Bogomolov-Miyaoka-Yau 不等式をめぐって

東京大学数理科学研究科　宮岡洋一*

0. 序

２次元，あるいはさらに高次元の射影多様体上のベクトル束の理論において，Bogomolov の不等式や，特別なベクトル束である余接束について成立する Miyaoka-Yau 不等式は，きわめて基本的な結果である。本稿では，これらの不等式を概観したのち，その一般化と応用を考えてみたい。

1. 半安定ベクトル束

k を代数閉体，X を k 上定義された n-次元非特異射影多様体，$\mathbf{H} = (H_1, \ldots, H_{n-1})$ を $n-1$ 個のセミアンプル因子からなる列とする。X 上の ねじれ自由層 $\mathcal{E}$ と $\mathbf{H}$ から定まる有理数

$$\mu_{\mathbf{H}}(\mathcal{E}) = \frac{c_1(\mathcal{E})H_1 \cdots H_{n-1}}{\mathrm{rank}\ \mathcal{E}}$$

を $\mathcal{E}$ の $\mathbf{H}$ **スロープ** ($\mathbf{H}$-slope) という。ただしねじれ自由層 $\mathcal{E}$ の階数 rank $\mathcal{E}$ とは X の一般の点における $\mathcal{E}$ の階数をいうものとする。$n = 1$. すなわち X が曲線の場合，$\mathbf{H} = \emptyset$ で,

$$\mu(\mathcal{E}) = \mu_{\emptyset}(\mathcal{E}) = \frac{\deg\ \mathcal{E}}{\mathrm{rank}\ \mathcal{E}}$$

は単にスロープと呼ばれる。

$\mathcal{E}$ の任意のねじれ自由な商層 $\mathcal{F} = \mathcal{E}/$(飽和部分層) $\neq 0$ に対して $\mathbf{H}$ スロープの等号付き不等式

$$\mu_{\mathbf{H}}(\mathcal{F}) \geq \mu_{\mathbf{H}}(\mathcal{E})$$

*Partially supported by the JSPS Grant-in-Aid # 19340003 “Minimal model theorem: its proof, development and applications”
2000 Mathematics Subject Classification: Primary 14N15; Secondary 14J28, 14J29

が成立するとき，$\mathcal{E}$ は **H 半安定** ($\mathbf{H}$-semistable) であるという (通常は商層のかわりに部分層を用いて定義するが，同値であるし，幾何的意味付けは商の方が自然にできるので，上の定義を採用する)。さらに強く，$\mathcal{F} \neq \mathcal{E}, 0$ なら必ず真の不等号が成立するとき，$\mathcal{E}$ は **H 安定** ($\mathbf{H}$-stable) であるという。また H 半安定でないことを，**H 不安定** ($\mathbf{H}$-unstable) であるという ($n = 1$ なら $\mathbf{H}$ がつかない半安定，安定，不安定等という)。

一般の ねじれ自由 sheaf は $\mathbf{H}$ 半安定層による逐次拡大として表すことができる。

定理 1.1 (Harder-Narasimhan [HM]). $\mathcal{E}$ が ねじれ自由層ならば，下記の条件 (1)(2)(3) をみたすフィルトレーション

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \supset \mathcal{E}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{E}_s = 0$$

がただ一つ存在する。

(1) $\mathcal{F}_i = \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1}$ は 0 でないねじれ自由層 ($i = 0, \ldots, s-1$)。

(2) $\mathcal{F}_i$ は $\mathbf{H}$ 半安定 ($i = 0, \ldots, s-1$)。

(3) $\mu_{\mathbf{H}}(\mathcal{F}_0) < \cdots < \mu_{\mathbf{H}}(\mathcal{F}_{s-1})$

このようなフィルトレーションを $\mathcal{E}$ の **Harder-Narasimhan フィルトレーション**という。Harder-Narasimhan フィルトレーションの長さ s が 1 であることと $\mathcal{E}$ が $\mathbf{H}$ 半安定であることとは同値である。

同様に $\mathbf{H}$ 半安定層は，相等しい $\mathbf{H}$ スロープをもつ $\mathbf{H}$ 安定層による逐次拡大 (Jordan-Hölder フィルトレーション) として表すことができる。Harder-Narasimhan とは異なってそのような拡大は一般に一意的ではないが，逐次商の直和は一意的に定まる。

半安定束の超曲面への制限に関しては，次の定理がある。

定理 1.2 (Mehta-Ramanathan [MR]). $\mathcal{E}$ を $\mathbf{H}$ 半安定層とし，H_{n-1} はアンプルであると仮定する。m を十分大きな自然数，Y を線形系 $|mH_{n-1}|$ の一般元とし，$H'_i = H_i|_Y$, $\mathbf{H}' = (H'_1, \ldots, H'_{n-2})$ とおくと，$\mathcal{E}$ の Y への制限 $\mathcal{E}|_Y$ は $\mathbf{H}'$ 半安定である。

証明の大略を説明する。線形系に付随する incidence variety $\Gamma \subset |mH| \times X$ を考える。第 2 成分 X への射影 p_2 で $\mathcal{E}$ を引き戻したものを $\tilde{\mathcal{E}}$ と書

くことにする。第 1 成分への射影 $p_1\colon \Gamma \to |mH|$ の一般のファイバー Y（つまり $|mH|$ の一般の元）への $\tilde{\mathcal{E}}$ の制限 $\mathcal{E}_Y$ が不安定になったと仮定して，Harder-Narasimhan フィルトレーション の第 1 成分 $\mathcal{S}_Y = \mathcal{E}_{Y,1}$ をとる。Harder-Narasimhan の一意性と m が非常に大きく Serre vanishing が成立することを考慮すると，Hilbert 概形の理論から $\mathcal{S}_Y \subset \mathcal{E}_Y$ を，$\tilde{\mathcal{E}}$ の部分層 $\tilde{\mathcal{S}}$ にのばすことができて，p_2 の各ファイバー（$x \in X$ 上のファイバーは部分線形系 $|mH - x|$ である）への $\mathcal{S}$ の制限は自明であることがわかる。したがって $\mathcal{S} = (p_2)_*\tilde{\mathcal{S}}$ は $\mathcal{E}$ の部分層となり，$\mathcal{E}$ も $\mathbf{H}$ 不安定になる。

定理 1.2 の逆，つまり $\mathcal{E}$ が $\mathbf{H}$ 不安定の場合，$\mathcal{E}|_Y$ が $\mathbf{H}'$ 不安定であることは，定義からただちに従う。したがって $\mathbf{H}$ の各成分 H_i がすべてアンプルである場合，$\mathbf{H}$ 半安定であるか否かは，$n-1$ 個の線形系 $|m_1H_1|, \ldots, |m_{n-1}|$ $(m_i. \gg 0)$ が定める一般の完全交差曲線 C への制限が半安定か否かによって判定できることになる。
次に全射 $\pi\colon Z \to X$ による引き戻しの半安定性について，次の定理が成立する。

定理 1.3. $\pi\colon Z \to X$ を generically finite な分離的全射とし，$\mathbf{H} = (H_1, \ldots, H_{n-1})$ をアンプルな因子の列とする。X 上の $\mathcal{E}$ が $\mathbf{H}$ 半安定ならば，$\pi^*\mathcal{E}$ は $\pi^*\mathbf{H}$ 半安定である。

$(X, \mathcal{E})$ に Metha-Ramanathan を適用することによって，この定理の証明は Z, X がともに曲線であると仮定してよい。曲線の間の有限分離的全射 $\varphi\colon C' \to C$ と C 上のベクトル束 $\mathcal{F}$ について，$\varphi^*\mathcal{F}$ が半安定なら $\mathcal{F}$ が半安定であることは明らかなので，$\pi\colon Z \to X$ を Galois 閉包で置き換え，π が Galois である場合に証明しておけば十分である。$\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{E}$ の Harder-Narasimhan フィルトレーションを $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_1 \supset \cdots \quad \supset 0$ とおき，$\sigma \in \mathrm{Gal}(Z/X)$ の $\mathcal{F}$ への自然な作用を考えると，$\mathcal{E} \supset \sigma^*(\mathcal{F}_1) \supset \cdots$ も $\mathcal{F}$ の Harder-Narashimhan フィルトレーションである。したがって Harder-Narasimhan の一意性から $\sigma^*\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1$，すなわち $\mathcal{F}_1$ は Galois 不変であり，$\mathcal{E}$ の部分束 $\mathcal{E}_1$ の引き戻しである。$\mathcal{F}$ が不安定だとすると，$\mu(\mathcal{F}/\mathcal{F}_1) < \mu(\mathcal{F})$ なので $\mu(\mathcal{E}/\mathcal{E}_1) < \mu(\mathcal{E})$ となり，$\mathcal{E}$ の半安定性に矛盾する。
この定理では π の**分離性が本質的**で，非分離射による引き戻しでは半安定性が保たれない。

2. 射影束の幾何と半安定性

ベクトル束（あるいはもっと一般にねｒじれ自由層でもよいが，簡単のためにベクトル束のみを考えることにする ） $\mathcal{E}$ の $\mathbf{H}$ 半安定性は，$\mathcal{E}\otimes$(直線束) で置き換えても何ら変わらない。つまり $\mathbf{H}$ 半安定性は

$$\{\text{ベクトル束}\}/(\text{直線束の積を法とした同値類})$$

上の概念と考えるべきである。この同値類は $\mathcal{E}$ に付随する射影束 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ として実現されているので，$\mathcal{E}$ の $\mathbf{H}$ 半安定性を射影束 $\pi\colon \mathcal{P}=\mathbb{P}(\mathcal{E})\to X$ の言葉で述べることができる。

言葉を用意しよう。r を $\mathcal{E}$ の階数とする。$\mathcal{E}$ が定めるトートロジカル直線束 $h_{\mathcal{E}}$ は $\mathcal{E}$ の取り方に依存するが，$\mathbf{Q}$ 因子

$$h_{\mathcal{P}}=\mathcal{E}-\frac{1}{r}\pi^*\det\mathcal{E}$$

は $\mathcal{E}$ を $\mathcal{E}\otimes$(直線束) で置き換えても不変であることが簡単にわかる。$h_{\mathcal{P}}$ を射影束 $\pi\colon\mathcal{P}\to X$ の**標準トートロジカル直線束**と呼ぶ。自然な Euler 完全系列

$$0\to\mathcal{O}_{\mathcal{P}}\to(\pi^*\mathcal{E}^{\vee})(h_{\mathcal{E}})\to\Theta_{\mathcal{P}/X}\to 0$$

を見れば，相対標準束 $K_{\mathcal{P}/X}=K_{\mathcal{P}}-\pi^*K_X$ が $-rh_{\mathcal{P}}$ と等しいことが確かめられる。

h_P の定義をベクトル束のレベルで考えると，**形式的ベクトル束** $\mathcal{E}_0=\mathcal{E}(-(1/r)\det\mathcal{E})$ は $\mathcal{E}\otimes$(直線束) で置き換えても不変となるので，$\mathcal{E}_0$ を**標準化されたベクトル束** と呼ぶことにする。当然ながら $\mu_{\mathbf{H}}(E_0)=0$ が成立する。標準化されたベクトル束 $\mathcal{E}_0$ で $\mathbf{H}$ 半安定性の定義を書いて見ると，

$$\mathcal{E}_0 \text{ が } \mathbf{H} \text{ 半安定} \Leftrightarrow \mathcal{E} \text{ の任意のねじれ自由商層 } \mathcal{F} \text{ に対して } \mu_{\mathbf{H}}(\mathcal{F})\geq 0$$

である。

さて飽和部分層 $\mathcal{S}\subset\mathcal{E}$ とねじれ自由商層 $\mathcal{Q}=\mathcal{E}/\mathcal{S}$ は $\mathcal{P}$ の既約な閉部分多様体 $Z\subset\mathcal{P}$ で，X の一般点 x 上のファイバーは $\mathbb{P}^{r-1}$ の線形部分空間であるようなもの (**概線形閉部分多様体**) を定義する。逆にこのような既約閉部分多様体 Z があれば，自然な全射 $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(h_{\mathcal{E}}\to\mathcal{O}_Z(h_{\mathcal{E}})\to 0$ に π_* を施すことによって全射 $\mathcal{E}\to\mathcal{Q}$ が誘導されるので，自然な同値

$$(\mathcal{E} \text{ のねじれ自由商層 } \mathcal{Q})\sim(\mathcal{P} \text{ の概線形閉部分多様体 } Z)$$

が得られ, この対応のもとで

$$r'\mu_{\mathbf{H}}(\mathcal{Q}) = h_{\mathcal{E}}^{r'}(\pi^* H_1)\cdots(\pi^* H_{n-1})Z$$

が成立する。ただし $r' = \mathrm{rank}\ \mathcal{Q}$ である。以上の考察により，$\mathcal{P}$ が $\mathbf{H}$ 半安定であることと，任意の概線形閉部分多様体 Z に対して

$$h_{\mathcal{P}}^{\mathrm{rank}\ Z}(\pi^* H_1)\cdots(\pi^* H_{n-2})Z \geq 0$$

が成立することは同値である。ここで rank Z とは Z に対応する $\mathcal{Q}$ の階数，言い換えれば X の一般点上のファイバーの次元に 1 を加えた数のことをいう。

以上，半安定性の幾何的な解釈を与えたが，ここでは概線形部分多様体という概念が現れており，あまり実用的とは言いがたい。しかし標数 0 の曲線上の射影束 $\mathcal{P}$ については，きわめて明快な解釈がある。

定理 2.1 [M]**.** 基礎体 k の標数は 0 であるとする。非特異射影代数曲線 C 上の射影束 $\mathcal{P}$ について以下は同値である。

(1) $\mathcal{P}$ は半安定。

(2) 標準トートロジカル束 $h_{\mathcal{P}}$ はネフ。

(3) ネフ因子が生成する閉錐 $\overline{NA}^1(\mathcal{P})$ は $h_{\mathcal{P}}$ と $\pi^*[\,1$ 点$]$ で生成される。

(4) $\mathcal{P}$ 上の曲線が生成する錐の閉包（擬エフェクティヴ錐）$\overline{NE}_1(\mathcal{P}) \subset H^{2r-2}(\mathcal{P}, \mathbb{R})$ は $h_{\mathcal{P}}^{r-1}$ と $h_{\mathcal{P}}^{r-2}\pi^*[1$ 点$]$ で生成される (ただし $r = \mathrm{rank}\ \mathcal{P} = \mathrm{rank}\ \mathcal{E}$)。

(5) $h_{\mathcal{P}}$ は巨大でない。

(6) $\mathcal{P}$ 上の擬エフェクティブ因子が生成する錐は $\overline{NA}^1(\mathcal{P})$ は $h_{\mathcal{P}}$ と $\pi^*[\,1$ 点$]$ で生成される。

(7) $\mathcal{P}$ 上の擬エフェクティヴ因子はすべてネフ。

(8) 標準化されたベクトル束 $\mathcal{E}_0$ は半正 (semipositive)。

(9) $\mathcal{E}_0$ は半負 (seminegative)。

証明. (3) と (4) の同値性は Kleiman の判定法から従う。また (3) ⇒ (2) は自明である。

(2) ⇒ (3) は次のようにしてわかる。$h_{\mathcal{P}}^r = 0$ だから $h_{\mathcal{P}}$ は豊富ではないが，パラメータ t を十分大きくとると $h_{\mathcal{P}} + t\pi^*[(1\text{点}]$ は豊富である。しかし $t \to \infty$ の極限である $\pi^*[1\text{点}]$ はネフではあるがもはや豊富でない。このことからネフ因子が生成する閉錐（実際は平面上の角領域）

$$\overline{NA^1}(\mathcal{P}) \subset H^2(\mathcal{P}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}h_{\mathcal{P}} \oplus \mathcal{R}\pi^*[1\text{ 点}]$$

は閉錐 $\mathbb{R}_{\geq 0}h_{\mathcal{P}} + \mathbb{R}_{\geq 0}\pi^*[1\text{点}]$ の部分錐であり，(2) が成立すれば (3) も成立する。以上で (2) (3) (4) はみな同値であることがわかった。

次に (2) ⇒ (5) ⇒ (6) を示す。$h_{\mathcal{P}}$ がネフであれば，$h_{\mathcal{P}}^r = 0$ より $h_{\mathcal{P}}$ は巨大でない。$h_{\mathcal{P}}$ が巨大でなければ，$h_{\mathcal{P}}$ は $\overline{NE}^1(\mathcal{P})$ の境界点であり，条件 (6) が成立する。

(2) ⇒ (6) だったから，(2) ⇒ (7) は自明である。

(7) ⇒ (1) および (7) ⇒ (1) は簡単である。$\mathcal{E}_0$ が不安定だとすると，次数が正の部分束 $\mathcal{S}$ が存在する。したがって $\mu(\mathcal{S}) \geq 1/(r-1)$ である。ここで Riemann-Roch を使うと, 十分大きな N に対して $(\mathrm{Sym}^N \mathcal{S})(-(N/2(r-1))\,[1\text{点}])$ は 0 でない大域切断をもつ。特に

$$H^0\left(C, (\mathrm{Sym}^N \mathcal{E}_0)\left(-\frac{N}{2(r-1)}[1\text{点}]\right)\right) \simeq H^0\left(\mathcal{P}, N\left(h_{\mathcal{P}} - \frac{\pi^*[1\text{点}]}{2(r-1)}\right)\right) \neq 0$$

である。つまり $h_{\mathcal{P}} - \pi^*[1\text{点}]/2(r-1)$ はエフェクティヴ因子であって (6) に反する。またこの因子の自己交叉数 $(h_{\mathcal{P}} - \pi^*[1\text{点}]/2(r-1))^r = -r/2(r-1)$ は負であり，したがってネフ因子ではあり得ない。

(1) ⇒ (2) (3) (4) を示そう。(2) が成立しないと仮定すると，閉集合 $\overline{NA}^1(\mathcal{P})$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}h_{\mathcal{P}} + \mathbb{R}_{\geq 0}\pi^*[1\text{点}]$ より真に小さい。したがってその双対である $\overline{NE}_1(\mathcal{P})$ は閉錐 $\mathbb{R}_{\geq 0}h_{\mathcal{P}}^{r-1} + \mathbb{R}_{\geq 0}h_{\mathcal{P}}^{r-2}\pi^*[1\text{点}]$ を真に含む閉錐である。つまり $\mathcal{P}$ 内の曲線 Γ で数値的に $ah_{\mathcal{P}} - b\pi^*([1\text{点}]), a > 0, b > 0$ と書けるものが存在する。$\pi\colon \Gamma \to C$ は当然分離的全射であり，その写像は a である。Γ の正規化を $\tilde{\Gamma}$ とすると，ファイバー積 $\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\Gamma} \times_C \mathcal{P}$ は $\tilde{\Gamma}$ 上の射影束で，$\Gamma \subset \mathcal{P}$ の逆像は一つの既約因子として $\tilde{\Gamma}$ 上の大域切断（とくに概線形部分多様体である）$\sigma(\tilde{\Gamma})$ を含んでいて，その数値的同値類は $h_{\mathcal{P}} - (a/b)\pi^*[1\text{点}]$ の引き戻しである。つまり $\tilde{\mathcal{P}}$ は不安定であり，$\tilde{\Gamma} \to C$ が分離的であることを考えると，$\mathcal{P}$ も不安定である。

以上で (1) から (7) までが同値な条件であることがわかった。残りの条件のうち，(8) は (2) の言い換えにすぎない。また定義から半安定ベクトル束の双対はまた半安定なので，(9) は $\mathcal{E}_0^\vee$ に対する (8) である。□

以後は特に断らない限り，**定義体** k **は標数 0 の閉体**と仮定する。定理 2.1 の条件 (6) (7) を見ることによって，次の系が得られる。

系 2.2. 非特異射影的曲線 C 上のベクトル束 $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ に対して．次が成立する。

(1) $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ が半安定ならば $\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}$, $\mathcal{H}\wr\Updownarrow(\mathcal{E},\mathcal{F})$ も半安定。

(2) $\mathcal{E}$ が安定なら $\mathrm{Sym}^k\mathcal{E}$, $\bigwedge^k\mathcal{E}$ も半安定。

以上は曲線上の話であるが，定理 1.2 (Mehta-Ramanathan) を使うと次もわかる。

定理 2.3. X を n 次元非特異射影多様体とし，$\mathbf{H}=(H_1,\dots,H_{n-1})$ をアンプル因子の列とする。X 上の射影束 $\mathcal{P}=\mathbb{P}(\mathcal{E})$ が $\mathbf{H}$ 半安定ならば，標準トートロジカル因子 $h_{\mathcal{P}}$ は巨大でない。

3. Bogomolov 不等式とその応用

前節で見た定理 2.3 を次のように言い換えてみよう。すなわち $\mathcal{P}$ 上任意の因子 $\tilde{D}$ を固定し，t を正整数を動くパラメータとしたとき，

$$\dim H^0(\mathcal{P},\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(th_{\mathcal{P}}+D))=O(t^{r+\dim X-2}).$$

特に $\tilde{D}=\pi^*D$ と書ける場合は，

$$\dim H^0(X,(\mathrm{Sym}^t\mathcal{E}_0)(-D))=O(t^{r+\dim X-2}).$$

Serre 双対と $\mathcal{E}_0^\vee$ がやはり半安定であることを用いれば

$$\dim H^{\dim X}(X,(\mathrm{Sym}^t\mathcal{E}_0)(-D))=O(t^{r+\dim X-2}).$$

もわかる。特に $\dim X=2$ の場合，

$$\chi(\mathcal{P},\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(th_{\mathcal{P}}))=\chi(X,(\mathrm{Sym}^t\mathcal{E}_0)\le\dim H^0+\dim H^2=O(t^r)$$

が成立するが，Riemann-Roch より，左辺は

$$\frac{h_{\mathcal{P}}^{r+1}t^{r+1}}{(r+1)!}+O(t^r)=-c_2(\mathcal{E}_0)t^{r+1}+O(t^r)=-c_2(\mathcal{E})+\frac{r-1}{2r}c_1(\mathcal{E})^2+O(t^r)$$

である。したがって次の定理が証明された。

定理 3.1 (Bogomolov 不等式) [B]. 非特異偏極曲面 (X, H) 上階数 r の H 半安定ベクトル束 $\mathcal{E}$ に対して，不等式

$$(r-1)c_1(\mathcal{E})^2 \leq 2rc_2(\mathcal{E})$$

が成立する。

Mehta-Ramanathan を用いれば次の系を得る。

系 3.2. X を n 次元非特異射影多様体，$\mathbf{H} = (H_1, \ldots, H_{n-1})$ をアンプル因子の列とする。X 上の階数 r のベクトル束 $\mathcal{E}$ が $\mathbf{H}$ 半安定ならば，不等式

$$(r-1)c_1(\mathcal{E})^2 H_1 \cdots H_{n-2} \leq 2rc_2(\mathcal{E}) H_1 \cdots H_{n-2}$$

が成立する。

Bogomolov 不等式の重要な応用に，**Reider 理論** がある。

非特異な偏極曲面 (X, H) 上の因子 D が $DH > 0, D^2 > 0, H^1(\mathcal{O}_X(K_X + D)) \neq 0$ をみたすと仮定する。このとき Serre 双対によって $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(D), \mathcal{O}_X) \neq 0$ となるので，非自明な拡大

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_X(D) \to 0$$

ができる。$c_1(\mathcal{E}) = D$, $c_2(\mathcal{E}) = 0$ なので，$\mathcal{E}$ は Bogomolov 不等式を満たさず，したがって H 不安定である。つまり $\mathcal{E}$ は階数 1 の飽和部分層 $\mathcal{O}_X(L)$ で $LH > (1/2)DH$ となるものを含む。非自明な拡大ということから，$L < D$, つまり $C = D - L$ はエフェクティヴ因子 $C > 0$ であって $L = D - C$，$0 < CH < (1/2)DH$ をみたす。またこの飽和部分層が誘導する完全系列

$$0 \to \mathcal{O}_X(D - C) \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_X(C)$$

をみることによって，$C(D - C) \leq c_2(\mathcal{E}) = 0$ もわかる。これは非常に強い制約条件であって，Hodge 指数定理と組み合わせることによって，次の定理を導く。

定理 3.3 (Mumford, Reider [R]). X を非特異代数曲面，M を X 上のネフな因子とする。

(1) $M^2 > 0$ なら，$H^1(X, K_X + M) = 0$.

(2) $M^2 \geq 5$ で $|K_X + M|$ の基点集合が $x \in X$ を含めば，エフェクティヴ因子 $E \ni x$ があって，交点数の組 (ME, E^2) は $(0, -1)$ または $(1, 0)$。

(3) $M^2 \geq 10$ で基点をもたない線形系 $|K_X + M|$ が $x, y \in X$ を分離しなければ，x, y をともに含むエフェクティヴ因子 E があって (ME, E^2) は $(0, -2), (0, -1), (1, -1), (1, 0), (2, 0)$ のいずれか。

4. オービフォールド への拡張

本節では（非特異）オービフォールドを導入し，Bogomolov 不等式や Miyaoka-Yau 不等式がごく自然にオービフォールド上へと拡張できることを説明する。

X を商特異点のみをもつ複素解析空間とする。X を底空間とする（非特異）**オービフォールド**とは，以下の条件をみたす 5 つ組み

$$\tilde{X} = (X, \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}, , \{\tilde{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}, \{G_\alpha\}_{\alpha \in A}, .\{\iota_\alpha\}_{\alpha \in A})$$

をいう。

(a) $\{U_\alpha\}$ は X の開被覆

(b) $\{\tilde{U}_\alpha\}$ は（非特異）複素多様体の族

(c) G_α は $\tilde{U}_\alpha$ に忠実かつ正則に作用する有限群

(d) ι_α は U_α と $\tilde{U}_\alpha / G_\alpha$ の間の同型

ただしうるさいことをいうと，本当はこの定義は正確ではない。被覆の細分によって得られるものは同一視し，そのような同値類を考えたものが本当のオービフォールドである。おおざっぱにいうと，オービフォールドとは X を局所的に複素多様体の商空間と考え，かつその商構造を記憶しておく，ということである。

二つのオービフォールド $\tilde{X} = (X, \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}, , \{\tilde{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}, \{G_\alpha\}_{\alpha \in A}, .\{\iota_\alpha\}_{\alpha \in A})$ と $\tilde{Y} = (Y, \{V_\beta\}_{\beta \in B}, , \{\tilde{V}_\beta\}_{\beta \in B}, \{G_\beta\}_{\beta \in B}, .\{\kappa_\beta\}_{\beta \in B})$ の間の射 $\tilde{f}$ とは，次の条件をみたす 3 つ組み $(i, \{\tilde{f}_\alpha\}_{\alpha \in A}, \{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A})$ のことである。

(a) i は添字集合 A から B への写像

(b) $\tilde{f}_\alpha$ は $\tilde{U}_\alpha$ から $\tilde{V}_{i(\alpha)}$ への正則写像

(c) ρ_α は G_α から $H_{i(\alpha)}$ への群準同型

(d) $\tilde{f}_\alpha$ は群作用に関して同変的，すなわち $\tilde{f}_\alpha(gx) = (\rho_\alpha(g))\tilde{f}_\alpha(x)$, $x \in \tilde{U}_\alpha$, $g \in G_\alpha$

オービフォールド射 $\tilde{f}$ は，同変条件 (d) から，自然に底空間 X, Y の間の射 f を誘導することに注意しよう。

すべての G_α が自明群 $\{1\}$ なら $\tilde{X}$ は X と同一視できるので，オービフォールドの圏は通常の複素多様体の圏を充満部分圏として含んでいる。オービフォールドのもっともわかりやすい例は，**楕円曲線のモジュライ空間**である。

楕円曲線 E の局所普遍変形（倉西族）$\tilde{E} \to S$ は非特異パラメータ空間 S をもつ。S は局所的には $H^1(E, \Theta_E)$ と同一視される。E の自己同型群を $A_E \supset \{1, -1\}$ とすると，$G_E = A_E/(\pm 1)$ （(1), $\mathbb{Z}/(2)$, $\mathbb{Z}/(3)$ のいずれか）が S に忠実に作用し，その作用による商が J 関数の値から定まるアフィン直線 $\mathbb{C}$ （の開部分集合）である。この作用から自然なオービフォールド構造が定まって，この構造まで考えれば精密なモジュライ空間と解釈することができる。

正規交叉因子を成分とする $\mathbb{Q}$ 因子もまた，オービフォールド上の（整係数）因子と考えることができる。

オービフォールド $\tilde{X}$ の開集合とは X の開集合 W から定まるオービフォールド

$$\tilde{W} = (W, \{W \cap U_\alpha\}_{\alpha \in A},, \{\pi_\alpha^{-1}(W \cap U_\alpha)\}_{\alpha \in A}, \{G_\alpha\}_{\alpha \in A}, .\{\iota_\alpha\}_{\alpha \in A})$$

のことである。ただし $\pi\colon \tilde{U}_\alpha \to U_\alpha$ は ι_α が定める射影である。この位相を用いれば，オービフォールド上の層が群作用付き層として自然に定義でき（層 $\mathcal{F}$ の $\tilde{W}$ 上の切断は，$\tilde{U}_\alpha$ 上の G_α 不変切断をつなげたものである），コホモロジー群も通常の層コホモロジーと同様に決まる。

オービフォールド上では，通常の複素多様体と同様の解析理論を展開することができる。たとえば計量を用いた Stokes 定理，Chern 形式，調和解析などは問題なく使用できる。その結果として証明される小平消滅定理を，$\mathbb{Q}$ 因子に適用したものが川又－ Viehweg 消滅定理に他ならない。また Yau による Kähler-Einstein 計量の存在証明 [Y] もオービフォール

ドにそのまま使えて，コンパクトかつ非特異なオービフォールドの標準因子がアンプルまたは自明なら，商特異点をもつ場合でも Kähler-Einstein の存在が言えるし（たとえば特異 Kummer 曲面に対する Kähler-Einstein は被覆トーラスの平坦計量），極限操作によって開多様体にも一般化することができて，小林亮一の定理 [K] の別証明になっている。

このようにほとんどすべての複素多様体理論がそのままオービフォールドに使えるのであるが，Riemann-Roch だけは群の作用に依存した修正項が必要である。しかしこの修正項は有界であるため，アシンプトティックな Riemann-Roch には影響せず，Bogomolov 不等式はこの場合にも成立する。解析的にはもっと簡単で，Uhlenbeck-Yau による Einstein Hermitian 計量の存在証明 [UY] がそのまま使える。

5. Higgs 束

X を複素多様体，T_X を接束とする。**Higgs 層**とは $\mathrm{Sym}^{\bullet} T_X$-加群構造つき連接層のことである。もう少し具体的にいうと．Higgs 層 $\tilde{\mathcal{E}}$ とは連接層 $\mathcal{E}$ と層準同型 $\varphi : T_X \to \mathcal{E}nd(\mathcal{E})$ の組であって，任意の θ_1, θ_2 に対して可換性条件

$$\varphi(\theta_1) \circ \varphi(\theta_2) = \varphi(\theta_2) \circ \varphi(\theta_1)$$

が成立するものである（X が曲線の場合は，可換性条件が自動的に成り立っている）。$\mathcal{E}$ がベクトル束のときは通常 **Higgs 束**と呼ぶことが多い。

Higgs 層間の準同型とは，$\mathrm{Sym}^{\bullet} T_X$ 加群としての準同型，言い換えれば T_X の作用に関して同変な層準同型のことで，たとえば Higgs 層の Higgs 部分 s とは，T_X の作用について閉じている部分層である。

Higgs 束に対しても（半）安定性は定義できて，Harder-Narasimhan 定理が同様に成立する。しかし Mehta-Ramanathan は全然自明でない。

例 1　X を曲線とし，$\pi : Y \to X$ をスムーズな固有射とする。相対コホモロジー $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} R^1\pi_*\mathbb{C} = R^1\pi_*(\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ とおくと，自然な Hodge 完全列

$$0 \to \pi_*\Omega_{Y/X} \to \mathcal{F} \to R^1\pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \to 0$$

がある。$\mathcal{E} = \pi_*\Omega_{Y/X} \oplus R^1\pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \to 0$ とおく。小平-Spencer 写像 $\kappa : T_X \to$

$\mathcal{H}om(\pi_*\Omega_{Y/X}R^1\pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{Y}})$ を用いて， $\varphi\colon T_X \to \mathcal{E}nd(\mathcal{E})$ を行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば Higgs 束 $\tilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}, \varphi)$ が定まり，$R^1\pi_*\mathcal{O}_Y$ はその部分 Higgs 束となる。注意すべきことは．Higgs 束 $\tilde{\mathcal{E}}$ ともともとの VHS $\mathcal{F}$ とでは，**自然な部分束と商束の関係が反転している**，という事実である。

X がコンパクトである場合（たとえば種数 2 の曲線 X 上の小平曲面 Y），$\pi_*\Omega_{Y/X}$ は通常アンプル，$R^1\pi_*\mathcal{O}_Y$ はネガティヴである。この場合，$\mathcal{F}$ は不安定ベクトル束であるのに対し．$\tilde{\mathcal{E}}$ は安定である。

例 2　ω を大域的 1 形式，ε を $\mathcal{E}$ の自己準同型とする。$\varphi\colon T_X \to \mathcal{E}nd(\mathcal{E})$ を $\theta \to \omega(\theta)\varepsilon$ と定義すれば，Higgs 束 $(\mathcal{E}, \omega\varepsilon)$ ができる。ϵ が恒等写像 $id_{\mathcal{E}}$ の場合は．$(\mathcal{E}, \omega\varepsilon)$ の部分 Higgs 束とは通常の意味の部分束にすぎない。

例 3　対称積代数 $\mathrm{Sym}^{\bullet}T_X$ とそのイデアル J を考える。商 $\mathcal{E} = \mathrm{Sym^{\bullet}T_X/J}$ が有限階数ベクトル束になれば，自然な積によって T_X の作用を定義すれば Higgs 束が得られる。たとえば $\bigoplus_{k\le n}\mathrm{Sym}^k T_X$ は自然な Higgs 束構造をもつ。X の標準因子 K_X がアンプルの場合，$\bigoplus_{k\le n}\mathrm{Sym}^k T_X$ は Higgs 束として K_X-安定であることも証明できる。

コンパクト射影多様体 X 上の半安定 Higgs 束 $\tilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}, \varphi)$ に対しては，Simpson [S] によって Bogomolov 不等式

$$(r-1)c_1(\mathcal{E})^2 H_1 \cdots H_{n-2} \le 2rc_2(\mathcal{E})H_1 \cdots H_{n-2}$$

が，$\mathcal{E}$ に「よい Einstein 計量」を構成することによって示された（ただし $\mathcal{E}$ はベクトル束としては不安定であることが通常なので．この計量は Einstein Hermitian ではありえない)。K_X がアンプルである場合，この不等式を安定 Higgs 束 $\mathcal{O}_X \oplus T_X$ に適用すると**宮岡-Yau 不等式**

$$(\dim X)K_X^{\dim X} \le 2(\dim X + 1)c_2(X)K_X^{\dim X - 2}$$

が得られる。

実は Higgs 版の Bogomolov 不等式も，以下の方針で代数的に証明することができる。簡単のため X は曲面とし，$(\mathcal{E},\varphi)$ を Higgs 束とする。このとき次の定理が成立する。

定理 5.1　偏極曲面 (X,H) と $\mathcal{E}$ のみによって定まる有限次被覆 $\pi: Y \to X$ と，$\theta \in H^1(Y,T_Y)$，および $\Omega_Y \otimes \pi^*\mathrm{Sym}^n\mathcal{E}$ $(n=1,2,\dots)$ の変形であって $Y,\mathcal{E},\varphi,\theta$ から定まるベクトル束 $\tilde{\mathcal{E}}^{(n)}_{\theta\varphi}$ が存在して，以下は同値である。

(1) Higgs 束 $(\mathcal{E},\varphi)$ は H 半安定

(2) $\tilde{\mathcal{E}}^{(n)}_{\theta\varphi}$, $n=1,2,3,\dots$ は Y 上の半安定ベクトル束

(3) $\tilde{\mathcal{E}}^{(1)}_{\theta\varphi}$ は半安定ベクトル束

この系として

(a) 半安定 Higgs 束のテンソル積はふたたび半安定 Higgs 束（スロープが等しい $\mathcal{E}_i$ に対して $\mathrm{Sym}^2(\mathcal{E}_1\oplus\mathcal{E}_2)$ を考える）

(b) 半安定 Higgs 束に対して Bogomolov 不等式が成立する ($n\to\infty$ として $\tilde{\mathcal{E}}^{(n)}_{\theta\varphi}$ に Bogomolov 不等式を適用する）

ことがわかる。

さて証明のあらすじは以下の通りである。

まず φ はベキ零であると仮定してよく，$\mathcal{E}^i=\ker\varphi^i$ は $\mathcal{E}$ の自然なフィルター $\mathbf{F}$ を定義する。付随する逐次商層を $\bigoplus\mathcal{G}^i$ とおく。

適当に底空間 X を必要なら有限次被覆 Y におきかえて $H^1(Y,T_Y)\neq 0$ であるとする。$\theta=\{\theta_{ij}\}$ を $H^1(Y,T_Y)$ の元としたとき，$\Omega^1_Y\otimes\mathcal{E}|_{U_i\cap U_j}$ の自己同型 $\exp(\varphi\circ\theta_{ij})$ を

$$\omega\otimes e\mapsto\omega\otimes e+\sum_{k\geq 1}\frac{(\theta_{ij}\mathrm{Tr}\ \varphi)^{k-1}\omega(\theta_{ij})}{k!}\varphi(e)$$

で定義する。φ に関する可換性条件から，これはベクトル束の貼りあわせとなり，ベクトル束 $\mathcal{F}=(\Omega_Y\otimes\mathcal{E}\otimes)_{\theta\circ\varphi}$ を定める。φ をパラメータ t によって $t\varphi$ に置き換えると，$t\to 0$ の極限が $\Omega^1_Y\otimes\mathcal{E}$ である。同様にして $\mathcal{F}^{(n)}$ を $\Omega^1_Y\otimes\mathrm{Sym}^n\mathcal{E}$ の変形として構成できる。$\mathcal{E}$ のフィルター $\mathbf{F}$ は自然

に $\mathcal{F}^{n)}$ のフィルターを定義し付随する逐次商は変形によらず $\Omega_Y \otimes \pi^*\mathcal{G}^i$ である。

もとの $\mathcal{E}$ が Higgs 束として不安定ならば，$\mathcal{F}^{(n)}$ がベクトル束として不安定であることは構成からすぐわかる。問題はその逆である。

鍵となるのは，Y, θ をうまくとっておいたとき，

(*) $\mathcal{F}$ が不安定だとすると，その極大不安定化部分束 $\mathcal{S}$ の逐次商は $\bigoplus \Omega_Y \otimes \pi^*\mathcal{S}_i$, $\mathcal{S}^i \subset \mathcal{G}^i$ の形になる ($\mathcal{F}^{(n)}$ についても同様)

という考察であって，これがわかれば $\mathcal{S}^i$ が実は $\mathcal{E}$ の部分 Higgs 束から誘導されることを示すのは比較的易しい。

性質 (*) は，Ω_Y がきわめて安定である一方で，π の分岐因子 R に制限すると非常に不安定である，という余接束の微妙な性質に本質的に依存している。したがってでたらめなベクトル束 $\mathcal{A}$ をもってくると，$\mathrm{Sym}^{\cdot}\mathcal{A}$-加群が半安定であっても，Bogomolov 不等式は一般に成立しない。たとえば $\mathcal{A} = \mathcal{O}(-H)^{\oplus 2}, \mathcal{E} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{A}$ とおいて，$(a, b) \in \mathcal{A}$ の $(\varepsilon, (\alpha, \beta)) \in \mathcal{E}$ への作用を $(0, (\varepsilon a, \varepsilon b))$ で定義すれば，$\mathcal{E}$ は安定 $\mathcal{A}$-加群であるのに Bogomolov 不等式をみたさない。

文献

[B] F. Bogomolov. *Holomorphic tensors and vector bundles on projective manifolds.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math. **42** (1978), 1227 – 1287.

[HN] G. Harder ; M.S. Narasimhan. *On the cohomology groups of moduli sapces of vector bundles on curves.* Math. Ann. **212** (1974), 215 – 248

[K] R. Kobayashi. *Einstein-Kähler V-metrics on open Satake V-surfaces with isolated singularities*, Tohoku Math. J. (2), **37** (1985), 43 –77.

[MR] V.B. Mehta ; A. Ramanathan. *Semistable sheaves on projective varietyies and their restriction to curves*, Math. Ann. **258** (1982), 213 – 224.

[M] Y. Miyaoka. *The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety.* Adv. Stud. Pure Math. **10** (1987), 449 – 476.

[R] I. Reider, *Vector bundles of rank 2 and linear systems of algebraic surfaces.* Ann. of Math. (2) **127** (1988), 309 – 316.

[S] C. Simpson. *Higgs bundles and local systems.* Publ. Math. I.H.E.S. **75** (1992), 5 – 95.

[UY] K. Uhlenbeck, S.-T. Yau. *On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles.* Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), Supplement. S257 – S293.

[Y] S.T. Yau. *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I.* Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 339 – 411.