_{U_0} = \sigma_i(V) \in \mathbb{C}.$$

注意 4 上で定義した数列 $\{\sigma_i(V)\}_{i=0}^\infty$ は, 作り方から

$$\begin{aligned} \sigma_0(V) &= 1, \\ \sigma_i(V) &= 0 \quad (d+1 \leq i) \end{aligned}$$

であるが, さらに

$$\sigma_d(V) \neq 0$$

が成り立っている.

定義 6 直径 d の有限次元既約 T -加群 V に対して, 次数 d のモニック多項式

$$P_V(\lambda) = Q^{-1} \sum_{i=0}^d \sigma_i(V) \prod_{j=i+1}^d (q^j - q^{-j})^2 (s^{-2}q^{2(d-j)} + s^2q^{-2(d-j)} - \lambda)$$

を対応させる. ここで $\sigma_i(V)$ は $y^i x^i$ の U_0 上の固有値 (定義 5) であり,

$$Q = Q_d = (-1)^d (q - q^{-1})^2 (q^2 - q^{-2})^2 \cdots (q^d - q^{-d})^2$$

である. $P_V(\lambda)$ を T -加群 V の *Drinfel'd* 多項式とよぶ.

記号 $\mathcal{M}_d^s(T)$ により, 直径 d , 型 s の有限次元既約 T -加群 V の同型類の全体がなす集合を表わす (補題 1 参照). 記号 \mathcal{P}_d^s により, 次数 d のモニック多項式 $P(\lambda)$ で

$$P(\lambda) \neq 0 \text{ for } \lambda = s^{-2} + s^2$$

を満たすものの全体がなす集合を表わす.

定理 2 対応 $V \mapsto P_V(\lambda)$ は $\mathcal{M}_d^s(T)$ から \mathcal{P}_d^s への全単射を与える.

この定理により, 有限次元既約 T -加群 V の同型類のパラメトリゼーションが出来たことになる. 具体的な T -加群 V の構成は 3.4 節で行う.

3.3 \mathcal{A} -加群の既約性

$\mathcal{M}_d^s(T)$ に属する有限次元既約 T -加群を V とし, V によって定まる T の表現を $\rho: T \rightarrow \text{End}(V)$ とする. 命題 1 の埋め込み

$$\iota_t: \mathcal{A} \longrightarrow T \quad (z, z^* \mapsto z_t, z_t^*)$$

を通して \mathcal{A} の表現 $\rho \circ \iota_t$ が得られる. ここでは, いつ $\rho \circ \iota_t$ が既約になるかを問題にする.

$\rho \circ \iota_t$ が既約になるためには, $\rho(z_t), \rho(z_t^*)$ が対角化可能であることが必要である (命題 2).

命題 3 $\rho(z_t), \rho(z_t^*)$ が対角化可能であるための必要十分条件は

$$\pm st, \pm st^{-1} \notin \{q^{-d+1}, q^{-d+2}, \dots, q^{d-1}\}$$

である .

定理 3 \mathcal{T} の有限次元既約表現 $\rho: \mathcal{T} \rightarrow \text{End}(V)$ が直径 d , 型 s を持ち, $\rho(z_t), \rho(z_t^*)$ が対角化可能であるという条件を満たしているとする . このとき, 埋め込み ι_t を通して得られる \mathcal{A} の表現

$$\rho \circ \iota_t: \mathcal{A} \rightarrow \text{End}(V)$$

が既約になるための必要十分条件は

$$P(\lambda) \neq 0 \text{ for } \lambda = t^{-2} + t^2$$

である .

3.4 有限次元既約表現の構成: 主定理

augmented TD-代数 \mathcal{T} を $U_q(sl_2)$ -loop 代数に埋め込み, この埋め込みを用いて \mathcal{T} の有限次元既約表現を具体的に構成する . まず $U_q(sl_2)$ -loop 代数 $U_q(L(sl_2))$ の Chevalley basis による記述を与える . $U_q(L(sl_2))$ は生成元 $e_i^+, e_i^-, k_i, k_i^{-1}$ ($i = 0, 1$) と関係式

$$\begin{aligned} k_0 k_1 &= k_1 k_0 = 1, \\ k_i k_i^{-1} &= k_i^{-1} k_i = 1, \\ k_i e_i^\pm k_i^{-1} &= q^{\pm 2} e_i^\pm, \\ k_i e_j^\pm k_i^{-1} &= q^{\mp 2} e_j^\pm \quad (i \neq j), \\ [e_i^+, e_i^-] &= \frac{k_i - k_i^{-1}}{q - q^{-1}}, \\ [e_i^+, e_j^-] &= 0 \quad (i \neq j), \\ [e_i^\pm, (e_i^\pm)^2 e_j^\pm - (q^2 + q^{-2}) e_i^\pm e_j^\pm e_i^\pm + e_j^\pm (e_i^\pm)^2] &= 0 \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

によって定義される \mathbb{C} 上の結合代数である . $s \in \mathbb{C}^\times$ に対して, $U_q(L(sl_2))$ の元 $x(s), y(s), k(s)$ を

$$\begin{aligned} x(s) &= \alpha(se_0^+ + s^{-1}e_1^-k_1), \quad \alpha = -q^{-1}(q - q^{-1})^2, \\ y(s) &= se_0^-k_0 + s^{-1}e_1^+, \\ k(s) &= sk_0. \end{aligned}$$

により定める .

命題 4 任意の $s \in \mathbb{C}^\times$ に対して, 代数としての準同型

$$\varphi_s : \mathcal{T} \longrightarrow U_q(L(sl_2)) \quad (x, y, k \mapsto x(s), y(s), k(s))$$

が存在する (存在すれば一意なことは明らか). さらに φ_s は単射である. この意味で \mathcal{T} は $U_q(L(sl_2))$ に埋め込まれる.

V を有限次元既約 $U_q(L(sl_2))$ -加群とすると, 埋め込み φ_s を通して V は \mathcal{T} -加群となる. V がいつ既約 \mathcal{T} -加群となるか, またそのとき Drinfel'd 多項式 $P_V(\lambda)$ はどうなるかを問題にする.

まず記号の説明を兼ねて, $U_q(sl_2)$ -loop algebra $U_q(L(sl_2))$ の有限次元表現を準備する. $a \in \mathbb{C}^\times, \ell \in \mathbb{Z} (\ell > 0)$ に対し, \mathbb{C} 上の $\ell+1$ 次元ベクトル空間 $V(\ell, a)$ でその標準的基底 v_0, v_1, \dots, v_ℓ に $U_q(L(sl_2))$ の Chevalley basis $e_i^+, e_i^-, k_i, k_i^{-1} (i = 0, 1)$ が次のように作用するものがある:

$$\begin{aligned} k_0 v_i &= q^{2i-\ell} v_i, \\ k_1 v_i &= q^{\ell-2i} v_i, \\ e_0^+ v_i &= a q [i+1] v_{i+1}, \\ e_0^- v_i &= a^{-1} q^{-1} [\ell-i+1] v_{i-1}, \\ e_1^+ v_i &= [\ell-i+1] v_{i-1}, \\ e_1^- v_i &= [i+1] v_{i+1}. \end{aligned}$$

ただし $v_{-1} = v_{\ell+1} = 0, [j] = [j]_q = (q^j - q^{-j})/(q - q^{-1})$ である. $V(\ell, a)$ を *evaluation module* とよぶ. $V(\ell, a)$ は既約な $U_q(L(sl_2))$ -加群である. $U_q(L(sl_2))$ はホップ代数の構造をもち, その余積

$$\begin{aligned} \Delta(k_i^{\pm 1}) &= k_i^{\pm 1} \otimes k_i^{\pm 1}, \\ \Delta(e_i^+) &= k_i \otimes e_i^+ + e_i^+ \otimes 1, \\ \Delta(e_i^- k_i) &= k_i \otimes e_i^- k_i + e_i^- k_i \otimes 1 \end{aligned}$$

を通して, evaluation modules のテンソル積 $V(\ell_1, a_1) \otimes \dots \otimes V(\ell_n, a_n)$ は $U_q(L(sl_2))$ -加群となる. augmented TD-代数 \mathcal{T} は φ_s によって $U_q(L(sl_2))$ に埋め込まれているので, この埋め込みを通してテンソル積

$$V(\ell_1, a_1) \otimes \dots \otimes V(\ell_n, a_n)$$

は \mathcal{T} -加群となる.

定義 7 evaluation module $V(\ell, a)$ に対してスカラー $aq^{-\ell+1}$, $aq^{-\ell+3}$, \dots , $aq^{\ell-1}$ からなる集合 $S(\ell, a)$ を対応させる:

$$S(\ell, a) = \{aq^{2i-\ell+1} \mid 0 \leq i \leq \ell - 1\}.$$

$S(\ell, a)$ を q -string とよぶ.

ふたつの q -string $S(\ell, a)$, $S(\ell', a')$ が一般の位置にあるとは,

- (i) $S(\ell, a) \cup S(\ell', a')$ is not a q -string,
- or
- (ii) $S(\ell, a) \subseteq S(\ell', a')$ or $S(\ell, a) \supseteq S(\ell', a')$

が成り立つときをいう. q -string からなる multi-set $\{S(\ell_i, a_i)\}_{i=1}^n$ が一般の位置にあるとは, 任意の $S(\ell_i, a_i)$, $S(\ell_j, a_j)$ ($i \neq j$) が一般の位置にあるときをいう.

q -string からなるふたつの multi-set を $\{S(\ell_i, a_i)\}_{i=1}^n$, $\{S(\ell'_i, a'_i)\}_{i=1}^{n'}$ とする. このふたつの multi-set が同値とは, $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ ($1 \leq i \leq n$) が存在して $\{S(\ell_i, a_i^{\varepsilon_i})\}_{i=1}^n$ と $\{S(\ell'_i, a'_i)\}_{i=1}^{n'}$ が multi-set として一致するときをいう. すなわち, $n = n'$ かつ $S(\ell'_i, a'_i)$ 達を適当に並べかえると $\ell_i = \ell'_i$, $a_i^{\varepsilon_i} = a'_i$ ($1 \leq i \leq n$) が成り立つときをいう.

ふたつの q -string $S(\ell, a)$, $S(\ell', a')$ が強く一般の位置にあるとは, 任意の $\varepsilon, \varepsilon' \in \{1, -1\}$ に対して $S(\ell, a^\varepsilon)$, $S(\ell', a'^{\varepsilon'})$ が一般の位置にあるときをいう. q -string からなる multi-set $\{S(\ell_i, a_i)\}_{i=1}^n$ が強く一般の位置にあるとは, 任意の $S(\ell_i, a_i)$, $S(\ell_j, a_j)$ ($i \neq j$) が強く一般の位置にあるときをいう. すなわち, $\{S(\ell_i, a_i)\}_{i=1}^n$ に同値な任意の multi-set が一般の位置にあるときをいう.

以上の準備のもとで, augmented TD-代数 \mathcal{T} と q -Onsager 代数 \mathcal{A} の有限次元既約表現に関するわれわれの主定理を述べる. 以下

$$\begin{aligned} V &= V(\ell_1, a_1) \otimes \cdots \otimes V(\ell_n, a_n) \\ V' &= V(\ell'_1, a'_1) \otimes \cdots \otimes V(\ell'_{n'}, a'_{n'}) \end{aligned}$$

とおき, V, V' を evaluation module のテンソル積として $U_q(L(sl_2))$ -加群とみなす.

まず比較の意味で, $U_q(sl_2)$ -loop algebra $U_q(L(sl_2))$ の有限次元既約表現のよく知られた分類を記述する.

- (i) V が $U_q(L(sl_2))$ -加群として既約になる必要十分条件は, 対応する q-string の multi-set $\{S(\ell_i, a_i)\}_{i=1}^n$ が一般の位置にあることである .
- (ii) V と V' がともに $U_q(L(sl_2))$ -加群として既約と仮定する . V と V' が $U_q(L(sl_2))$ -加群として同型になる必要十分条件は, 対応する q-string の multi-set $\{S(\ell_i, a_i)\}_{i=1}^n$ と $\{S(\ell'_i, a'_i)\}_{i=1}^{n'}$ が一致することである .
- (iii) (1, 1) 型の任意の有限次元既約 $U_q(L(sl_2))$ -加群は, ある evaluation module のテンソル積 $V = V(\ell_1, a_1) \otimes \cdots \otimes V(\ell_n, a_n)$ に同型となる .

上の (iii) における (1, 1) 型の説明は省略するが, 一般性を失う仮定ではない .

定理 4 有限次元既約 \mathcal{T} -加群は以下の (i), (ii), (iii) により決定される .

- (i) V を埋め込み φ_s を通して \mathcal{T} -加群とみなす . このとき \mathcal{T} -加群 V が既約となる必要十分条件は, $-s^2 \notin S(\ell_i, a_i) \cup S(\ell_i, a_i^{-1})$ ($1 \leq i \leq n$) かつ対応する q-string の multi-set $\{S(\ell_i, a_i)\}_{i=1}^n$ が強く一般の位置にあることである . この場合 \mathcal{T} -加群 V は型 s , 直径 $d = \ell_1 + \cdots + \ell_n$ を持つ . さらに, Drinfel'd polynomial $P_V(\lambda)$ は

$$P_V(\lambda) = \prod_{i=1}^n P_{V(\ell_i, a_i)}(\lambda),$$

$$P_{V(\ell_i, a_i)}(\lambda) = \prod_{c \in S(\ell_i, a_i)} (\lambda + c + c^{-1})$$

なる積公式を満たす .

- (ii) V, V' を埋め込み φ_s を通して \mathcal{T} -加群とみなす . V と V' がともに \mathcal{T} -加群として既約と仮定する . このとき V と V' が \mathcal{T} -加群として同型となる必要十分条件は, 対応する q-string の multi-set $\{S(\ell_i, a_i)\}_{i=1}^n$ と $\{S(\ell'_i, a'_i)\}_{i=1}^{n'}$ が同値になることである .
- (iii) 型 s , 直径 d を持つ任意の有限次元既約 \mathcal{T} -加群は, 埋め込み φ_s を通してある evaluation module のテンソル積 $V = V(\ell_1, a_1) \otimes \cdots \otimes V(\ell_n, a_n)$ に同型となる .

以下 $U_q(L(sl_2))$ -加群 $V = V(\ell_1, a_1) \otimes \cdots \otimes V(\ell_n, a_n)$ を埋め込み

$$\varphi_s \circ \iota_t : \mathcal{A} \longrightarrow U_q(L(sl_2))$$

を通して \mathcal{A} -加群とみなす .

定理 5 有限次元既約 \mathcal{A} -加群は以下の (i), (ii), (iii) により決定される .

(i) V を埋め込み $\varphi_s \circ \iota_t$ を通して \mathcal{A} -加群とみなす . このとき \mathcal{A} -加群 V が既約となるための必要十分条件は, 次の (1), (2), (3) である:

(1) 対応する q -string の multi-set $\{S(\ell_i, a_i)\}_{i=1}^n$ が強く一般の位置にある .

(2) $-s^2, -t^2 \notin S(\ell_i, a_i) \cup S(\ell_i, a_i^{-1}) \quad (1 \leq i \leq n)$.

(3) $\pm st, \pm st^{-1} \notin \{q^{-d+1}, q^{-d+2}, \dots, q^{d-1}\}, \quad d = \ell_1 + \cdots + \ell_n$.

(ii) $V = V(\ell_1, a_1) \otimes \cdots \otimes V(\ell_n, a_n)$ を埋め込み $\varphi_s \circ \iota_t$ 通して \mathcal{A} -加群とみなし, $V' = V(\ell'_1, a'_1) \otimes \cdots \otimes V(\ell'_{n'}, a'_{n'})$ を埋め込み $\varphi_{s'} \circ \iota_{t'}$ 通して \mathcal{A} -加群とみなす . V と V' がともに \mathcal{A} -加群として既約と仮定する . このとき V と V' が \mathcal{A} -加群として同型となる必要十分条件は, 対応する q -string の multi-set $\{S(\ell_i, a_i)\}_{i=1}^n$ と $\{S(\ell'_i, a'_i)\}_{i=1}^{n'}$ が同値でありかつ

$$(s', t') \in \{\pm(s, t), \pm(t^{-1}, s^{-1}), \pm(t, s), \pm(s^{-1}, t^{-1})\}$$

が成り立つことである .

(iii) 任意の有限次元既約 \mathcal{A} -加群は, ある埋め込み $\varphi_s \circ \iota_t$ を通してある evaluation module のテンソル積 $V = V(\ell_1, a_1) \otimes \cdots \otimes V(\ell_n, a_n)$ に同型となる .

参考文献

- [1] E. Bannai and T. Ito. Algebraic Combinatorics I: Association Schemes. Benjamin/Cummings, Menlo Park, California, 1984.
- [2] E. Date and S.S. Roan. The structure of quotients of the Onsager algebra by closed ideals. J. Phys. A **33**, 3275-3296, 2000.
- [3] B. Davies. Onsager's algebra and superintegrability. J. Phys. A **23**, 2245-2261, 1990.
- [4] B. Davies. Onsager's algebra and the Dolan-Grady condition in the non-self-dual case. J. Math. Phys. **32**, 2945-2950, 1991.
- [5] L. Dolan and M. J. Grady. Coserved charges from self-duality. Phys. Rev. D(3) **25**, 1587-1604, 1982.
- [6] T.Ito, K.Tanabe and P.Terwilliger. Some algebra related to P- and Q-polynomial association schemes. Codes and Association Schemes (Piscataway, NJ, 1999). DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science **56**, 167-192, 2001.
- [7] T. Ito and P. Terwilliger. The shape of a tridiagonal pair. J. Pure Appl. Algebra **188**, 145-160, 2004.
- [8] T. Ito and P. Terwilliger. Tridiagonal pairs and the quantum affine algebra $U_q(\widehat{sl}_2)$. Ramanujan J. **13**, 39-62, 2007.
- [9] T. Ito and P. Terwilliger. Two non-nilpotent linear transformations that satisfy the cubic q -Serre relations. J. Algebra Appl. **6**, 477-503, 2007.
- [10] T. Ito and P. Terwilliger. The q -tetrahedron algebra and its finite-dimensional irreducible modules. Comm. Algebra **35**, 3415-3439, 2007.
- [11] T. Ito and P. Terwilliger. The Drinfel'd polynomial of a tridiagonal pair. J. Combin. Inform. System Sci. **34**, 255-292, 2009.
- [12] T. Ito and P. Terwilliger. The augmented tridiagonal algebra. Kyushu J. Math. **64**, 81-144, 2010.

- [13] L. Onsager. Crystal statistics I. A two-dimensional model with an order-disorder transition. *Phys. Rev. (2)* **65**, 117-149, 1944.
- [14] S.S. Roan. Onsager's algebra, loop algebra and chiral Potts model. MPI 91-70, Max-Plank-Institut fur Mathematik, Bonn, 1991.
- [15] P. Terwilliger. The subconstituent algebra of an association schemes I. *J. Alg. Combin.* **1**, 363-388, 1992.
- [16] P. Terwilliger. The subconstituent algebra of an association schemes II. *J. Alg. Combin.* **2**, 73-103, 1993.
- [17] P. Terwilliger. The subconstituent algebra of an association schemes III. *J. Alg. Combin.* **2**, 177-210, 1993.
- [18] P. Terwilliger. Two relations that generalize the q-Serre relations and the Dolan-Grady relations. *Physics and Combinatorics 1999 (Nagoya)*. World Scientific, River Edge, NJ, 377-398, 2001.