頂点作用素代数のオービフォルド理論

宮本雅彦 (筑波大学数理物質科学研究科数学専攻)

代数学シンポジウム（北海道大学 2010.8.12)

1　初めに

今回の話は，最近の結果
(1) 有限自己同型群による軌道予想が C_2-有限の仮定の下で証明できた.
(2) C_2-有限の仮定の下で軌道構成が完成した.
(3) プロジェクト７１が現実味を帯びてきた.
（ニイマイヤ格子と自己同型による固定点の格子，そのテータ級数の話に帰着する.）
という話と共に VOA の研究が面白い時代に入ったということの紹介することである.

頂点作用素代数 (VOA) というのは $\mathbb{N}$-次数付きベクトル空間

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \qquad (\dim V_n < \infty)$$

で，幾つかの自然な性質を満たす (両線形な) 無限個の積 ($n \in \mathbb{Z}$)

$$v *_n u \in V \qquad \forall v, u \in V$$

を持つ代数である.

1.1　なぜ，頂点作用素代数を研究するのか？

[1] Edward Witten は２１世紀の数学の主要なテーマは物理の量子場理論の数学的な取り扱いだと述べているが，これを（２次元が主であるが,）代数的に翻訳したのが，Borcherds が導入した頂点代数 [86] である．このうち，無限次元の対称性を持つものが２次元共形場理論 CFT で，その代数的取り扱いが頂点作用素代数 (VOA) である.
[2] Monster 単純群など，全く量子場理論と関係ないと思われるものと深く結びついている（Moonshine 予想に対する現在での唯一の手法だと思われる）
[3] （個人的な希望）有限群や代数的組み合わせ論の舞台として使いたい.

1.2　手法：頂点作用素からなる代数が頂点作用素代数

対象が量子場理論なので，無限次元空間を当然として扱う.
e.g. 内積 $\langle *, * \rangle$ を持つ 1-次元ベクトル空間 $\mathbb{C}v$ から，無限次元リー代数

$$\mathcal{H} := (\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}vt^n) \oplus \mathbb{C} \qquad \text{リー積} \quad [vt^n, vt^m] = \delta_{n+m,0}n\langle v, v\rangle$$

が構成できる．この (ハイゼンベルグ代数) は" 1 つの元" v で生成されているので，たった一つの元 (**形式的ベキ級数**)

$$v(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} vt^n z^{-n-1} \quad (\text{関係式} \quad [v(z), v(x)] = \frac{d}{dx}(\sum_{m\in\mathbb{Z}}(x/z)^m)z \quad)$$

で表示するのが VOA の態度である． (上の様なものを頂点作用素として定義)

$$u \in V \leftrightarrow Y(u,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(u*_n)z^{-n-1} \in \mathrm{End}(V)[[z,z^{-1}]]$$

場の理論の因果律 $\xrightarrow{\text{翻訳}}$ 局所可換 $^\exists N$ s.t $(z_1-z_2)^N[Y(u,z_1),Y(v,z_2)]=0$
エネルギーゼロは真空のみ $\xrightarrow{\text{翻訳}}$ 特別な元 $^\exists\mathbf{1}$ s.t. $V_0=\mathbb{C}\mathbf{1}$ (CFT 型).

頂点作用素代数の最近までの研究には 2 つの流れがある．

個別 VOA の研究	VOAs に対する一般論の研究
(2-次元共形場理論 (CFT) の研究) **個別の VOA の興味ある性質を見つける.** Affine Lie CFT の研究 [土屋-蟹江 88,..] Moonshine VOA の研究 [Frenkel-Lepowsky-Meurman88,M] W-代数の研究 [.., 荒川] Frame VOAs の研究 [M,Lam, 山内, 島倉] 格子 VOA の $\mathbb{Z}_2$ 軌道モデル [Dong-永友 99, 安部,..] etc. [田辺, 山田, 松尾, 佐久間,..] 主目的は，VOA の構成，加群の分類 （単純加群を決定し，その拡大を調べる). (多くの場合) 加群はすべて完全可約であることを示す	トレイス関数の $SL_2(\mathbb{Z})$-不変性 [Zhu96] 軌道模型の $SL_2(\mathbb{Z})$-不変性 [Dong-Li-Mason00] フェアリンデ公式 [Huang08],[Moose-Seiberg89] ここでは，常に C_2-有限性と**すべての加群の完全可約性**を仮定している．言い換えると左のコラムの最終目的を仮定している．これでは，一般論を個別の問題に応用できない． Zhu 代数を除いて，左のコラムに使える一般論がない (VOA が少し複雑だとこの代数の計算も難しい)

2　オービフォルド理論 (軌道理論)

●加群が完全可約である頂点作用素代数を見つけることが重要であり，
●その候補を構成する一つの方法が軌道理論である．
軌道理論とは？　（ムーンシャイン VOA の構成が出発点）
[Dixon,Harvey,Vafa,Witten 1986 年頃] 既知の VOA V と，$G < \mathrm{Aut}(V)$ 有限位数に対し，固定点の集合 V^G の表現論を調べること．例えば，V-加群が完全可約なら，V^G-加群も完全可約か?(**オービフォルド予想**)　広い予想もあるが，V^G の表現が判れば，難しくない．

[既知の結果]

● もともと V^G （またはその部分 VOA) の表現が判っていた場合.

● それ以外は非常に少ない：一例は $|G|=2$ の時，格子 VOA V_L で自己同型が L に -1 倍として作用しているもの．(G. Yamskulna [2009]) Dong-永友の素晴らしい結果 [99] に依存しており，$|G|=2$ 以外では [Dong-永友] の結果は期待できない.

3 有限性条件の必要性

私の研究の原則:**加群の研究に使う一般論には『すべての加群』という仮定を入れない**

VOA の公理は長いが，CFT の置き換えに過ぎず，強い条件はない

例えば，ファイマン図

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ & \downarrow & \\ B & \longrightarrow & C \end{array}$$

に対応するものとして，C の制限双対加群 C' と $C'\times C$ 上の内積 $\langle *,*\rangle$ を使って，$a\in A$, $b\in B$, $c'\in C'$ に対し，超関数 $\mathcal{Y}(a,z)$ が存在して，

$$\langle\ c', \mathcal{Y}(a,z)b\ \rangle$$

が適切な関数 (この時 $\mathcal{Y}$ を交絡作用素と呼ぶ) となるものを考える．全射な交絡作用素を持つ C の同型類の中で、最大のものがある時，それを $A\boxtimes_V B$ で表し，**フュージョン積**と呼ぶ．残念ながら，存在の為には一般にはある種の有限条件が必要であり、条件がないと $\mathcal{Y}(a,z)$ も何ものかも不明になってしまう.（C_2-有限 $\Rightarrow$ log 付き形式的 $\mathbb{Q}$-べき級数 $\mathcal{Y}(a,z)=\sum_{i=0}^{k}\sum_{n\in\mathbb{Q}}a_{n,i}z^{-n-1}\log^i z$）

3.1 C_2-有限条件

(1) 表現を調べるこれまでの方法：既約加群を分類する: 通常は Zhu 代数 $A(V)=V/\langle v_{-2}u+\mathrm{wt}(v)v_{-1}u+\cdots \mid v,u\in V\rangle_{\mathbb{C}}$ の**代数構造を決める**.

理由は：$A(V)$ の既約加群 $\Leftrightarrow$ V の $\mathbb{N}$-次数付き既約加群 (1 : 1 いうのが Zhu 理論)

(2) C_2-(余) 有限: $V/\langle v_{-2}u \mid v,u\in V\rangle_{\mathbb{C}}$ が有限次元 (ここで使う条件)

これまでの結果 (C_2-**有限の利点**)　　有限生成加群の範囲で,

● [M] C_2-余有限性は自然な条件 ($\Leftrightarrow A(V)$ で全く扱えない加群の非存在)

物理に出てくる加群は $\mathbb{N}$-次数付き．加群の定義に $\mathbb{N}$-次数が付ける研究者も多い (代数的でない)．加群が必ず $\mathbb{N}$-次数を持つ条件を考える方が自然 (これが C_2-余有限と同値).

● [M1] 各既約加群 W に対して，その射影被覆 $P(W)$ が存在する.

● [M1] V-加群 W,U に対してテンソル積（フュージョン積）$W\boxtimes U$ がある種の最大元として定義できる.（実際に構成しなくても良いのがミソ）.

● [M1] SemiRigidity が成り立てば $\boxtimes$ 積は完全系列を保つ.

● [M1] 同じ条件で，$P(W)$ は $P(V)\boxtimes W$ の直和因子である.

($V\boxtimes W=W$ なので，$V=P(V)$ なら，すべての加群は完全可約)

3.2 モジュラー不変性

既約加群 $U=\oplus_{n=0}^{\infty}U_{r+n}$ $(U_m$:Hamiltonian $L(0)$ による固有空間分解) に対して，U の指標 (斉次空間の次元の母関数)

$$\mathrm{ch_U}(\tau):=\sum_{n=0}^{\infty}(\dim U_{r+n})q^{(r+n-c/24)} \qquad \text{ただし，} q=e^{2\pi i\tau}$$

と次の S-変換考える．

$$S(\mathrm{ch}_U):=\mathrm{ch}_U(-1/\tau)$$

Zhu 理論： $v\in V$ の次数を保つ作用 $o(v)$ を使ってトレイス関数

$$\Psi_U(v,\tau):=\mathrm{Tr}_U(\ o(v)\ q^{(L(0)-c/24)})$$

を考え，C_2**-有限＋すべての加群は完全可約**との条件の下で，一般論『$S(\Psi_U)$ は Ψ_W 達の線形和』を示した．この理論は，完全可約でない場合にも拡張され [M]，C_2**-有限だけ**で『 $S(\Psi_U)$ はトレイス関数と擬トレイス関数の線形和』となる．

4 主結果

定理 1 V が 単純 C_2-有限 *VOA* であり，
(A) $\mathrm{Hom}_V(V'\boxtimes U,V)\neq 0$ となる加群 U があり，*(*非常に弱い仮定*)*
(B) $S(\Psi_V)$ が既約加群のトレイス関数の線形和と仮定する．この時，
(1) V は *Semirigid* であり、特にフュージョン積はフラットである．即ち，
完全系列 $0\to A\xrightarrow{\phi}B\xrightarrow{\psi}C\to 0$ があれば，

$$0\to W\boxtimes A\xrightarrow{1_W\boxtimes\phi}W\boxtimes B\xrightarrow{1_W\boxtimes\psi}W\boxtimes C\to 0$$

も完全となる.（利点：表現論が自然）
(2) $S(\Psi_V)$ の中にすべての既約加群のトレイス関数が現れる．
*(*利点：既約加群の決定に使える．*)*
(3) V が射影的なら V-加群がすべて完全可約である．
*(*利点：すべての加群の完全可約性を示すのに V だけ見れば *O.K.*

双対 $\mathrm{Hom}(V,\mathbb{C})$ は大きすぎるので、制限双対 $V'=\oplus\mathrm{Hom}(V_n,\mathbb{C})$ を考える。

5 軌道理論への応用

主定理の (B) は強い条件であるが、軌道理論では成り立つ．

定理 2 V を単純 *VOA* で $V'\cong V$，且つ V-加群はすべて完全可約とする．$G\leq\mathrm{Aut}(V)$ を有限自己同型群とする．この時，G による固定点全体 V^G も *VOA* となるが，もし，V^G が C_2-有限なら，$S(\Psi_{V^G})$ は V^G-既約加群のトレイス関数の線形和となる．それゆえ、V^G-加群もすべて完全可約であり，すべての既約 V^G-加群はある $\sigma\in G$ の V の σ-ツイスト加群の V^G-部分加群として現れる．

C_2-余有限性の証明が本質的に難しければ意味がないが,
● V の C_2-余有限性の証明には大きな advantage がある.
e.g. Virasoro 元 ω を含む部分 VOA $W \subseteq V$ が C_2-余有限なら, V も O.K.
それゆえ, C_2-余有限性の証明が出来る例が膨大にある.

証明の一部の紹介 巡回群 $\langle g \rangle$ に対して, $S(\Psi_{V^g})$ が V^g-加群の trace 関数の線形和なら, 任意の有限群 G に対して $S(\Psi_{V^G})$ も V^G-加群の trace 関数の線形和となる証明を紹介する.
$\mathrm{Irr}(G)$ を既約 G-指標の集合, M_χ ($\chi \in \mathrm{Irr}(G)$) を既約加群とする. この時, $G \times V^G$-加群として V を分解 [DM],

$$V = \oplus_{\chi \in Irr(G)} M_\chi \otimes V^\chi \qquad V^\chi \text{ は } V^G\text{-加群}$$

すると, $g \in G$, $v \in V^G$ に対する V 上の gv のトレイス関数は,

$$\Psi_V(gv) = \sum_\chi \mathrm{Tr}_{M_\chi \otimes V^\chi} go(v) q^{L(0)-c/24} = \sum_\chi \chi(g) \Psi_{V^\chi}(v)$$

それゆえ,

$$S(\Psi_V(vg)) = \sum_\chi \chi(g) S(\Psi_{V^\chi}(v))$$

となる. 左辺は, 仮定より V^g-加群の trace 関数の線形和であり, 特に, 任意の $g \in G$ に対して V^G-加群の trace 関数の線形和となる. 故に, $\sum_{g \in G}$ 右辺$=|G|S(\Psi_{V^G}(v))$ も V^G-加群の trace 関数の線形和となっている.

6 格子頂点作用素代数

正定値偶格子 L から格子 VOA V_L が構成できることが知られている. その次数空間としての構造は, $a \in L$ を係数とする単項式 at^m を変数とする多項式全体 $\mathbb{C}[L[t]]$ とアーベル群 L の群環 $\mathbb{C}L$ のテンソル積

$$V_L = \mathbb{C}[L[t]] \otimes \mathbb{C}L$$

と同型であり, $f(t) \otimes e^\lambda$ の次数は $\deg(f(t)) + \frac{\langle \lambda, \lambda \rangle}{2}$ で与えられる. ここで $\mathbb{C}L = \oplus_{\alpha \in L} \mathbb{C}e^\alpha$
(この VOA の表現は非常に簡単で, 加群はすべて完全可約であり, 既約加群の集合は $\{V_{L+v} \mid v \in L^*/L\}$ (L^* は双対) で与えられる.)
$V_L = \oplus_{m=0}^\infty (V_L)_m$ とウエイト分解すると, 次元に関するトレイス関数 (指標)

$$\mathrm{ch}_V(\tau) = q^{-rank(L)/24} \sum_m \dim((V_L)_m) q^m = \frac{\Theta_L(\tau)}{\eta(\tau)^{\mathrm{rank}(L)}}$$

は良く研究されている. (加群も同じ形)

定理 3 *σ を位数 3 の L の自己同型とする. この時, 固定元の空間 VOA $(V_L)^\sigma$ は C_2-余有限となる. 故に, V_L^σ-加群は完全可約で, 既約加群は (ツイスト) 加群の構成要素.*

7　プロジェクト 71

VOA の代表例であるムーンシャイン VOA $V^\natural$ は中心電荷 24 であり，既約加群をただ一つ持つ．このような V は指標

$$\mathrm{ch}_V(\tau) := q^{-24/24}\sum(\dim V_n)q^n \qquad (q = e^{2\pi i\tau})$$

がモジュラー関数 $J(\tau)+m = q^{-1}+m+196884q+\cdots$ となる．ここで，$\dim V_1 = m$ であり，V_1 はリー代数となっている．Schellekens がリー代数 V_1 の構造から 1992 年に以下の既知の４０個を含めて 71 個の可能性を指摘した．
(1) ニイマイヤ格子 (24 個）から出来る格子頂点作用素代数 (24 個)
(2) 自己同型 -1 倍による $\mathbb{Z}_2$-オービフォルド構成 (24 個中 14 個が新規)
(3) Schellekens が構成した２タイプ
その後，Montague が $\mathbb{Z}_2$-,$\mathbb{Z}_3$-軌道構成の一般論が出来れば，すべて見つかるだろうと述べたが、それ以降 20 年近く全く進展していない．(最近，Framed VOA で [Lam]10 個，[Sakuma]8 個発見の報告あり．これらは $\mathbb{Z}_2$-軌道に対応する．)

「71 個すべて構成しよう (残り１３個)」

というのが，プロジェクト 71 である．
先の結果より，格子 VOA に対する $\mathbb{Z}_3$-軌道理論が完成したので応用例を紹介する．
(例 1) MoonshineVOA のリーチ格子 VOA V_Λ からの $\mathbb{Z}_3$-軌道構成
●応用： Borcherds が存在を仮定した整数環上の MoonshineVOA が構成できる．
(例 2) Schellekens の表の 32 番目 (New) の構成

$\mathbb{Z}_3$-軌道構成の概略を述べる．格子 L と $\sigma\in\mathrm{Aut}(L)$ を選ぶ．先の結果より次の事は判る．
(1) V_L^σ-加群は完全可約
(2) 既約 V_L^σ-加群はツイスト加群の構成因子
そこで，V_L^σ-加群で適切なもの（整数ウエイトのもの）を張り合わせ，新しい頂点作用素代数を構成する．(軌道理論の場合、張り合わせが自然に VOA になる事が多い)．

V_L をランク c の正定値正則格子 VOA． $\sigma\in\mathrm{Aut}(L)$ 位数 3, 固定点 $H=L^\sigma$ とする．固有空間の次元 $s=\mathrm{rank}(H)$, $t=\dim\{v\in L \mid \sigma(v)=e^{\pm 2\pi i/3}v\}$, $c=s+2t$ と置くと，

$$\begin{aligned} T_{V_L}(\sigma,\mathbf{1};\tau) = &\ \mathrm{Tr}_{V_L}\ \sigma q^{L(0)-c/24} = \textstyle\sum_m \mathrm{Tr}_{V_m}\sigma e^{2\pi i m\tau}e^{-\frac{c}{24}\pi i\tau} \\ = &\ \mathrm{ch}_{V_H}(\tau)\tfrac{\eta(\tau)^t}{\eta(3\tau)^t} = \frac{\Theta_H(\tau)}{\eta(\tau)^s}\times\frac{\eta(\tau)^t}{\eta(3\tau)^t} \end{aligned}$$

となることが判る．ここで，$\Theta_H(\tau)=\sum_{v\in H}e^{\pi i<v,v>\tau}$ は格子のテータ級数
$\eta(\tau)=q^{1/24}\prod_{n=1}^\infty(1-q^n)$ は Dedekind のエータ関数である．

Dong-Li-Mason の結果のから，

$$T_{V_L}(\sigma,\mathbf{1};-1/\tau)$$

が σ-ツイスト加群 (一意的) の指標のスカラー倍である．そうすると，

$$T_{V_L}(\sigma,\mathbf{1};-1/\tau) = \frac{\Theta_{V_H}(-1/\tau)}{\eta(-1/\tau)^s}\times\frac{\eta(-1/\tau)^t}{\eta(-3/\tau)^t}$$

がツイスト加群の指標 (スカラー倍) だが，Θ-関数や Dedekind のエータ関数の変換式をそれなりにわかっているので，エータ級数 $q^{-/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ の保形性 $\eta(-1/\tau)=\sqrt{-i\tau}\eta(\tau)$ を代入すると，次を得る．

$$T_{V_L}(\sigma,\mathbf{1};-1/\tau)=q^{-c/24}q^{t/9}\frac{\Theta_{V_H}(-1/\tau)}{\prod(1-q^n)}\times\frac{\prod(1-q^n)}{\prod(1-q^{n/3})}$$

故に，

● $3|t$ なら σ,σ^2-ツイスト加群にそれぞれ整数ウエイトのパーツ W^1, W^2 があり，Verlinde 公式『S-変換の係数が判ると，加群の積の関係（フュージョン係数）も求まる』より

$$\widetilde{V}_L=V_L^{\sigma}+W^1+W^2$$

は VOA の構造を持つことが分かる．(これが $\mathbb{Z}_3$-軌道構成)

● σ: L に固定点を持たないなら，$t=12$, $q^{t/9}=q^{4/3}\Rightarrow(W^i)_1=0$ となる．
e.g. L がリーチ格子 Λ なら，$\widetilde{V_\Lambda}\cong V^\natural$ ($V^\natural$ の $\mathbb{Z}_3$-軌道構成)．また，$\widetilde{V}_{A_2^{12}}\cong V_\Lambda$ である．

● 固定点を持つ ($H\neq 0$) 時, $\Theta_H(\tau)$, $\Theta_H(-1/\tau)$ を求めると，$\widetilde{V}_L$ の構造がわかる．Θ_H は一般に次の式を使って表示されるが,

$$\theta_2(\tau)=\sum q^{(m+1/2)^2},\quad \theta_3(\tau)=\sum q^{(m^2)},\quad \theta_4(\tau)=\sum(-q)^{(m^2)}$$

$$\begin{aligned}\phi_0(\tau)&=\theta_2(2\tau)\theta_2(6\tau)+\theta_3(2\tau)\theta_3(6\tau)\\ \phi_1(\tau)&=\theta_2(2\tau)\theta_3(6\tau)+\theta_3(2\tau)\theta_2(6\tau)\end{aligned}$$

これらの $-1/\tau$ は判っている．

7.1 Schellekens' のリスト 32(A new VOA)

N: タイプ E_6^4 のニイマイヤ格子
$\sigma\in\mathrm{Aut}(N)$：最初の E_6 に固定点無しに作用し，残りの 3 つの E_6 を巡回置換するもの．
これは固定点がある例であるが，$t=9$ なので条件 $3|t$ を満たす.
ウエイト 1 の空間 $(\tilde{V}_N)_1$ の次元を見るために $q^{6/24}\frac{\Theta_H(-1/\tau)}{\eta(-1/\tau)^6}$ の定数項を求めると，

$$\Theta_H(\tau)=\frac{1}{3}[\phi_0(\tau)^3+\frac{1}{4}\{3\phi_0(3\tau)-\phi_0(\tau)\}^3],$$

である．ここで $\phi_0(\tau)=\theta_2(2\tau)\theta_2(6\tau)+\theta_3(2\tau)\theta_3(6\tau)$, $\theta_2(\tau)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}q^{(m+1/2)^2}$ かつ $\theta_3(\tau)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}q^{m^2}$ である．$\phi_0(-1/\tau)=\frac{\tau}{i\sqrt{3}}\phi_0(\tau/3)$ を適用すると

$$\frac{\Theta_H(-1/\tau)}{\eta(-1/\tau)^6}=\frac{1}{9\sqrt{3}}q^{-1/4}+\cdots$$

であり，$\dim(\tilde{V}_N)_1=(6\times 12)/3+6+6\times 12+2\times\{3^{9/2}3^{-5/2}\}=120$ を得る．
リー代数として $(\tilde{V}_N)_1$ は $A_2^3E_{6,3}$ を含んでいるので，Schellekens[1993] のリストの No32 に対応している．