フェルマー曲線と一般超幾何関数

大坪 紀之

要旨

フェルマー多様体の L 関数はヤコビ和のヘッケ L 関数だが, その整数点での振る舞いを記述すると予想されているレギュレーター写像やアーベル-ヤコビ写像に, 一般超幾何関数の特殊値が現れる. 代数多様体の L 関数に関するいくつかの重要な予想を紹介し, フェルマー曲線とそのヤコビ多様体に関する結果について述べる.

1　L 関数

1.1　デデキンド・ゼータ関数

k を代数体, $\mathcal{O}_k$ をその整数環とする. イデアル $\mathbf{n}$ に対してノルムは $N(\mathbf{n}) := |\mathcal{O}/\mathbf{n}|$ で定義される. Riemann ゼータ関数 ($k=\mathbb{Q}$ の場合) の一般化である Dedekind ゼータ関数は

$$\zeta_k(s) = \sum_{\mathbf{n}\neq 0:\text{イデアル}} \frac{1}{N(\mathbf{n})^s} = \prod_{\mathbf{p}\neq 0:\text{素イデアル}} \frac{1}{1-N(\mathbf{p})^{-s}} \quad (s\in\mathbb{C})$$

で定義される. 次の性質はよく知られている.

(i) $\zeta_k(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>1$ で絶対収束し, ここには零点も極も持たない.

(ii) $\zeta_k(s)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続され, $s=1$ に 1 位の極をもつほかは正則である.

(iii) 関数等式 $s\leftrightarrow 1-s$ をみたす. つまり, $\Gamma(s)$ をガンマ関数,

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s)=(2\pi)^{-s/2}\Gamma(s/2),\quad \Gamma_{\mathbb{C}}(s)=\Gamma_{\mathbb{R}}(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)=2(2\pi)^{-s}\Gamma(s),$$

r_1, r_2 をそれぞれ, k の実素点, 複素素点の数として,

$$\Lambda_k(s) := \Gamma_{\mathbb{R}}(s)^{r_1}\Gamma_{\mathbb{C}}(s)^{r_2}\zeta_k(s)$$

とおくと,

$$\Lambda_k(1-s)=\varepsilon(s)\Lambda_k(s)$$

が成り立つ. ただし, ε-因子 $\varepsilon(s)$ は ab^s の形の関数である.

1.2 代数多様体の L 関数

X を $\mathbb{Q}$ 上の射影的で滑らかな代数多様体とする．素数 ℓ に対して, ℓ 進エタール・コホモロジー群

$$H^i(X) := H^i_{\text{ét}}(X \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)$$

が定義される (Grothendieck) が, これには絶対ガロワ群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ が作用する．特に, p を良い素数, つまり X が良い還元 $X_{\mathbb{F}_p}$ を持つ素数とすると,

$$H^i(X) \simeq H^i_{\text{ét}}(X_{\mathbb{F}_p} \times \overline{\mathbb{F}_p}, \mathbb{Q}_\ell) \quad (\ell \neq p)$$

であり, これにはフロベニウス $\mathrm{Fr}_p \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$ が作用する．その固有多項式を

$$P_p(H^i(X), T) := \det(1 - \mathrm{Fr}_p T; H^i(X))$$

とする．このとき, 次が知られている．

(i) $P_p(H^i(X), T) \in \mathbb{Z}[T]$ であり, $\ell \neq p$ によらない．
(ii) $\deg P_p(H^i(X), T) = b_i := X(\mathbb{C})$ のベッチ数．
(iii) $P_p(H^i(X), T) = \prod_{j=1}^{b_i}(1 - \alpha_{p,j}T)$ と分解すると, $|\alpha_{p,j}| = p^{i/2}$ である．これは Riemann 予想の類似であり, Deligne によって証明された (1974)．

$H^i(X)$ の L 関数は次のオイラー積で定義される:

$$L(H^i(X), s) = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{P_p(H^i(X), p^{-s})}.$$

ただし, 悪い素数に対する P_p は, $H^i(X)$ の惰性群で固定される部分の固有多項式である．このとき, Deligne の定理より,

(iv) $L(H^i(X), s)$ は $\mathrm{Re}(s) > i/2 + 1$ で絶対収束し, ここには零点も極もない．

さらに, 以下の性質が予想されている．

(v) Hasse-Weil 予想 ([15] 参照): $L(H^i(X), s)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続され, 関数等式 $s \leftrightarrow i + 1 - s$ をみたす．つまり,

$$\Lambda(H^i(X), s) = \prod_{p+q=i, p<q} \Gamma_{\mathbb{C}}(s-p)^{h^{p,q}} \prod_{2p=i} \left(\Gamma_{\mathbb{R}}(s-p)^{h_+^{p,p}} \Gamma_{\mathbb{R}}(s+1-p)^{h_-^{p,p}}\right) L(H^i(X), s)$$

(ただし, $h^{p,q}$, $h_\pm^{p,p}$ は $X(\mathbb{C})$ の Hodge 数) とおくと,

$$\Lambda(H^i(X), i+1-s) = \varepsilon(s)\Lambda(H^i(X), s)$$

が成り立つ．

(vi) Tate 予想 (1965, [20]): $L(H^i(X), s)$ は $s = i/2 + 1$ (i は偶数) にのみ極をもち, その位数は $\operatorname{rank} \mathrm{CH}^{\frac{i}{2}}(X)/\mathrm{hom}$ に等しい. ここで Chow 群 $\mathrm{CH}^n(X)$ は, X 上の余次元 n の代数的サイクル (既約な閉部分多様体の形式和) 全体を有理同値で割った群であり, 有限生成アーベル群だと予想されている. また hom はホモロジー的同値であり, $\mathrm{CH}^n(X)/\mathrm{hom}$ はサイクル写像 $\mathrm{CH}^n(X) \to H^{2n}(X)$ の像に等しい.

1.3 整数点での振る舞い

我々が興味あるのは, 解析接続された L 関数の整数点での振る舞いであり, その背後にある代数的な構造である. 関数等式より, $L(H^i(X), s)$ の $s = n \in \mathbb{Z}$ での振る舞いを知ることは, $s = i + 1 - n$ での振る舞いを知ることと, ε-因子を除いて同値である. 従って, $n \leq (i+1)/2$ の場合を考える. これは, Riemann ゼータ関数の負の整数点での値が Bernoulli 数で書けるように, 「負」の整数点の方が数論的な現象を表していることが多いからである.

まず, $L(H^i(X), s)$ は $\mathrm{Re}(s) > i/2 + 1$ で零点も極も持たず, $\Gamma(s)$ は各非正整数で 1 位の極をもつので, 零点の位数 $\mathrm{ord}_{s=n} L(H^i(X), s)$ は関数等式より

(i) $n < i/2$ のときはホッヂ数で書け,

(ii) $n = i/2$ のときはホッヂ数と (Tate 予想を認めると) $\operatorname{rank} \mathrm{CH}^n(X)/\mathrm{hom}$ で書ける.

残された $n = (i+1)/2$ の場合, つまり関数等式の中心での零点の位数は, 関数等式からは分からない. それを記述するのが, あとで紹介する BSD 予想である.

次に, $s = n$ における特殊値とは,

$$L^*(H^i(X), n) := \lim_{s \to n} \frac{L(H^i(X), s)}{(s-n)^{\mathrm{ord}_{s=n} L(H^i(X), s)}},$$

つまり, $s = n$ における Taylor 展開の最初の消えない係数である.

この零点と特殊値に関する古典的な結果は, Dedekind ゼータ関数に対する Dirichlet の単数定理と, 類数公式である. $\zeta_k(s)$ は「1 点」$X = \operatorname{Spec} k$, $i = 0$ の場合の L 関数であることに注意する. この場合, $n \leq 0$ に対して,

$$\mathrm{ord}_{s=n} \zeta_k(s) = \begin{cases} r_1 + r_2 - 1 & (n = 0) \\ r_1 + r_2 & (n < 0,\ \text{偶数}) \\ r_2 & (n < 0,\ \text{奇数}) \end{cases}$$

である.

定理 1.1 (Dirichlet の定理). $\operatorname{rank}(\mathcal{O}_k^*) = r_1 + r_2 - 1 = \mathrm{ord}_{s=0} \zeta_k(s)$.

古典的なレギュレーター写像

$$r \colon \mathcal{O}_k^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \to \prod_{v | \infty} \mathbb{R} = \mathbb{R}^{r_1 + r_2}, \quad u \in \mathcal{O}_k^* \mapsto (\log |u|_v)_v$$

を考える. ただし, v は k の無限素点全体にわたり, $|\ |_v$ は v における正規化された絶対値である. また, 第 2 成分 $\mathbb{Q}$ は対角的に写像する.

定理 1.2 (類数公式)**.** (i) $r \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ は同形.

(ii) $R := |\det(r)| \in \mathbb{R}^*$ とおくと

$$\zeta_k^*(0) = -\frac{hR}{w}.$$

ただし, h は k の類数, w は k に含まれる 1 のべき根の数である.

ここで, $\det(r)$ とは, $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ の自然な $\mathbb{Q}$ 格子の基底で r の像を表したときの行列式のことである. (ii) より特に,

$$\zeta_k^*(0) \equiv R \pmod{\mathbb{Q}^*}$$

である. 標語的に言うと, k に付随する群 $\mathcal{O}_k^*$ とレギュレーター写像が, $\zeta_k(s)$ の $s=0$ での振る舞いを知っているのである.

2 予想

2.1 Borel の定理

それでは, $\zeta_k(s)$ の他の整数点での振る舞いを記述する k に付随する群とは何だろうか. Quillen (1973) は環, より一般にスキーム X に対して, 高次代数的 K 群 $K_n(X)$ を定義した. この群を計算することは一般には難しいが, 代数体 k に対しては次が知られている.

(i) $K_0(k) = \mathbb{Z}$.

(ii) $K_1(k) = k^* \supset K_1(\mathcal{O}_k) = \mathcal{O}_k^*$.

(iii) $K_{2m}(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ $(m > 0)$.

(iv) $K_{2m-1}(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = K_{2m-1}(\mathcal{O}_k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ $(m > 1)$.

そして, Borel [5] は次を証明した.

定理 2.1 (Borel, 1977)**.** $m > 1$ に対してレギュレーター写像

$$r\colon K_{2m-1}(\mathcal{O}_k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \begin{cases} \mathbb{R}^{r_1+r_2} & (m : \text{奇数}) \\ \mathbb{R}^{r_2} & (m : \text{偶数}) \end{cases}$$

が存在し,

(i) $r \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ は同形.

(ii) $\det(r) \equiv \zeta_k^*(1-m) \pmod{\mathbb{Q}^*}$.

2.2 Beilinson 予想

Bloch, Deligne らの仕事の後, Beilinson [2] ([14], [8] 参照) は一般の代数多様体に対してレギュレーター写像

$$r_{\mathscr{D}} \colon H^n_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(r))_{\mathbb{Z}} \to H^n_{\mathscr{D}}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(r))$$

を定義した. ここで,

(i) $H^n_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(r))$ はモチーフ的コホモロジー群と呼ばれる $\mathbb{Q}$-線形空間で, 代数的 K 理論を用いて定義される (今は同値な定義がほかにも存在する):

$$K_i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \bigoplus_{i=2r-n} H^n_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(r)).$$

また,

$$\mathrm{CH}^r(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq H^{2r}_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(r))$$

であり, Chow 群もモチーフ的コホモロジー群のひとつである.

(ii) $H^n_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(r))_{\mathbb{Z}}$ はその整数部分と呼ばれる部分空間で, $\mathcal{O}_k^* \subset k^*$ の類似である. これは有限次元だと予想されているが, 極めて難しい問題である.

(iii) $H^n_{\mathscr{D}}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(r))$ は Deligne コホモロジー群と呼ばれる有限次元 $\mathbb{R}$-線形空間であり, 微分形式の層を用いて定義される. その著しい特徴は, $i - 2r < -2$ のとき, Hasse-Weil 予想のもとで

$$\dim_{\mathbb{R}} H^{i+1}_{\mathscr{D}}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(r)) = \mathrm{ord}_{s=i+1-r} L(H^i(X), s)$$

が成り立つことである. また, $H^n_{\mathscr{D}}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(r))$ は標準的な $\mathbb{Q}$ 格子を持っている.

(iv) $r_{\mathscr{D}}$ はチャーン類写像の整数部分への制限である. この単射性も極めて難しい問題である.

そして, 次を予想した.

予想 2.2 (Beilinson, 1985)**.** X を代数体上の射影的で滑らかな代数多様体, $i - 2r < -2$ とする.

(i) $r_{\mathscr{D}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ は同形. とくに,

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^{i+1}_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(r))_{\mathbb{Z}} = \mathrm{ord}_{s=i+1-r} L(H^i(X), s).$$

(ii) $\det(r_{\mathscr{D}}) \equiv L^*(H^i(X), i+1-r) \pmod{\mathbb{Q}^*}$.

$i - 2r = -2$ のときは, $r_{\mathscr{D}}$ の左辺を

$$H^{i+1}_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(r))_{\mathbb{Z}} \oplus \mathrm{CH}^{r-1}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathrm{hom}$$

で置き換えて, 同様の予想が定式化される. 類数公式はこの特別な場合, すなわち $X = \operatorname{Spec} k$, $i = 0, r = 1$ の場合である.

2.3 BSD 予想

以上より, Tate 予想と Beilinson 予想によって $L(H^i(X), s)$ の整数点での振る舞いが, ただ 1 つの場合を除いて, モチーフ的コホモロジーとそこからのサイクル写像, レギュレーター写像で記述されることが分かった. 特殊値に関しては $\mathbb{Q}^*$ 倍を除いてであるが, これを予想するのが Bloch-加藤の玉河数予想である.

残るのは, i が奇数のときの $s = (i+1)/2$, つまり関数等式の中心での振る舞いである. それについての予想は, まずアーベル多様体の場合に Birch と Swinnerton-Dyer によって提起され, 代数多様体に対して (Swinnerton-Dyer, Beilinson, Bloch) 一般化された.

予想 2.3 (Swinnerton-Dyer [17])**.** X を代数体上の射影的で滑らかな代数多様体とするとき,

$$\operatorname{rank}\mathrm{CH}^r(X)_{\mathrm{hom}} = \operatorname{ord}_{s=r} L(H^{2r-1}(X), s).$$

ただし, $\mathrm{CH}^r(X)_{\mathrm{hom}} := \operatorname{Ker}(\mathrm{CH}^r(X) \to H^{2r}(X))$ はホモロジー同値で自明な部分である.

これは, $X = A$ が g 次元のアーベル多様体ならば, $\mathrm{CH}^g(A)_{\mathrm{hom}} = A(k)$ (A の k 有理点全体のなす群), $L(H^{2g-1}(A), s) = L(H^1(A), s-g+1)$ であり, BSD 予想と一致する. また, 特殊値 $L^*(H^{2r-1}(X), r)$ に関する予想は, 高さペアリングを用いて定式化される ([8] 参照).

3 フェルマー曲線と一般超幾何関数

3.1 一般超幾何関数

まず, 必要な超幾何関数を定義する. $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して,

$$(\alpha, n) := \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) = \Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha)$$

とする. Gauss の超幾何関数は

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1, n)} x^n$$

であった. Barnes の超幾何関数 ${}_3F_2$ ([16] 参照) は

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ d, e \end{matrix}; x\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a, n)(b, n)(c, n)}{(d, n)(e, n)(1, n)} x^n$$

で定義される. また, Appell [1] の 2 変数超幾何関数 F_3 は

$$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma; x, y) = \sum_{m,n \geq 0} \frac{(\alpha, m)(\alpha', n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n$$

で定義される．これらは $|x|<1$, $|x|,|y|<1$ で収束するが, しかるべき条件のもとでは収束領域の境界 $x=1$, $(x,y)=(1,1)$ でも収束し, 興味深い値をとることが知られている．たとえば, Euler の積分表示より,

$$F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1;1)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}B(\alpha,\beta)^{-1}$$

と, ベータ関数が現れる．Fermat 曲線の周期は本質的にベータ関数の特殊値である [12] ことに注意する．

同様に, F_3 や ${}_3F_2$ も Euler 型の積分表示をもつが, 特別な場合にはそれらが一致することがある．たとえば, 後のために

$$\widetilde{F}(\alpha,\beta):=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}F_3(\alpha,\beta,1,1,\alpha+\beta+1;1,1)$$

とおくと, F_3, ${}_3F_2$ の積分表示の比較と, ${}_3F_2$ の $x=1$ での値に関する Dixon の公式によって,

$$\widetilde{F}(\alpha,\beta)=\left(\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right)^2{}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha,\beta,\alpha+\beta-1\\ \alpha+\beta,\alpha+\beta\end{matrix};1\right)$$

であることがわかる．

3.2 レギュレーター

N を 3 以上の自然数, X を $\mathbb{Q}$ 上の Fermat 曲線

$$x^N+y^N=1$$

とし, レギュレーター写像

$$r_{\mathscr{D}}\colon H^2_{\mathscr{M}}(X,\mathbb{Q}(2))_{\mathbb{Z}}\to H^2_{\mathscr{D}}(X_{\mathbb{R}},\mathbb{R}(2))$$

を考える．これは $L(H^1(X),s)$ の $s=0$ での振る舞いを記述するはずである．この L 関数は Jacobi 和に付随する Hecke L 関数であり (Weil [21]), 解析接続, 関数等式が分かっている．とくに,

$$\mathrm{ord}_{s=0}L(H^1(X),s)=(N-1)(N-2)/2$$

である．

X の基礎体を $\mathbb{Q}(\mu_N)$ (μ_N は 1 の N 乗根全体) に拡大すると, X には群 $G=\mu_N\times\mu_N$ が作用する．また, コホモロジーの係数を $\mathbb{Q}(\mu_N)$ に拡大すると, これは G の指標の値をすべて含む．指標 $(\zeta,\zeta')\mapsto\zeta^a\zeta'^b$ に対応するコホモロジーの直和成分をそれぞれ $H^{a,b}_{\mathscr{M}}$, $H^{a,b}_{\mathscr{D}}$ と書くことにすると,

$$H_*=\bigoplus_{0<a,b<N,a+b\neq N}H^{a,b}_*$$

である．また, このような (a,b) に対して, 基礎体の無限素点 v 上のファイバーの Deligne コホモロジーを $H^{a,b}_{\mathscr{D},v}$ とすると, これは階数 1 の自由 $\mathbb{Q}(\mu_N)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ 加群であり, その $\mathbb{Q}(\mu_N)$ 格子の基底 $\lambda^{a,b}_v$ をうまくとることができる．

Ross [13] は, Milnor シンボル $\{1-x, 1-y\} \in K_2^M(\mathbb{Q}(X))$ が定義する元 $e \in H^2_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(2))_{\mathbb{Z}}$ に対して, $r_{\mathscr{D}}(e) \neq 0$ を示した. この元の $H^{a,b}_{\mathscr{M}}$ への射影を $e^{a,b}$ する.

定理 3.1 ([11], Theorem 4.14)**.** $r_{\mathscr{D}}$ の v 成分を $r_{\mathscr{D},v}$ とするとき,

$$r_{\mathscr{D},v}(e^{a,b}) = \mathbf{c}_v^{a,b}\lambda_v^{a,b}, \quad \mathbf{c}_v^{a,b} \in \mathbb{Q}(\mu_N) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$$

と書けるが, 埋め込み $\sigma\colon \mathbb{Q}(\mu_N) \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対して,

$$\sigma(\mathbf{c}_v^{a,b}) = -\frac{1}{4N^2\pi i}\left(\widetilde{F}\left(\tfrac{\langle ha\rangle}{N}, \tfrac{\langle hb\rangle}{N}\right) - \widetilde{F}\left(\tfrac{\langle -ha\rangle}{N}, \tfrac{\langle -hb\rangle}{N}\right)\right)$$

であり, これは非自明である. ただし $h \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ は, v に対応する埋め込みを τ として, $\sigma(\zeta) = \tau(\zeta)^h$ で定まる. また, $\langle a\rangle \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ は $a \bmod N$ の代表元である.

この結果から, 各 $r_{\mathscr{D},v} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ が全射であることが従う. とくに $N = 3, 4, 6$ の場合, $\mathbb{Q}(\mu_N)$ は虚 2 次体なので, Beilinson 予想の一部である $r_{\mathscr{D}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ 全体の全射性が従う. また, $N = 5, 7$ の場合も, X への対称群 S_3 の作用を用いて, $r_{\mathscr{D}}$ の全射性について結果を得ることができる ([11], Theorem 4.33, Propositiono 4.36).

また, $N = 3, 4, 6$ の場合, $L(H^1(X), s)$ は, $\mathbb{Q}(\mu_N)$ の整数環に虚数乗法をもつ $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の L 関数と一致する. この場合, Beilinson 予想に先立つ Bloch の仕事 [3] によって, レギュレーターと L 関数の特殊値の一致がわかっている. モチーフ的コホモロジー群の我々の元と Bloch の元を比較して, たとえば次を得る.

定理 3.2 ([10], Theorem 5.2)**.** $N = 3$ のとき,

$$L^*(H^1(X), 0) = \frac{1}{6\sqrt{3}\pi}\left(\widetilde{F}\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right) - \widetilde{F}\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right)\right).$$

(これは $\mathbb{Q}^*$ 倍のあいまいさのない等式であることに注意.)

このような一般超幾何関数の特殊値と L 関数の特殊値との間の関係は, 筆者の知る限り, 見つかっていなかったようである.

3.3 アーベル-ヤコビ写像

X を射影的で滑らかな代数多様体とする. 余次元 1 の場合, Chow 群は Picard 群にほかならず, $\mathrm{CH}^1(X)_{\mathrm{hom}}$ は Piacrd 多様体というアーベル多様体の有理点全体のなす群と同形である. よって, 基礎体が代数体ならば, Mordell-Weil の定理より $\mathrm{CH}^1(X)_{\mathrm{hom}}$ は有限生成アーベル群である. しかし, $n \geq 2$ の場合, $\mathrm{CH}^n(X)_{\mathrm{hom}}$ の構造は非常に難しく, 分かっていることは少ない.

以下, A は $\mathbb{C}$ 上の射影的で滑らかな g 次元の代数多様体とする. また, $\mathrm{CH}_k(A) = \mathrm{CH}^{g-k}(A)$ (A 上の k 次元代数的サイクルの Chow 群) とする. Griffiths は, Abel-Jacobi 写像

$$\Phi_k\colon \mathrm{CH}_k(A)_{\mathrm{hom}} \to J_k(A)$$

を定義した．ここで, $J_k(A)$ は中間ヤコビアンとよばれる複素トーラス

$$J_k(A) = F^{k+1}H^{2k+1}(A,\mathbb{C})^*/H_{2k+1}(A,\mathbb{Z})$$

($F^\bullet$ は Hodge フィルトレーション, * は $\mathbb{C}$ 線形な双対) である．Abel-Jacobi の定理より, $k=g-1$ のとき Φ_k は同形だが, 一般には単射でも全射でもない．この写像は, 代数的サイクルの (有理同値での) 非自明性だけでなく, より粗い代数的同値での非自明性とも関係がある．なぜなら, $Z \in \mathrm{CH}_k(X)_{\mathrm{hom}}$ が代数的に自明ならば, $\Phi_k(Z)$ の F^{k+2} への制限が自明だからである．

ホモロジー的に自明だが代数的に自明でない代数的サイクルの重要な例として, Ceresa サイクルがある．X を種数 $g \geq 3$ の曲線, A をそのヤコビ多様体とする．X の基点を決めて X を A に埋め込むと, X は $\mathrm{CH}_1(A)$ の元を定める．$\mathrm{Sym}^k X$ を X の k 回対称積とすると, A 上の -1 倍は偶数次のコホモロジー群に自明に作用するので,

$$\mathrm{Sym}^k X - \mathrm{Sym}^k X^- \in \mathrm{CH}_k(A)_{\mathrm{hom}}$$

である．問題なのは $1 \leq k \leq g-2$ の場合だが, このとき Ceresa [4] は, $\mathrm{Sym}^k X - \mathrm{Sym}^k X^-$ が一般の (generic な) X に対して代数的に非自明であるということを示した．

具体的な曲線に対して Abel-Jacobi 写像を計算することは簡単ではないが, Harris [6] は, $k=1$ の場合の Ceresa サイクルの像 $\Phi_1(X - X^-) \in J_1(A)$ が, 曲線 X 上の反復積分で書けることを示し, Fermat 4 次曲線の場合に $X - X^-$ が代数的に非自明であることを証明した [7]．また, 田所は, Klein 4 次曲線 (これは Fermat 7 次曲線の商である) の場合 [18], Fermat 6 次曲線の場合 [19] に同様のことを示すと同時に, その積分が ${}_3F_2$ の特殊値で書けることを発見した．

これを任意の次数の Fermat 曲線と任意の k に一般化したのが [9] である．Ceresa サイクルの Abel-Jacobi 像 $\Phi_k(\mathrm{Sym}^k X - \mathrm{Sym}^k X^-)$ の,

$$F^{k+1}H^{2k+1}(A,\mathbb{C}) = F^{k+1} \wedge^{2k+1} H^1(X,\mathbb{C})$$

の適当な元での値を見る．すると, それらは再び, 一般超幾何関数 ${}_3F_2$, F_3 の特殊値で書けることがわかる ([9], Theorem 4.8, Proposition 5.3)．とくに, ある $F^{k+2} \wedge^{2k+1} H^1(X,\mathbb{C})$ の元での値を見ることにより, 次が従う．

定理 3.3 ([9], Theorem 1.1)**.** X を次数 $N \geq 4$ の Fermat 曲線, $1 \leq k \leq g-2$, $g=(N-1)(N-2)/2$ とする．このとき,

$$k! \cdot 2N^{2k} \sum_{\substack{0<h<N/2 \\ (h,N)=1}} \frac{\Gamma\left(1-\frac{h}{N}\right)^4}{\Gamma\left(1-\frac{2h}{N}\right)^2} \cdot {}_3F_2\left(\begin{matrix} \frac{h}{N}, \frac{h}{N}, 1-\frac{2h}{N} \\ 1, 1 \end{matrix}; 1\right)$$

が有理整数でないならば, $\mathrm{Sym}^k X - \mathrm{Sym}^k X^-$ は代数的に非自明である．数値計算により, 上の条件は $k=1$, $N \leq 1000$ についてみたされる．また, $N \leq 8$ のときはすべての k でみたされる．

定理の値が有理数でなければ, Ceresa サイクルは代数的同値を法としてねじれでない．とくに, $\mathrm{CH}_k(A)$ の階数が正である．考えている多様体も Ceresa サイクルも $\mathbb{Q}$ 上定義されるので, BSD 予

想によるとこれは, 対応する L 関数が関数等式の中心で消えるということを含むはずである. したがって上の結果は, 一般超幾何関数の特殊値の有理性と, Jacobi 和の Hecke L 関数の零点との間に, なんらかの関係があるということを示唆している.

参考文献

[1] P. Appell and J. Kampé de Feriet, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques - polynomes d'Hermite*. Gauthier-Villars, 1926.

[2] A. A. Beilinson, Higher regulators and values of L-functions. J. Soviet Math. **30** (1985), 2036-2070.

[3] S. Bloch, *Lectures on algebraic cycles*. Duke Univ. Math. Ser., IV. Duke University, Durham, N.C., 1980.

[4] G. Ceresa, C is not algebraically equivalent to C^- in its Jacobian. Ann. Math. (2) **117** (1983), no. 2, 285-291.

[5] A. Borel, Cohomologie de SL_n et valeurs de fonctions zeta aux points entiers, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **4** (1977), 613-636.

[6] B. Harris, Harmonic volumes. Acta Math. **150** (1-2) (1983), 91-123.

[7] B. Harris, Homological versus algebraic equivalence in a Jacobian. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **80** (4i) (1983), 1157-1158.

[8] J. Nekovář, Beilinson's conjectures. In: *Motives (Seattle, WA, 1991)*. Proc. Sympos. Pure Math. **55**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 537-570.

[9] N. Otsubo, On the Abel-Jacobi maps of Fermat Jacobians, to appear in Math. Z.

[10] N. Otsubo, Certain values of Hecke L-functions and generalized hypergeometric functions, to appear in J. Number Theory.

[11] N. Otsubo, On the regulator of Fermat motives and generalized hypergeometric functions, to appear in J. Reine Angew. Math.

[12] D. E. Rohrlich, appendix to: B. H. Gross, On the periods of abelian integrals and a formula of Chowla and Selberg. Invent. Math. **45** (1978), 193-211.

[13] R. Ross, K_2 of Fermat curves with divisorial support at infinity. Compositio Math. **91** (1994), 223-240.

[14] P. Schneider, Introduction to the Beilinson conjectures. In: *Beilinson's conjectures on special values of L-functions*. Perspect. Math., 4, Academic Press, Boston, 1988, 1-35.

[15] J.-P. Serre, Zeta and L functions. In: *Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963)*. Harper & Row, New York, 1965, 82-92.

[16] L. J. Slater, *Generalized hypergeometric functions*. Cambridge University Press, Cambridge (1966).

[17] H. P. F. Swinnerton-Dyer, The conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, and of Tate.

Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966), Springer, Berlin, 1967, 132-157.

[18] Y. Tadokoro, A nontrivial algebraic cycle in the Jacobian variety of the Klein quartic. Math. Z. **260** (2008), no.2, 265-275.

[19] Y. Tadokoro, A nontrivial algebraic cycle in the Jacobian variety of the Fermat sextic. Tsukuba J. Math. **33** (2009), no.1, 29-38.

[20] J. Tate, Algebraic cycles and poles of zeta funtions. In: *Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963).* Harper & Row, New York, 1965, 93-110.

[21] A. Weil, Jacobi sums as "Größencharaktere". Trans. AMS **73** (1952), 487-495.