フック構造をもつゲーム

川中　宣明　(関西学院大学・理工学部)

1　ゲーム

本稿では次の枠組みに含まれるものを「ゲーム」と呼ぶことにする.

定義 1 P を集合, 2^P を P の部分集合全体とする. P と写像 $\varphi\colon P \longrightarrow 2^P$ の対 (P, φ) が次の 2 条件を満たすとき, (P, φ) は **ゲーム**であるという.

（条件 1）P の元 p_i の列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ で $p_{i+1} \in \varphi(p_i)\,(i = 0, 1, 2, \ldots)$ を満たすものは必ず有限列である.（つまり, このような $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ をどのように選んでいったとしても, いつかは $\varphi(p_k) = \emptyset$ となる p_k が出現する.）

（条件 2）P の任意の元 p に対し, $\varphi(p)$ は有限集合である.

注意 1 ここで「ゲーム」と呼んでいる概念は P を命題の集合とし, 写像 φ を「命題 p の証明が命題群 $\varphi(p)$ の証明に帰着される」ようにとると, reduction による証明プロセスも含んでいる.（もちろん reduction による計算アルゴリズムや, 新しい概念を既出のいくつかの概念を用いて定義していくプロセスなども含む.）このとき（条件１）は帰着の連鎖が永遠には続かず, 出発点となる基本命題（：1 個とは限らない）に有限ステップで到着することを言っている. このような reduction のシステムの典型として数学的帰納法を考えると（条件２）を仮定するのは自然に見えるが,（超限順序数を基礎とした）超限帰納法を考えるなら（条件２）はむしろ不適切であり, 実際, 不必要であることがわかる. 本稿では記述を簡単にするために（条件 2）もつけておく.

集合 P の元はゲームの**局面**を表し, 写像 φ はゲームの**ルール**を表す. 局面 $p \in P$ の次の局面としてルール上許されている局面全体の集合が p の **次局面集合** $\varphi(p)$ である. $\varphi(p) = \emptyset$ のとき p は**終局面**であるという.
1 人のプレイヤーがある局面（始局面）p_0 から出発して $p_1 \in \varphi(p_0)$, $p_2 \in \varphi(p_1), \ldots$ とルール φ に従って, 次々に局面を選んでいくと, 定義 1 の (条件 1）により, ある n に対して p_n は終局面になる. 終局面に到達すると, ゲームは終了すると考える. これを **1 人ゲーム**という. 任意の $p \in P$ に対し, p の次局面集合 $\varphi(p)$ に確率測度を決めておき, その確率測度に従って局面の選択を行うような 1 人ゲームを**確率的 1 人ゲーム**という.

2 人のプレイヤーの一方が先手, 他方が後手となり, 始局面 p_0 から出発して, まず先手が $p_1 \in \varphi(p_0)$ を選び, 続いて後手が $p_2 \in \varphi(p_1)$ を選び... と 2 人が交互に局面を選んでいって, どちらかが終局面 p_n に到達するとき次の「手番」のプレイヤー（n が偶数のときは先手, 奇数のときは後手）はゲームを続行できなくなる．ゲーム続行不可能な状況に追い込まれたこのプレイヤーのことを**敗者**と呼び, 他方のプレイヤーのことを**勝者**と呼ぶ．これが **2 人ゲーム**の観点である．

（確率的）1 人ゲームと 2 人ゲームは同一の数学的構造 (P, φ) の互いに補完的な 2 つの観点（研究方針）である．[3] においては主として（確率的）1 人ゲーム（そこでは有限アルゴリズムと呼んでいるが）について論じたので, 本稿では 2 人ゲームに限定して論じることにする．2 人ゲームについての文献としては [1] がある．

(P, φ), (Q, ψ) を 2 つのゲームとする．1 対 1 かつ上への写像 $f\colon P \longrightarrow Q$ が

$$f(\varphi(p)) = \psi(f(p)), \quad p \in P$$

を満たすとき f はゲームの**同型写像**であるといい $(P, \varphi) \cong (Q, \psi)$ とかく．

2 つのゲーム (P, φ) と (Q, ψ) の**和** $(P + Q, \varphi + \psi)$ とは, 次で定義されるゲームのことである．

$$P + Q = \{(p, q) \mid p \in P,\ q \in Q\},$$

$$(\varphi + \psi)(p, q) = \{(p', q) \mid p' \in \varphi(p)\} \cup \{(p, q') \mid q' \in \psi(q)\},\ p \in P,\ q \in Q.$$

つまりゲーム $P + Q$ においては, 自分の「手番」のとき P と Q という 2 つのゲームのどちらか一方を選んでプレイし, 次の「手番」では先ほどと同じゲームを選んでも違う方を選んでもよい．（しかし, 両方同時にプレイすることはできない．）

(P, φ) をゲームとし, $\mathbb{N}$ を 0 以上の整数の集合とする．関数 $v_{(P,\varphi)}\colon P \longrightarrow \mathbb{N}$ を

$$v_{(P,\varphi)}(p) = \min\{v_{(P,\varphi)}(p') \mid p' \in \varphi(p)\}, \quad p \in P$$

で帰納的に定義する．（とくに p が終局面のとき $v_{(P,\varphi)}(p) = 0$ となる．）$v_{(P,\varphi)}$ を (P, φ) の **Sprague-Grundy 関数**といい, その値 $v_{(P,\varphi)}(p)$ を局面 p の **Sprague-Grundy 値**という．次の結果はよく知られている．(例えば [1].)

定理 1 (R.P. Sprague, P.M. Grundy) (P, φ), (Q, ψ) を 2 つのゲームとする．
(i) $p \in P$ を始局面とする 2 人ゲームに後手の必勝戦略が存在するための必要十分条件は $v_{(P,\varphi)}(p) = 0$ である．また, そうでない場合は先手の必勝戦略が存在する．

(ii) $(P+Q, \varphi+\psi)$ の Sprague-Grundy 関数 $v_{P+Q} = v_{(P+Q,\varphi+\psi)}$ は

$$v_{P+Q}(p,q) = v_{(P,\varphi)}(p) \oplus v_{(Q,\psi)}(q), \quad (p,q) \in P+Q$$

で与えられる. ただし, $\oplus$ は次に定義する Nim 和である.

定義 2 $a, b, c \in \mathbb{N}$ の 2 進展開

$$a = a_0 + 2a_1 + \cdots + 2^n a_n, b = b_0 + 2b_1 + \cdots + 2^n b_n, c = c_0 + 2c_1 + \cdots + 2^n c_n$$

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1 \ldots, b_n, c_0, c_1, \ldots, c_n \in \{0,1\}$$

について $a_i + b_i \equiv c_i \mod 2$ $(0 \le i \le n)$ が成り立つとき $a \oplus b = c$ とかく. この演算 $\oplus$ を **Nim 和**といい, 情報科学で常用されている排他的論理和と同じものである. Nim 和に関して $\mathbb{N}$ は加群になる.

定理 1 の系 写像 $\alpha\colon \mathbb{N} \longrightarrow 2^{\mathbb{N}}$ を

$$\alpha(k) = \{x \in \mathbb{N} \mid x < k\}, \qquad k \in \mathbb{N}$$

によって定義する. ゲーム $(\mathbb{N}, \alpha)$ を n 個加えて得られるゲーム $\mathbb{N}+\mathbb{N}+\cdots+\mathbb{N}$ の Sprague-Grundy 関数 v は

$$v(k_1, k_2, \ldots, k_n) = k_1 \oplus k_2 \oplus \cdots \oplus k_n, \quad k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$$

で与えられる.

定理 1 から分かるように, 2 人ゲーム (P, φ) においては局面 $p \in P$ の Sprague-Grundy 値 $v_{(P,\varphi)}(p)$ の計算が基本的な問題である. ところが, $v_{(P,\varphi)}$ の帰納的な定義に従って $v_{(P,\varphi)}(p)$ の値を計算するためにはゲームの推移を終局面までずっと追っていかなければならず, これは少し大きな殆どのゲームでは計算の複雑性のため実行不可能になる. 定理 1 の系で考えたゲーム $\mathbb{N}+\mathbb{N}+\cdots+\mathbb{N}$ は **Nim**（または n **山ゲーム**）の名で知られている. Nim や Nim に帰着できるゲーム（その Sprague-Grundy 関数の形から「線形ゲーム」と呼びたい）以外のもので Sprague-Grundy 関数を実際に計算できるゲーム（：そのようなクラスを**非線形可解ゲーム**と呼びたい）は極めて希少である. 後で述べる佐藤-Welter ゲームは非線形可解ゲームの貴重な例を与える.（下の定理 2 を参照. ）

2　ヤング図形とフック

対称群 S_n の標数 0 の体上の既約表現の同値類は箱の数が n 個のヤング図形と 1-1 に対応することは 1900 年前後の G. Frobenius や A. Young の仕事

以来、よく知られている．余談であるが, ヤング図形, ヤング盤が本当の意味で広く知られるようになったのは, これよりずっと後のことで H. Weyl がその著書「群論と量子力学（第２版）」(1931 年）の中で Young の研究を紹介したことがきっかけらしく, Young の弟子 G. de Robinson が回想しているように, Weyl の本が出版されると “suddenly he (= Young) was famous” というのが真相のようだ．

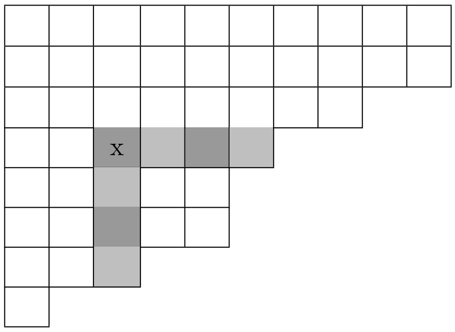
Y＝ 

図１：ヤング図形 Y とそのフック H_x

中山正は 1940-41 年の論文 [7] において, 対称群の表現を mod p で考えるという問題をとりあげた．何かを mod p で考えるということは, その何かを「p で割った余り」に着目するということであるから, もしも

標数 0 の体上での対称群の既約表現 (の同値類) ≒ Young 図形

という擬似等式を前提とするならば, 標数 0 の体上での対称群の既約表現を mod p で考える場合には

（Young 図形 $\div\, p$）の余り

という概念が必要になるように思われる．以上は中山論文 [7] を読んだ筆者（川中）の後知恵に過ぎないが, [7] では実際に任意の自然数 m に対して

（Young 図形 $\div\, m$）の余り

に相当する概念を提示している．そのとき必要になったのがフックであって, 今では常識となっているヤング図形のフックという用語と概念は [7] で導入されたものである．（この事実は十分には知られていないようなので, 敢えて強調しておく．）図１のヤング図形において, x 印をつけた箱の**フック** H_x とは, 箱 x 以東または以南に位置する箱全体からなる（灰色で表示した Γ の字型の）部分ヤング図形である．帽子などをかけるフックに似ているから、ということが命名の由来であろう．箱の数が n 個のヤング図形には n 個の異なるフックがあることになる．
元のヤング図形から**フックを引く**とは, フックを除いて, その結果, 離れ島が

できるときには, その離れ島を左上に詰めることにより新しいヤング図形を得ることを意味する．（離れ島ができないときには, 単にフックを除くだけでよい．）図１の Y からフック H_x を引いた結果 $Y - H_x$ が図２である．（この場合にはフック H_x を除くだけでは田の字型の小ヤング図形が離れ小島となってしまうので, この小島を左上の大陸方向に移動させて, 全体がひとつのヤング図形になるように修復しておくのである．）

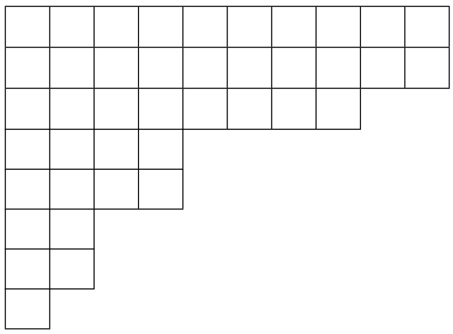
$Y - H_x =$ 

図２：Y (図１) からフック H_x を引いてできる $Y - H_x$

箱の数 n のフックのことを長さ n のフックという．図１のフック H_x は長さ 7 のフックである．長さが n の整数倍 kn のフックを引くことは, 長さが n のあるフックを引いて新しいヤング図形をつくり, そこから, また長さ n のあるフックを引き,... と次々と長さ n のフックを k 回連続して引いた結果と同じになる．（逆は必ずしも成り立たない．）与えられたヤング図形から長さが n またはその整数倍のフックを次々と引いていくと, もうそれ以上そのような操作ができないようなヤング図形, つまり長さ n のフックを含まないようなヤング図形, $c_n(Y)$ に到達する．$c_n(Y)$ はそこに到達するまでの途中経過によらず決まる．（ $c_n(Y)$ は空っぽのヤング図形 $\emptyset$ になることもある．）これを Y の n **コア**という．これが「$Y \div n$ の余り」に相当する概念である．「自然数÷自然数の余り」は初等整数論で重要な概念で, それがユークリッド整域という方向に一般化されることは代数学の授業の最初の辺りに出てくる話題だが, 中山 [7] はそれとは別の方向への一般化を見出したわけである．

3　佐藤-Welter ゲーム

中山論文 [7] にはヤング図形からフックを引くという操作を見やすくする別の方法も提示されている．図１のヤング図形 Y はしばしば (10,10,8,6,5,5,3,1) という 広義 単調減少自然数列（「分割」）と同一視される．これは Y の上から 1 行目の箱の数が 10 個, 2 行目が 10 個, 3 行目が 8 個,... という意味だが, 同じヤング図形は $[17, 16, 13, 10, 8, 7, 4, 1]$ という 狭義 単調減少自然数列と同一視することもできる．こちらは図１のヤング図形の左端の箱を上から順に

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$ とすると, フック H_{x_1} の長さが 17, H_{x_2} の長さが 16, H_{x_3} の長さが 13, ... という意味で, [7] において Y の β **数**と呼ばれている数列である. 図 2 のヤング図形 $Y - H_x$ の β 数は $[17, 16, 13, 8, 7, 4, 3, 1]$ となる. Y の β 数から 10 が消え, 替わりに 3 が付け加わったことになる. しかも, この 2 数の差 $10 - 3 = 7$ はフック H_x の長さに等しい. 一般に, ヤング図形からあるフック H を引くことは「そのヤング図形の β 数に含まれるある数 b を 1 個取り除き, 替わりに b より小さくしかも元の β 数には入っていなかったある数 b' を 1 個付け加えて新しい β 数をつくる」ことにぴったり対応し, しかもこのとき $b - b'$ はフック H の長さに等しくなる. これを図示するには図 3 のようなゲーム盤を用いるとよい.

0	①	2	3	④	5	6	⑦	⑧	9	⑩	11	12	⑬	14	15	⑯	⑰	18

図３：Y (図１) の β 数の場所に石 (○印) を配置したゲーム盤

左から順に $0, 1, 2, \ldots$ に対応するマス目を並べた盤上において, 与えられたヤング図形の β 数に対応するマス目に「石」を配置する. 元のヤング図形からフックを引くという操作はこの盤面上の石を 1 個選んで, それより左側の空いているマス目にその石を移すことに相当する. (中山論文には図 3 のような図こそ現れてはいないが, 上述のように β 数のことばで数学的に同等なことが示されている.)

以上により, ヤング図形から次々とフックを引いていくというゲームは図 3 のような盤上に有限個の石を配置し, 1 個の石を選んで左側の空いているマス目に移動させるというゲームに同型であることがわかる. このゲームを 2 人ゲームと考えたとき, 次の定理が成り立つ.

定理 2 (C.P. Welter[13], 佐藤幹夫 [11]) $0, 1, 2, \ldots$ に対応するマス目のうち, $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k$ のマス目に石が配置された局面の Sprague-Grundy 値 $v = v(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)$ は

$$v = n_1 \oplus n_2 \oplus n_3 \oplus \cdots \oplus n_k \oplus \sum_{i<j}^{\oplus} (n_i | n_j)$$

で与えられる. ただし, $\oplus$ は Nim 和 (定義 2) であり

$$(n_i | n_j) = (n_j - n_i) \oplus (n_j - n_i - 1), \quad i < j$$

である.

注意 2 [10][12] にあるように, ヤング図形のことばで定理 2 を書き直すと, 定理 2 の公式は対称群の (標数 0 の体上の) 既約表現の次数公式 (フック公式)

と似た形になる.

ゲームの呼称についてのコメント　定理 2 の現在までに出版された証明は Welter[13], 佐藤 [11], Conway[1] の 3 通りあり, どれも相当に複雑である. Conway の証明は Welter の証明に近いが, 佐藤 [11] の証明は Welter や Conway のものとは非常に違う. 出版年代は Welter[13] が最も早く, これと独立になされた佐藤の仕事はずいぶん後まで日本の外では知られていなかった.（現在でも [11] の証明は日本語でしか読むことができない. ）こういう事情で図 3 の 2 人ゲームは国際的には「Welter のゲーム (Welter's game)」と呼ぶのが慣例になっている. 本稿で, これをあえて「佐藤-Welter ゲーム (Sato-Welter game)」と呼ぶのは, このゲームがヤング図形からフックを引いていくゲームと同型である（むしろ, そちらの見方が「本家」である）ということが（[3], あるいは本稿の 6 節注意 4(iii) からも分かるように）我々にとって決定的に重要だからである. [11] が出ている「数学のあゆみ」の序文によると, 佐藤は最初から中山 [7] の仕事と結びつけてこのゲームを考えていた. （ただし, 佐藤 [11] の証明自体には, 少なくとも表面上, ヤング図形の影響は見受けられない. ）一方, Welter[13] と Conway[1] はヤング図形との関連には一切, 言及していない.
以上は図 3 を 2 人ゲームと見る場合のことである. 同じゲームを 1 人ゲーム＝アルゴリズムと見る場合には中山のゲーム, または中山のアルゴリズムが適切な呼称と考える.

4　ゲームの割り算

定理 2 の証明への新しいアプローチ（とその一般化）を説明するのが本稿の目的だが, その前に茅田智幸氏の最近の仕事 [4] の一部を紹介する. この節では (P,φ) は一般のゲーム（定義 1）である.
$v_P = v_{(P,\varphi)}$ を (P,φ) の Sprague-Grundy 関数とする. また a を任意の正の整数とする. 関数 $Qv_P\colon P \longrightarrow \mathbb{N}$ と関数 $Rv_P\colon P \longrightarrow \mathbb{N}$ を

$$v_P(p) = aQv_P(p) + Rv_P(p), \quad 0 \le Rv_P(p) < a, \quad p \in P$$

によって, 定義する. すなわち, 任意の $p \in P$ に対して, $v_P(p) \div a$ の商を $Qv_P(p)$, 余りを $Rv_P(p)$ とするのである. さらに, 写像 $Q\varphi\colon P \longrightarrow 2^P$ と写像 $R\varphi\colon P \longrightarrow 2^P$ を

$$Q\varphi(p) = \{q \in \varphi(p) \mid Rv_P(q) = Rv_P(p)\}, \quad p \in P$$

と

$$R\varphi(p) = \{q \in \varphi(p) \mid Qv_P(q) = Qv_P(p)\}, \quad p \in P$$

で定義する．すなわち, $Q\varphi(p)$ は余り $Rv_P(p)$ を保存するような「手」の全体であり, $R\varphi(p)$ は商 $Qv_P(p)$ を保存するような「手」全体である．こうして 2 つの新しいゲーム、**商ゲーム** $(P, Q\varphi)$ と**剰余ゲーム** $(P, R\varphi)$ が得られる．このとき次のことが成り立つ.

定理 3 （茅田 [4]）商ゲーム $(P, Q\varphi)$ の Sprague-Grundy 関数 $v_{(P,Q\varphi)}$ は Qv_P に一致し, 剰余ゲーム $(P, R\varphi)$ の Sprague-Grundy 関数 $v_{(P,R\varphi)}$ は Rv_P に一致する．よって, ゲーム (P, φ) の Sprague-Grundy 関数を $v_{(P,\varphi)}$ は

$$v_{(P,\varphi)}(p) = av_{(P,Q\varphi)}(p) + v_{(P,R\varphi)}(p), \qquad p \in P$$

で与えられる．これを, 標語的にかくと

$$(P, \varphi) = a(P, Q\varphi) + (P, R\varphi).$$

5 佐藤-Welter ゲームの商定理

定理 3 は与えられたゲームを商ゲームと剰余ゲームに「分解」することによって, 元のゲームの Sprague-Grundy 関数の計算が 2 つのより「小さいゲーム」における Sprague-Grundy 関数の計算に帰着され, 簡易化されるということを述べている．ただし, 残念ながら商ゲームと剰余ゲームの定義自体に元のゲームの Sprague-Grundy 関数を使っているので, この方法をダイレクトに使って目的が達成されるわけではない．茅田 [4] は非常に特別な条件の下では元のゲームの Sprague-Grundy 関数を使わずに商ゲームと剰余ゲームを構成できることを示し, その場合にはこの簡易化が実現できることを示した．佐藤-Welter ゲームは茅田 [4] の条件を満たさないが, $a = 2$ の場合に商ゲームと剰余ゲームを直接的に構成することができる．（実際はこの結果の方が定理 3 より早く得られた．）実際, 本稿の主題は「÷2」の場合には, 佐藤-Welter ゲームにおいて

（4 節の）ゲーム論的な割り算＝ (2 節の）ヤング図形の表現論的割り算

という「等式」が成り立つということである.
2 節では中山論文 [7] の紹介という意味もあり, 割り算の余り（コア）だけを強調したが, それではやはり片手落ちなので, G. de Robinson 等によって導入された商について（「÷2」の場合に限定した）説明を追加しておく.（表現論への応用については [2] が詳しい.）
図 3 を始局面とする佐藤-Welter ゲーム, あるいは同じことだが, 図 1 のヤング図形から次々とフックを引いていく 2 人ゲームを考えよう．このゲームを 2 で割った（表現論的な）商は以下の ①〜④ という（互いに同型な）4 通りの表示をもつ.

① 図 3 で石をひとつ選び, 偶数距離だけ離れた左側の空いているマス目へ移動させていくゲーム
② 図 1 で長さが偶数のフックを引いていくゲーム
③ 図 4 のように, 図 3 の盤を偶数のマス目と奇数のマス目に分け, 上段のゲームと下段のゲームの和（1 節参照）として得られるゲーム

0	2	④	6	⑧	⑩	12	14	⑯	18	20

①	3	5	⑦	9	11	⑬	15	⑰	19	21

図 4：佐藤-Welter ゲーム（図 3）を 2 で割る

④ 図 4 の上段のゲームは（左端のマス目から新たに $0, 1, 2, \ldots$ と番号をつけることで）β 数が $[8, 5, 4, 2]$ であるようなヤング図形に対応し, 下段のゲームは（左端のマス目は, 動けない石が入っているという意味で「死んでいる」マス目である. そこで, その次のマス目から順に $0, 1, 2, \ldots$ と番号をつけて）β 数が $[7, 5, 2]$ であるようなヤング図形に対応する. これら 2 つの小ヤング図形のどちらかを選んでフックを引いていくゲーム

P をヤング図形の全体とし, $p \in P$ に対し, $\varphi(p)$ を p からあるフックを引いて得られるヤング図形全体として定義される 2 人ゲーム (P, φ) が佐藤-Welter ゲームである. また, $\varphi_2(p)$ を p から長さが偶数のフックを引いて得られるヤング図形全体とすると, (P, φ_2) はゲーム (P, φ) を 2 で割って得られる（表現論的な）商となる. 次の定理を**佐藤-Welter ゲームの商定理**という.

定理 4 p を佐藤-Welter ゲーム (P, φ) の局面, p^2 をその 2 コアとする. このとき p の Sprague-Grundy 値 $v_{(P,\varphi)}(p)$ は

$$v_{(P,\varphi)}(p) = 2v_{(P,\varphi_2)}(p) + v_{(P,\varphi)}(p^2)$$

で与えられる.

例えば, 局面 p を図 3 のような盤で与えるとき, 図 4 のように作った 2 つの盤の上段の局面と下段の局面をそれぞれ p_0, p_1 とおくと, 定理 1 より

$$v_{(P,\varphi_2)}(p) = v_{(P,\varphi)}(p_0) \oplus v_{(P,\varphi)}(p_1)$$

である. また, 図 4 における (下段の石の数)$-$(上段の石の数) を $m = m(p)$ とおくとき

$$v_{(P,\varphi)}(p^2) = \begin{cases} 1 & (\, m(m+1) \text{ が } 4 \text{ の倍数でない}\,), \\ 0 & (\, m(m+1) \text{ が } 4 \text{ の倍数である}\,) \end{cases}$$

あるいはヤング図形 p の箱の数を n とすれば

$$v_{(P,\varphi)}(p^2) = \begin{cases} 1 & (\,n \text{ が奇数}\,), \\ 0 & (\,n \text{ が偶数}\,) \end{cases}$$

となる.
定理 4 により, 佐藤-Welter ゲームの局面 p の Sprague-Grundy 値 $v(p)$ を求めることは「小さい」局面 p_0 と p_1 の Sprague-Grundy 値を求めることに帰着され, 再び, 定理 4 を用いれば後者の計算はさらに小さい局面に帰着される. このように, 定理 4 は局面 p の「2 進展開」を用いることによって, Sprague-Grundy 値 $v_{(P,\varphi)}(p)$ の 2 進展開が計算できることを言っている.

定理 3 と定理 4 の関係について述べる. まず, 定理 4 は自然な証明をもつ. その結果を用いれば定理 3 は自然に証明できる. 一方, 定理 3 を前提にすれば, 定理 4 を証明することは易しい. Sprague-Grundy 値を実際に求めたいときには, 定理 4 の reduction による計算の方が, 一般的には, より高速である. 定理 4 の一般化を次節で述べるが, それを用いれば定理 3 の一般化（Sprague-Grundy 値のフック公式）も自然に得られる.

6　フック構造をもつゲーム

前節までに, 主として佐藤-Welter ゲームを例にとって述べたことを一般化するのが本節の目的である. その前にゲームの一般論の用語などを, [3] の繰り返しになる部分もあるが, 補足しておく.
(P,φ) をゲームとする. $Q \subset P$ のとき

$$\varphi_Q(q) = \varphi(q) \cap Q, \quad q \in Q$$

とおくと (Q,φ_Q) はゲームになる. これを (P,φ) の**部分ゲーム**といい

$$\varphi(q) \subset Q, \quad q \in Q$$

が成り立つとき, **充満**部分ゲームという. $p \in P$ を含むような充満部分ゲームのうち最小のものを $\langle p \rangle$ で表し, p で生成された**単項ゲーム**という. 状態 p から出発して有限ステップ後に到達し得る局面の全体が（集合としての）$\langle p \rangle$ である.
$P = \{p, q\}$ $(p \neq q)$, $\varphi(p) = \{q\}$, $\varphi(q) = \emptyset$ のとき、ゲーム (P,φ) を 1 次元立方体という. n 個の 1 次元立方体の和（1 節）を n **次元立方体**という.（とくに 2 次元立方体のことを**正方形**という.）言い換えれば $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし $C_n = \{c_X \mid X \subset [n]\}$ を 2^n 個の元からなる集合とするとき $\varphi_n \colon C_n \longrightarrow 2^{C_n}$ を $\varphi_n(c_X) = \{c_Y \mid Y \subset X, |X \setminus Y| = 1\}$ で定義して得られる (C_n,φ_n)（と同

型なゲーム）が n 次元立方体である．$c_{[n]}$, $c_\emptyset$ をそれぞれ C_n の**始点, 終点**という．また $\{c_X \mid |X| = n-1\}$ を C_n の**基底**という．

ゲーム (P, φ) が以下の 3 つの公理 (PG1)-(PG3) を満たすとき**平明ゲーム**（plain game）であるという．

(PG1) $p \in P$, $q_1, \ldots, q_n \in \varphi(p)$ とし, $q_i \neq q_j\,(i \neq j)$, $q_i \notin \varphi(q_j)\,(1 \leq i, j \leq n)$ とする．このとき p を始点とし, $\{q_1, \ldots, q_n\}$ を基底とする n 次元立方体が P の部分ゲームとして唯一つ存在する．

(PG2) $p, q, s \in P$, $q \in \varphi(p)$, $s \in \varphi(q)$, $s \notin \varphi(p)$ とする．このとき $\{p, q, r, s\}$ が正方形であるような $r \in P$ が唯一つ存在する．

(PG3) $p, q, r_1, r_2, s_1, s_2 \in P$ で $\{p, q, r_1, s_1\}$, $\{p, q, r_2, s_2\}$ が共に正方形であるとし, さらに $p \in \varphi(q)$ または $q \in \varphi(p)$ であるとする．もし $r_1 \in \varphi(r_2)$, $r_2 \in \varphi(r_1)$, $s_1 \in \varphi(s_2)$, $s_2 \in \varphi(s_1)$ の 4 条件のうちのどれかが成り立っているなら $\{r_1, r_2, s_1, s_2\}$ は正方形である．

注意 3 平明ゲームは [3] において有限平明アルゴリズムと呼んだものと実質的に同一のものである．[3] の公理 (P5) は削除しても実質的な差がないことがわかったので, 本稿では公理から省いた．

平明ゲームについての基本的な結果を 3 つ述べる．

命題 1 平明ゲームの充満部分ゲームは平明である．とくに, (P, φ) が平明ゲームで $p \in P$ のとき, 単項部分ゲーム $\langle p \rangle$ は平明である．

命題 2 2 つの平明ゲームの和は平明である．

命題 3 単項平明ゲームの終局面はただひとつ存在する．

次の定理を平明ゲームの基本定理という．

定理 5 $(\langle p \rangle, \varphi)$ を単項平明ゲームとする．

(i) 部分ゲーム $Y_p = \varphi(p)\,(\subset \langle p \rangle)$ は平明である．

(ii) $(\langle p \rangle, \varphi)$ の同型類は Y_p の同型類によって一意的に定まる．

定義 3 定理 5 の Y_p を単項平明ゲーム $\langle p \rangle$ の (あるいは局面 p の）**ダイアグラム**という．ある単項平明ゲームのダイアグラムに同型であるようなゲーム（←定理 1 により平明）を単にダイアグラムという．ダイアグラム Y_p の元 x に対し, 集合 $H_p(x) = \{x\} \cup \{a \in Y \mid x \in \varphi(a)\}$ を x の Y_p における (あるいは p における) **フック**という．

命題 4 (P, φ) を平明ゲームとし, $p \in P$, $x \in \varphi(p)$ とする．このとき

$$|Y_x| = |Y_p| - |H_p(x)|$$

が成り立つ．

注意 4 (i) 集合としての Y_p にフック構造 $\{H_p(x) \mid x \in Y\}$ を付け加えたものとゲームとしての（すなわちダイアグラムとしての）Y_p は同値である．
(ii) 命題 4 は, $x \in \varphi(p)$ のとき，x のダイアグラムは p のダイアグラムからフック $H_p(x)$ を「引いて」得られるということを言っている．より詳しく, $\varphi(p) \setminus H_p(x)$ から $\varphi(q)$ への具体的な全単射を与えることもできる．
(iii) 図 3 のタイプの盤面で表示される中山のゲーム（佐藤-Welter ゲーム）は平明である．そのダイアグラムはヤング図形になり, 定義 3 のフックはヤング図形におけるフック概念に一致する．定理 5(ii) と注意 4(i)(ii) から平明ゲーム $\langle p \rangle$ はそのダイアグラム（つまりフック構造）によって完全に統制されていることがわかる．従って, とくに中山のゲーム（佐藤-Welter ゲーム）においてはヤング図形表示こそが本体であることがわかる．定理 4 や下の定理 5 は（さらには, 注意 2 で述べた Sprague-Grundy 値のフック表示も）この事実の現れである．
(iv) 平明ゲームと D. Peterson による（Kac-Moody リー代数のワイル群の）minuscule 元, R.A. Proctor[8][9] の d-complete poset との関係については [3] を見て下さい．関連する文献として [5][6] がある．

命題 5 (P, φ) を平明ゲームとし, r を正の整数とする．$\varphi_r \colon P \longrightarrow 2^P$ を

$$\varphi_r(p) = \{x \in \varphi(p) \mid |\varphi(p)| \equiv |\varphi(x)| \mod r\}, \quad p \in P$$

で定義する．このとき (P, φ_r) は平明ゲームである．

(P, φ_r) を命題 5 で構成した平明ゲームとし, $p \in P$ とする．$\langle p \rangle_r$ を, (P, φ_r) において, p で生成される単項ゲームとすると, 命題 3 により, その終局面 p^r は一意的に決まる．p^r はヤング図形の r コアの一般化であり, (P, φ_r) は 5 節で述べた（表現論的な）商の一般化である．次の定理（平明な 2 人ゲームの商定理）は, 定理 4 と定理 1 の系の両方の一般化になっている．表面上, Nim 和は登場しない．その意味で Nim 和の内在的な導入にもなっている．

定理 5 (P, φ) を平明ゲームとする．このとき

$$v_{(P,\varphi)}(p) = 2v_{(P,\varphi_2)}(p) + v_{(P,\varphi)}(p^2), \quad p \in P$$

が成り立つ．また

$$v_{(P,\varphi)}(p^2) = \begin{cases} 1 & (\,|\varphi(p)| \text{ が奇数}\,), \\ 0 & (\,|\varphi(p)| \text{ が偶数}\,) \end{cases}$$

が成り立つ．

定理 5 は, 平明ゲーム (P,φ) の局面の Sprague-Grundy 値の 2 進展開が (P,φ) の「2 進展開」を通して計算できることを言っている．定理 5 の証明自体も「ゲームの 2 進展開」のアイデアに基づくが, キーとなるのは次の命題 6 である．命題 5 と異なり, 命題 6 は φ_2 の代わりに φ_r, mod 2 の代わりに mod r（r は一般の正の整数）とすると成り立たない.

命題 6 (P,φ) は平明ゲームとする．$\varphi_2^*\colon P \longrightarrow 2^P$ および ${}^*\varphi_2\colon P \longrightarrow 2^P$ を

$$\varphi_2^*(p) = \{\, x \in \varphi(p) \mid |\varphi_2(x)| \equiv |\varphi_2(p)| \mod 2 \,\}$$

および

$${}^*\varphi_2(p) = \{\, x \in \varphi(p) \mid |\varphi_2(x)| + |\varphi(x)| \equiv |\varphi_2(p)| \mod 2 \,\}$$

で定義する．このとき, (P,φ_2^*) と $(P,{}^*\varphi_2)$ はどちらも平明ゲームである.

平明な 2 人ゲームには茅田 [4] のタイプの可解な一般化があるが, それだけではなく, さらに根本的な一般化があるように思われる.

(1 節〜5 節の内容は, 実際の講演で話したことのほぼ忠実な再現である．講演でほとんど話せなかった「一般の場合の商定理」を最後の 6 節として付け加えた．)

参考文献

[1] J. H. Conway : On Numbers and Games, Academic Press, 1976.

[2] G.D. James and A. Kerber : The representation theory of symmetric groups. Encyclopaedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 16, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1981.

[3] 川中宣明：ゲーム・アルゴリズム・表現論, 日本数学会 2008 年度年会企画特別講演アブストラクト,
http://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/〜kawanaka/kikaku2008.pdf.

[4] 茅田智幸：佐藤のゲームの一般化,「組合せ論的表現論とその応用」(2010 年 10 月開催), 数理解析研究所講究録, 近刊.

[5] K. Nakada ：Colored hook formula for a generalized Young diagram, Osaka J. of Math. 45, 1085-1120 (2008).

[6] K. Nakada and S. Okamura：An algorithm which generates linear extensions for a generalized Young diagram with uniform probability, Proc.

22nd International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2010), 933-940.

[7] T. Nakayama : On some modular properties of irreducible representations of a symmetric group I, II, Jap. J. Math., 17, 165-184, 411-423 (1940, 1941).

[8] R. A. Proctor : Minuscule elements of Weyl groups, the numbers game, and d-complete posets, Journal of Algebra, 213, 272-303 (1999).

[9] R. A. Proctor : Dynkin diagram classification of λ-minuscule Bruhat lattices and of d-complete posets, J. Algebraic Combinatorics, 9, 61-94 (1999).

[10] 佐藤幹夫述（榎本彦衛記）：マヤ・ゲームの数学的理論, 計算機におけるゲームとパズルの諸問題, 数理解析研究所講究録 98, 105-135, 1970.

[11] 佐藤幹夫述（榎本彦衛記）：Maya game について, 数学のあゆみ, 15-1（佐藤幹夫特集号), 73-84 (1970).

[12] 佐藤幹夫述（梅田 亨記）：佐藤幹夫講義録（1984/85、ソリトン理論）, 数理解析研究所, 1989.

[13] C.P. Welter : The theory of a class of games on a sequence of squares, in terms of advancing operation in a special group, Indag. Math. 16, 194-200 (1954).