GROMOV-WITTEN 理論における整構造

入谷　寛

Abstract. 多様体 X の Gromov-Witten 理論とくに量子コホモロジーに対してコホモロジーの整構造 $H^*(X,\mathbb{Z})$ とは異なる整構造が多様体の K 群とガンマ類 $\widehat{\Gamma}_X$ によって定められる．本稿ではこの整構造に対する動機づけや基本的な性質，ミラー対称性との関係，双有理幾何との関係，高種数 Gromov-Witten 理論における保型性との関係などについて述べる．

1. Gromov-Witten 不変量と量子コホモロジー

X を $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影的多様体[1]とする．Gromov-Witten 不変量とは多様体 X の中の代数曲線を数え上げる不変量であり，次の形に書かれる．

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \rangle^X_{g,n,d} \in \mathbb{Q}, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in H^*(X,\mathbb{Q})$$

これはコホモロジー類 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ についての多重線形関数であり，g は曲線の種数，$d \in H_2(X,\mathbb{Z})$ は次数である．コホモロジー類 α_i の Poincaré 双対なサイクル $A_i \subset X$ をとろう．大雑把に言って，上の不変量は X の中の種数 g，次数 d の node を許す曲線 C であってサイクル $A_1, A_2, \ldots, A_n$ に交わるものの個数を数えたものである．ただし曲線のモジュライ空間が必ずしも滑らかではなく，またモジュライ空間の点が有限の自己同型を持ちうるため，$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle^X_{g,n,d}$ は α_i が整コホモロジー類である場合も整数とは限らない．Gromov-Witten 不変量は X の複素構造の変形に対して不変であり，ある種のトポロジカルな量であると考えられる．コホモロジー類 α_i や種数 g，次数 d，点の数 n を様々に変えるとき，これは X に付随する無限個の不変量を与える．そこで通常はこれらの不変量の生成関数を考えてその性質を調べる．例えばコホモロジー環上の冪級数 $F^g(t)$

$$F^g(t) = \sum_{n,d} \langle t, \ldots, t \rangle_{g,n,d} \frac{Q^d}{n!}, \quad t \in H^*(X)$$

は種数 g の Gromov-Witten ポテンシャル (または自由エネルギー) と呼ばれる．ここで Q はノビコフ変数と呼ばれる次数に付随する形式的なパラメータである．ここで定義から明らかなように $d \in H_2(X,\mathbb{Z})$ が代数曲線で代表されないとき Gromov-Witten 不変量は 0 である．従って d に関する和は森錘と呼ばれる $H_2(X)$ 内の錘 (cone) に制限され，F^g は森錘に台を持つ Q の冪級数になっている．

特に種数 0 においては Gromov-Witten ポテンシャルは量子コホモロジーと呼ばれるコホモロジー環の変形族を定める．$\{\phi_i\} \subset H^*(X)$ をコホモロジー群の $\mathbb{C}$ 上の (斉次な) 基底とし，$\{t^i\}$ をそれに付随するコホモロジー群上の座標とする．また $t = \sum_i t^i \phi_i$ でコホ

京都大学大学院理学研究科　数学教室.

[1]シンプレクティック幾何で扱うときはシンプレクティック多様体を考える．また近年は滑らかな Deligne-Mumford stack (もしくは symplectic orbifold) についても Gromov-Witten 不変量が定義されている．

モロジー群の一般の点を表す．基底同士の量子積 $\bullet_t$ は次の式で定義される．

$$(\phi_i \bullet_t \phi_j, \phi_k) = \frac{\partial^3 F^0}{\partial t^i \partial t^j \partial t^k}(t) = \sum_{n,d} \langle \phi_i, \phi_j, \phi_k, t, \ldots, t \rangle^X_{0,n+3,d} \frac{Q^d}{n!}$$

ここで左辺のペアリング $(\cdot,\cdot)$ は Poincaré ペアリング $(\alpha,\beta) = \int_X \alpha \wedge \beta$ である．Poincaré ペアリングに関する双対基底 $\{\phi^j\}$ (つまり $\int_X \phi_i \wedge \phi^j = \delta_i^j$) をとると上の式は

$$\phi_i \bullet_t \phi_j = \sum_k \frac{\partial^3 F^0}{\partial t^i \partial t^j \partial t^k}(t)\phi^k$$

とも書かれる．この積 $\bullet_t$ は $\mathbb{C}[\![Q]\!]$ 上双線形に拡張され $H^*(X) \otimes \mathbb{C}[\![Q]\!]$ 上にコホモロジー類 t でパラメトライズされる環構造の族を定める．(正確には $t=0$ の形式的近傍でパラメトライズされる積の族) この積 $\bullet_t$ は超可換かつ結合的であることが知られている．もう少し幾何学的な描像を得るために $t \in H^2(X,\mathbb{C})$ の場合を考えよう．この場合因子公理 (divisor axiom) と呼ばれる次の等式

$$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n, H \rangle^X_{g,n+1,d} = \left(\int_d H \right) \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle^X_{g,n,d}, \quad H \in H^2(X)$$

を用いると $\bullet_t$ は次の形に書けることが分かる．

$$(\phi_i \bullet_t \phi_j, \phi_k) = \sum_d \langle \phi_i, \phi_j, \phi_k \rangle_{0,3,d} e^{\langle d,t \rangle} Q^d$$

ここで $\langle d,t \rangle = \int_d t$ とおいた．これから変数 Q は 2 次コホモロジー類 t に対する e^t と等価であることが分かる．ここでは簡単のため $t \in H^2(X)$ の時を考えたが，一般に Gromov-Witten ポテンシャルにおける変数 Q は余分であり，$t \in H^*(X)$ の $H^2(X)$ 成分 t_2 に対して e^{t_2} と同じ役割を果たす．そこで以下では $Q=1$ として $\circ_t := \bullet_t|_{Q=1}$ とおこう．すなわち $t \in H^2(X)$ のときは

$$(\phi_i \circ_t \phi_j, \phi_k) = \sum_d \langle \phi_i, \phi_j, \phi_k \rangle_{0,3,d} e^{\langle d,t \rangle}.$$

ここでは 3 点付きで種数 0 の Gromov-Witten 不変量 $\langle \phi_i, \phi_j, \phi_k \rangle_{0,3,d}$ のみが現れ，これは次数 d の正則な球面で ϕ_i, ϕ_j, ϕ_k の Poincaré 双対サイクルに交わるものの数え上げである．次数 $d=0$ の正則球面は定数写像しかないので，$\langle \phi_i, \phi_j, \phi_k \rangle_{0,3,0}$ は Poincaré 双対サイクルたちの三重交わり点の数，つまり $\int_X \phi_i \wedge \phi_j \wedge \phi_k$ に等しいことが分かる．この $d=0$ の寄与がちょうど通常のカップ積を与えている．一方 $d>0$ の寄与はこれに対する「量子変形」と考えることができる．つまり 3 つのサイクルは古典的には交わらないが正則な球面を介して (閉じた弦を媒介して) 量子的に交わっていると思うのである．以上の議論から次の極限

$$e^{\langle d,t \rangle} \longrightarrow 0, \quad \forall d \neq 0\colon \text{ effective class}, \quad t \in H^2(X)$$

の下で $\circ_t$ はカップ積に近づく．この極限を極大体積極限 (large volume limit) と呼ぶ．一般には量子積 $\circ_t$ は e^t の形式的冪級数であることしか分からないが，知られている多くの場合には収束する．

2. 整構造の動機付け

量子コホモロジーは複素構造の変形で不変であるという意味でトポロジカルなものであるが，通常のコホモロジーと異なり写像に対する関手性 (functoriality) が素直な形では成り立たない．一方双有理幾何または導来圏の幾何と深い関係があり，ある種の関手性が成り立つことが近年分かってきた．Yongbin Ruan によって提唱された予想によると，二つの双有理同値な多様体 (軌道体でもよい)X, Y が (K 同値，flop, crepant 解消などの) いわゆる crepant な関係 (標準類 K_X, K_Y が「等しい」) にあるとき X と Y の量子コホモロジーはパラメータの解析接続によって同型になる．

$$\Theta_t \colon (H^*(X), \circ_t) \cong (H^*(Y), \circ_{f(t)})$$

ここで量子コホモロジーのパラメータ t に関する解析性は仮定されている．$f \colon H^*(X) \to H^*(Y)$ はパラメータの間の変数変換であり，Θ_t は環同型である．ここでパラメータの間の写像 f の下で X の極大体積極限は Y のそれに写されるわけではなく，解析接続が真に必要な状況となっている．もともとの Ruan の予想では単に環同型があるというだけでその同型 Θ やパラメータの変換写像 f がどのように (関手的に) 定まるのか，という点については余り明らかではなかった．これが整構造を考える一つの動機である．我々は Tom Coates, Hsian-Hua Tseng 氏との研究 [8] において，この解析接続を環のレベルではなく量子 D 加群とよばれる微分方程式系のレベルでとらえるとより明確に理解できることを示していた[2]．後で述べるように我々の整構造を用いるとこの D 加群の同型が誘導する (各々の極大体積極限のまわりの) 局所解空間の間の同型が「関手的に」X と Y の間の導来同値から定まると予想される．

上のこととも実は重なっているが，もう一つの動機はミラー対称性である．一般に Calabi-Yau 多様体[3]に対するミラー対称性を考えよう．X, Y を Calabi-Yau 多様体のミラー対とする．X 側では A 模型 (シンプレクティック幾何)，Y 側で B 模型 (複素幾何) を考えよう．B 模型側では Y の複素構造の変形族 Y_u (たとえば倉西族) を考える．ここで u は変形のパラメータである．この変形に付随して $H^n(Y, \mathbb{C})$ 上には次の Hodge 構造の変動が定まる．

$$H^n(Y_u, \mathbb{C}) = F^0 \supset F^1 \supset \cdots \supset F^n \supset 0, \quad F^p = \bigoplus_{j \ge p} H^{j,n-j}(Y_u). \tag{1}$$

ここでベクトル空間 $H^n(Y_u, \mathbb{C})$ は u によらず互いに同一視されるが，減少フィルター F^p は u に依存している．$H^n(Y_u, \mathbb{C})$ が u によらない，ということを別の言い方で言うと，コホモロジー束 $\bigcup_u H^n(Y_u, \mathbb{C})$ には Gauss-Manin 接続と呼ばれる平坦接続 ∇ が与えられている．さらに減少フィルターは Griffiths 横断性 $\nabla F^p \subset F^{p-1}$ を満たす．一方，A 模型側では量子コホモロジーに付随する次の A 模型 Hodge 構造の変動が定まる．

$$H^{*,*}(X, \mathbb{C}) = F^0 \supset F^1 \supset \cdots \supset F^n \supset 0, \quad F^p = \bigoplus_{j \le n-p} H^{j,j}(X). \tag{2}$$

A 模型におけるパラメータは複素化された Kähler パラメータ $t \in H^{1,1}(X)$ であるが，上に現れる $H^{*,*}(X, \mathbb{C})$ およびフィルター F^p は t に依存していないように見える．実は A

[2]このこと自体はミラー対称性の観点や物理の人たちにとっては当然明らかなことであった．我々はパラメータの変換写像 f が非線形になり Θ_t が t に依存する例を見出した．

[3]ここで Calabi-Yau 多様体とは滑らかな射影代数多様体であって K_X が自明であるものを指す．

模型 Hodge 構造の変動においては，平坦接続 ∇ が t に非自明に依存する．

$$\nabla^{\mathrm{A}} = d + \sum_{\phi_i \in H^{1,1}(X)} (\phi_i \circ_t) dt^i$$

ここで $(\phi_i \circ_t)$ は ϕ_i と量子積をとる線形写像である．この接続 ∇^{A} は Dubrovin 接続と呼ばれる．ミラー対称性によれば，あるミラー写像 $u \mapsto t = t(u)$ が存在して上の二つの Hodge 構造の変動 (1), (2) は同型になると予想されている．Hodge 構造の変動の観点からは A 模型側には実は構造として一つ欠けているものがある．B 模型においては Gauss-Manin 接続に関して平坦な整数上の局所系 $H^n(Y_u, \mathbb{Z})$ が存在する．一方で A 模型において対応する整数上の局所系 (整構造) は自明には存在していない．実はホモロジカルミラー対称性

	A 模型	B 模型
空間	X	Y
モジュライ	複素化された Kähler モジュライ	複素構造のモジュライ
Hodge 構造	$\left(H^{*,*}(X,\mathbb{C}),\, F^p = \bigoplus_{j \le n-p} H^{j,j}(X)\right)$	$\left(H^n(Y_u,\mathbb{C}),\, F^p = \bigoplus_{j \ge p} H^{j,n-j}(Y_u)\right)$
平坦接続	Dubrovin 接続	Gauss-Manin 接続
$\mathbb{Z}$ 上の局所系	$(D\,\mathrm{Coh}(X) \rightsquigarrow)\ K(X)$?	$(D\,\mathrm{Fuk}(Y) \rightsquigarrow)\ H^n(Y,\mathbb{Z})$

に基づいた次の議論によって A 模型における整構造が導来圏あるいは K 群から来ることが予想できる．ここでは A 模型と B 模型の役割を逆にして X に対して B 側，Y に対して A 側を考える．ホモロジカルミラー対称性によると，X 上の連接層の導来圏 $D\,\mathrm{Coh}(X)$ (B-brane の圏) と Y の導来深谷圏 $D\,\mathrm{Fuk}(Y)$ (A-brane の圏) が三角圏として同値であると予想される．深谷圏は Lagrange 部分多様体を対象とし，その間の Floer コホモロジーを射とする圏である．その対象である Lagrange 部分多様体のホモロジー類は $H_n(Y_u, \mathbb{Z})$ の局所定数な切断を与える．その上で正則 n 形式 ($F^n = H^{n,0}(Y_u)$ の切断) を積分したものが周期であり，これは Hodge 構造の変動を測っている．この事実のミラーを考えれば X の導来圏の対象である連接層が Dubrovin 接続に関して平坦な切断を与え，さらに A 模型における「周期」を定めることが予想される．

ここで A と B を逆にした理由は，例えば B-brane(連接層) であればそれは Kähler 構造の取り方によらず，A 模型のモジュライ (Kähler モジュライ) の上で「定数」なもの (平坦切断) を与えると考えられるからである．一方 B-brane の圏 (導来圏) の言葉では A 模型のモジュライは B-brane に対する安定性条件 (stability condition) のなす空間と解釈することもできる．導来圏に対する安定性条件のなす空間は Bridgeland [5] により定義され，数値的 K 群と同じ次元の有限次元の複素多様体になる．そこで量子コホモロジーが解析接続される空間はこの Bridgeland の安定性条件の空間と同一視できるのではないか，という期待がある．Bridgeland の空間は最初から大域的なものであり，上に述べた Ruan の予想とかかわっている．また量子コホモロジーにおける整構造 ($\mathbb{Z}$ 上の局所系) の存在はモノドロミーが $\mathbb{Z}$ 上定義されていることを意味する．これはミラーの存在を認めれば自明であるが，Gromov-Witten 理論の立場からは全く非自明なことである．導来圏の言葉では量子コホモロジーにおけるモノドロミーは導来圏の自己同値群 $\mathrm{Auteq}(D\,\mathrm{Coh}(X))$ から引き起こされていると予想される．

また我々が次節で導入する整構造は Borisov-Horja [4] および細野 [13] により超幾何関数の言葉ではすでに得られていたものである．Borisov-Horja はトーリック Calabi-Yau$X$ に付随する GKZ 系の解空間を $K(X)$ と同一視し，さらに後で述べるように GKZ 系の解

析接続が K 群のフーリエ向井変換と同一視されることを示した．また細野は超幾何関数を用いて A 模型における周期の予想を与えた．

3. 量子 D 加群とその整構造

ここでは量子積 $\circ_t$ が極大体積極限の十分近くで収束し解析的であると仮定する．自明なベクトル束 $F = H^*(X) \times (H^*(X) \times \mathbb{C}) \to H^*(X) \times \mathbb{C}$ を用意し，F に次の接続 (Dubrovin 接続) を導入しよう．ただし (t, z) で底空間 $H^*(X) \times \mathbb{C}$ の座標を表す．

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial t^i} + \frac{1}{z}\phi_i \circ_t$$
$$\nabla_{z\partial_z} = z\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{z}E \circ_t + \mu.$$

ここで E はオイラーベクトル場と呼ばれる F の切断で $\mu \in \mathrm{End}(H^*(X))$ は次数付けを与える作用素である．

$$E = c_1(X) + \sum_i (1 - \frac{1}{2}\deg\phi_i)t^i\phi_i, \quad \mu(\phi_i) = (\frac{1}{2}\deg\phi_i - \frac{n}{2})\phi_i.$$

ただし $n = \dim_{\mathbb{C}} X$．この接続 ∇ は $z = 0$ に極を持つ有理型接続であるが，平坦であることが知られている．ここでは新たにパラメータ z を導入したが，z 方向の微分方程式は量子コホモロジーの斉次性を表している．オイラーベクトル場 E は変数 t^i (または $\phi_i \in H^2(X)$ の時は e^{t^i}) に対する次数付けを定め，$E + z\partial_z$ 方向の共変微分 $\nabla_{E+z\partial_z}$ は F の切断に対する次数付けを定める．F には次のペアリングが定まり ∇ に関して平坦である．

$$(\cdot,\cdot)_F\colon F_{(t,-z)} \times F_{(t,z)} \to \mathbb{C}, \quad (\alpha,\beta)_F = \int_X \alpha \wedge \beta.$$

このペアリングは同じファイバー同士のペアリングではなく z の符号を変えた点のファイバーを考えていることに注意されたい．また正確には F の底空間は $H^*(X) \times \mathbb{C}$ ではなく $\circ_t$ の収束する極大体積極限の近傍と $\mathbb{C}$ の直積である．平坦接続とペアリングの組 $(F, \nabla, (\cdot,\cdot)_F)$ を量子 D 加群と呼ぶ．

この量子 D 加群は $H^*(X) \times \mathbb{C}^\times$ 上に制限すると平坦ベクトル束を与えるが，この平坦ベクトル束の平坦切断からなる $\mathbb{Z}$ 上の局所系を定めたい．∇ の任意の平坦切断 $s(t, z)$ は極大体積近傍の近くで次の漸近的振る舞いをもつ．

$$s(t,z) \sim e^{-t/z}z^{-\mu}z^{c_1(X)}\phi \qquad \text{as } e^{\langle d,t\rangle} \to 0 \text{ for nonzero effective } d.$$

ここで $\phi \in H^*(X)$ はある定数ベクトルで，$e^{-t/z}$ はカップ積による t 作用の指数関数，$z^{-\mu} = \exp(\mu\log z)$, $z^{c_1(X)} = \exp(c_1(X)\log z)$ である．実は右辺は Dubrovin 接続 ∇ において量子積 $\circ_t$ をカップ積 $\cup$ に置き換えた接続に関する平坦切断になっている．ここでガンマ類と呼ばれる特性類 $\widehat{\Gamma}_X$ を導入する．$\delta_1, \ldots, \delta_n$ を接束 TX の Chern 根 ($c(TX) = \prod_i(1 + \delta_i)$) とするとき，

$$\widehat{\Gamma}_X := \prod_{i=1}^n \Gamma(1 + \delta_i)$$

と定める．右辺の $\Gamma(z)$ はガンマ関数であるが，$z = 1$ で正則なので δ_i で Taylor 展開することができる．また右辺は $\delta_1, \ldots, \delta_n$ に関して対称なので X のコホモロジー類を定める．

実際 Taylor 展開を行うと

$$\widehat{\Gamma}_X = \exp\left(-\gamma c_1(X) + \sum_{k\ge 2}(-1)^k (k-1)!\zeta(k)\,\mathrm{ch}_k(TX)\right).$$

ここで γ はオイラーの定数，$\zeta(k)$ はリーマンゼータ関数の値である．この式から $\widehat{\Gamma}_X$ は超越的な実コホモロジー類であることが分かる．このガンマ類は軌道体 (orbifold) に対しても拡張され，その場合は twisted sector にも成分をもつ ([15] 参照)．さて K 群の元 $E \in K(X)$ に対して ∇ に関する平坦切断 $s_E(t,z)$ であって極大体積極限において

$$s_E(t,z) \sim e^{-t/z} z^{-\mu} z^{c_1(X)} \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \widehat{\Gamma}_X (2\pi\mathtt{i})^{\deg/2}\,\mathrm{ch}(E)\right)$$

となるものが一意に存在する．K 群でパラメトライズされる平坦切断の族 $\{s_E(t,z)\}_{E\in K(X)}$ により $\mathbb{Z}$ 上の局所系が定まる．これが我々の考えたい整構造である．この整構造は筆者 [15] と Katzarkov-Kontsevich-Pantev[17] によって独立に導入された．

この整構造の性質をいくつか述べる．まずこの整構造は極大体積極限のまわりの局所モノドロミーを与える変換 $t \to t + 2\pi\mathtt{i}\xi$, $\xi \in H^2(X,\mathbb{Z})$ の下で不変である．(量子積は t の H^2 成分 t_2 については $e^{\langle d,t_2\rangle}$ の関数であるのでこの変換の下で ∇ は不変である．) 実際，$\xi = -c_1(L)$ となる直線束 L をとるとき

$$s_E(t + 2\pi\mathtt{i}\xi, z) = s_{E\otimes L}(t,z)$$

が成立する．つまり極大体積極限のまわりのモノドロミーは直線束のテンソル積に対応する．次にペアリングに関しては次が成立する．

$$(s_{E_1}(t, e^{\pi\mathtt{i}}z), s_{E_2}(t,z))_F = \chi(E_2, E_1)$$

ここで左辺は平坦切断同士のペアリングであるため (t,z) によらない．右辺はオイラーペアリング (向井ペアリング) であり $\sum(-1)^i \dim \mathrm{Ext}^i(E_2,E_1)$ で与えられる．この等式は Hirzeburch-Riemann-Roch から従うが，要点は $\widehat{\Gamma}_X$ がほぼ Todd 類の 2 乗根になっていることであり，次の関数等式である．

$$\Gamma(1+z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi z}{\sin \pi z} = e^{-\pi\mathtt{i}z}\frac{2\pi\mathtt{i}z}{1-e^{-2\pi\mathtt{i}z}}.$$

注意 3.1. ここで考えている K 群は位相的ベクトル束の K 群，もしくは代数的ベクトル束の K 群のどちらでもよい．ただし，Chern 指標をとっているため対応 $E \mapsto s_E$ は数値的 K 群を経由する．代数的ベクトル束の K 群を考える場合は代数的な量子コホモロジー (Chow 群の量子変形) を考える方が自然であろう．

どうしてこのような整構造が存在するのかという真の理由はまだ分かっていない．筆者はミラー対称性を手掛かりとして上のガンマ類を現象論的に発見したのであるが，ループ空間を使った次の様な説明も与えられる．ここでは Givental の Homological Geometry [9] のアイデアを使う．X のループ空間 $\mathcal{L}X = \mathrm{Map}(S^1, X)$ の普遍被覆 $\widetilde{\mathcal{L}X}$ を考え，部分集合 $\Delta \subset \widetilde{\mathcal{L}X}$ をある正則な円盤の境界値となっているループ全体とする．Givental に従い量子コホモロジーの平坦切断 (の成分) は Δ 上での無限次元の積分で与えられると考えよう．ループを回転させる S^1 作用を $\widetilde{\mathcal{L}X}$ に導入したとき，定数ループたちの集合 X

は Δ の S^1 で固定される部分集合となる．固定集合 X の Δ における法束 $N_{X/\Delta}$ は Fourier 展開により

$$N_{X/\Delta} = \bigoplus_{k>0} TX\, q^k$$

と書けるであろう．ここで q はループのパラメータである．この S^1 同変オイラー類の逆数を考えるとちょうど

$$\frac{1}{e_{S^1}(N_{X/\Delta})} = \frac{1}{\prod_{k>0}\prod_i(\delta_i + kz)} \sim z^{-\mu} z^{c_1(X)} \widehat{\Gamma}_X$$

を得る．ここで $\sim$ は無限積の ζ 正則化を表し，z は 1 点の S^1 同変コホモロジーの生成元である．従ってガンマ類は Δ 上の積分における定数ループの寄与と考えることができる．この定数ループの寄与は [9] では無視されていた部分である．また Coates-Givental による量子 Lefschetz 定理 [6] にもガンマ類の片鱗が現れている．これは X 内の完全交差 $Y \subset X$ に対して X の量子コホモロジーと Y のそれとを比較する定理であるが，その 2 つを関係づけるシンプレクティック作用素はちょうど X と Y のガンマ類の商 $\widehat{\Gamma}_X/\widehat{\Gamma}_Y$ に対応するものになっている．

4. ミラー対称性との整合性

前節で述べた整構造が正しいものであることの一つの検証はミラー対称性との整合性である．2 節で述べたようにミラー対称性は Hodge 構造の変動の間の同型を予言するが，この同型の下で K 群から定まる $\mathbb{Z}$ 上の局所系とミラー側の自然な $\mathbb{Z}$ 上の局所系が対応するかどうかが問題となる．$E \in K(X)$ に対応する平坦切断 $s_E(t,z)$ は A 模型における「A 周期」を次の式で定める．

$$\Pi_E^X(t,z) = \frac{(2\pi z)^{n/2}}{(2\pi \mathtt{i})^n}\int_X s_E(t,z), \qquad E \in K(X).$$

ここで最初の因子 $\frac{(2\pi z)^{n/2}}{(2\pi \mathtt{i})^n}$ は規格化定数である．ミラー対称性との整合性はこの A 周期が B 模型における通常の整サイクル上での周期 (あるいは振動積分) と一致することから確かめられる．ここで上の A 周期は平坦切断 s_E と単位切断 $\mathbf{1}$ とのペアリングとも見なせる．ミラーに移ると s_E に対応するものが整サイクルであり，$\mathbf{1}$ に対応するものが正則 n 形式 (あるいは振動形式) である．

以下では X を弱 Fano($c_1(X) \geq 0$) なトーリック多様体とする．この場合 X のミラーはトーリックの扇 (fan) を Newton 多面体に持つ Laurent 多項式 $W_q\colon (\mathbb{C}^\times)^n \to \mathbb{C}$ で与えられる．Laurent 多項式 W_q の係数は自由に変化させることができ，そのパラメータを q で表している．ミラー対称性の下で q は X の Kähler パラメータ ($H^2(X)$ の元) に対応する．一方 $Y \subset X$ を Calabi-Yau 超曲面とするとき，Y のミラーは $W_q^{-1}(1) \subset (\mathbb{C}^\times)^n$ のある Calabi-Yau コンパクト化により与えられる (Batyrev のミラー構成)．これらの場合に Hodge 構造の変動のレベルでミラー対称性が成立することは Givental により示されていた [10]．整構造に関しては次が言える．

定理 4.1. $E \in K(X)$ に関する X および Y の A 周期は各々のミラーの整サイクル上の振動積分および周期で与えられる．X の場合は

$$\Pi_E^X(t,z) = \frac{1}{(2\pi \mathtt{i})^n}\int_{G_E \subset (\mathbb{C}^\times)^n} e^{-W_q(x)/z}\frac{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}{x_1 \cdots x_n}.$$

Y の場合は

$$\Pi^Y_{i^*E}(i^*t,z)=\frac{1}{(2\pi\mathtt{i})^{n-1}F(q)}\int_{C_E\subset W_q^{-1}(1)}\Omega_q,\qquad \Omega_q:=\frac{\frac{dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n}{x_1\cdots x_n}}{dW_q}.$$

ここで $i\colon Y\to X$ は包含写像．$G_E\subset(\mathbb{C}^\times)^n$ は非コンパクトなサイクルであり $\Re(W_q)$ に関する Morse サイクルの和である．$C_E\subset W_q^{-1}(1)$ はコンパクトなサイクル.（これらのサイクルは E に依存する.）また $F(q)$ は正則 $n-1$ 形式 Ω_q の規格化因子であり，それ自身 Ω_q のある（モノドロミー不変な）周期として与えられる．ここで $t\in H^2(X)$ であり，右辺のパラメータ q は t の関数 $q=q(t)$（ミラー写像）である．

トーリック多様体 X 自体の場合はこの定理は [15] で示された[4]．さらにこの場合は整構造が A 側と B 側で完全に一致することも分かっている．また先に述べたように超曲面 $Y\subset X$ の量子コホモロジーは量子 Lefschetz 定理で X の量子コホモロジーから計算できるが，一般に我々の整構造は量子 Lefschetz と整合的であると期待される．

例 4.2. $X=\mathbb{P}^{n-1}$ の場合．$H^2(X,\mathbb{Z})$ の正の基底をとりそれに関する $H^2(X)$ の座標を t と書く．$\mathbb{P}^{n-1}$ のミラーは

$$W_q(x_1,\dots,x_{n-1})=x_1+\cdots+x_{n-1}+\frac{q}{x_1\cdots x_{n-1}}$$

なる Laurent 多項式の族で与えられる．ミラー写像は $H^2(X)\ni t\mapsto q=e^t\in\mathbb{C}^\times$ である．パラメータを $q>0,\ t\in\mathbb{R},\ z>0$ の範囲で考える．このとき W_q の臨界点は $\mathrm{cr}_i=\zeta_n^i(q^{1/n},\dots,q^{1/n})$ $(i\in\mathbb{Z}\mod n)$ の n 個である．ここで $\zeta_n=\exp(2\pi\mathtt{i}/n)$．実の臨界点 cr_0 に対応する Morse サイクル $G_0=(\mathbb{R}_{>0})^{n-1}$ 上での振動積分は構造層 $\mathcal{O}$ の A 周期と一致し，さらに具体的な超幾何関数としても与えられる．

$$\begin{aligned}\Pi^X_{\mathcal{O}}(t,z)&=\frac{1}{(2\pi\mathtt{i})^{n-1}}\int_{G_0}e^{-W_q(x)/z}\\&=\sum_{d=0}^{\infty}\frac{e^{dt}}{(-z)^{nd}}2\pi\mathtt{i}\,\mathrm{Res}_{p=0}\,\frac{e^{-p(t-n\log z)}}{\Gamma(1+d-p)^n}\frac{dp}{(e^{\pi\mathtt{i}p}-e^{-\pi\mathtt{i}p})^n}.\end{aligned}$$

その他の臨界点からの Morse サイクルは G_0 からモノドロミー変換によって生成される．例えば $-\frac{n}{4}\le k\le\frac{n}{4}$ の時は cr_k に付随する Morse サイクル G_k は G_0 に変換 $q\to e^{2\pi\mathtt{i}k}q$ を施して得られるので，$\mathcal{O}(-k)$ に対応する．$\frac{n}{4}<|k|\le\frac{n}{2}$ に対してはサイクルの Picard-Lefschetz 変換の効果があるため，G_k は $\mathcal{O}(-k)+\sum_{|l|<|k|}c_{k,l}\mathcal{O}(-l)$ なる形の K 群の元に対応する．($c_{k,l}$ は整数)

また Grassmann 多様体 $G(r,n)$($\mathbb{C}^n$ 内の r 次元複素部分空間全体) に対しては Hori-Vafa によるミラー [12] と我々の整構造が整合的であることが分かる．$G(r,n)$ の Hori-Vafa ミラーは $\mathbb{P}^{n-1}$ のミラーの r 次の反対称積として得られる．$x_1,\dots,x_r$ を $(\mathbb{C}^\times)^{n-1}$ の r 個の元とする．$\widetilde{W}_q\colon(\mathbb{C}^\times)^{r(n-1)}\to\mathbb{C}^\times$ を次で定める．

$$\widetilde{W}_q(x_1,\dots,x_r)=\sum_{i=1}^{r}W_{(-1)^{r-1}q}(x_i)$$

[4] さらに [15] では X が滑らかな Deligne-Mumford stack である場合も扱っている．トーリック Deligne-Mumford stack の量子コホモロジーは Tom Coates, Alessio Corti, Hsian-Hua Tseng 氏との共同研究で計算されている．

ここで右辺の W_q は上述の $\mathbb{P}^{n-1}$ のミラーである．r 次の対称群 S_r を $\widetilde{W}_q$ の定義域 $(\mathbb{C}^\times)^{r(n-1)}$ に r 個の変数 $x_1, \dots, x_r$ の置換として作用させる．Sergey Galkin, Vasily Golyshev 氏との研究[5]において次が得られた．

定理 4.3. $E \in K(G(r,n))$ に対して，S_r 作用に関して完全反対称な非コンパクトサイクル $G_E \subset (\mathbb{C}^\times)^{r(n-1)}$ が存在して，E の A 周期は G_E 上の振動積分として表わされる．

$$\Pi_E^{G(r,n)}(t,z) = \frac{(2\pi\mathtt{i})^{\binom{r}{2}-r(n-1)}}{r!((-1)^r z)^{\binom{r}{2}}} \int_{G_E} \prod_{i<j} (X_i - X_j) e^{-\widetilde{W}_q(x_1,\dots,x_r)/z} \frac{dx}{x}$$

ただし $t \in H^2(G(r,n))$ であり $X_i = q/(x_{i,1} \cdots x_{i,n})$, $dx/x = \bigwedge_i \bigwedge_j dx_{i,j}/x_{i,j}$.

Grassmann 多様体の量子コホモロジーと $\mathbb{P}^{n-1}$ の量子コホモロジーの間の関係は Bertram–Ciocan-Fontanin–Kim[3] によるアーベル/非アーベル商対応の枠組みでとらえることができる．我々の整構造はさらに一般にアーベル/非アーベル商対応と整合的であることが期待される．

5. 双有理幾何との関係

整構造を使うとき，Ruan の予想は次の様な関手的な形で定式化できる．

予想 5.1. [16] 空間 X と Y が導来同値 ($D\,\mathrm{Coh}(X) \cong D\,\mathrm{Coh}(Y)$) であるとする．このときある複素多様体 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M} \times \mathbb{C}^\times$ 上の大域的な量子 D 加群 $(F, \nabla, (\cdot,\cdot)_F)$ が存在して次が成立する．

- ∇ は $z=0$ で次の様な極構造をもつ有理型接続で平坦である．
$$\nabla\colon \mathcal{O}(F) \to \mathcal{O}(F)(\mathcal{M} \times \{0\}) \otimes (\pi^*\Omega^1_{\mathcal{M}} \oplus \mathcal{O}\frac{dz}{z})$$
- $(\cdot,\cdot)_F$ は非退化で $\mathbb{C}$ 双線形なペアリング $F_{(t,-z)} \times F_{(t,z)} \to \mathbb{C}$ であって ∇ に関して不変である．
- ある開集合 $U_X \subset \mathcal{M}$, $U_Y \subset \mathcal{M}$ が存在して，それら各々の上では $(F, \nabla, (\cdot,\cdot)_F)$ は X または Y の量子 D 加群と同型になる．
- 平坦ベクトル束 $(F|_{\mathcal{M}\times\mathbb{C}^\times}, \nabla)$ の平坦切断からなる $\mathbb{Z}$ 上の局所系 $F_{\mathbb{Z}} \subset \mathrm{Ker}\,\nabla$ が $\mathcal{M}$ 上大域的に存在して，U_X, U_Y 上では 3 節で述べた K 群から定まる整構造と一致する．
- U_X の点と U_Y の点を結ぶ道 c をとるとき，道 c に沿っての解析接続が K 群に誘導する写像 $\Phi_c\colon K(X) \to K(Y)$ は X と Y の (道 c に応じた) ある導来同値から導かれる．

この予想における $\mathcal{M}$ はミラー対称性が知られているときはミラー側の複素モジュライ空間として得ることができる．ミラー対称性を使わずに $\mathcal{M}$ を得る方法としては前に述べたように導来圏の安定性条件の空間を使う方法が考えられるが，筆者には安定性条件の空間の上にどのように大域的量子 D 加群を構成したらよいかわからない．

また X, Y がトーリック Calabi-Yau であって扇の三角形分割の仕方だけを変更したものであるとき，Borisov-Horja[4] はトーリック Calabi-Yau に付随する GKZ 系の解析接続が K 群の間の Fourier-Mukai 変換によって誘導されることを示していた．トーリック

[5] Golyshev 氏により導入された量子コホモロジーの「Apery 定数」なる概念があり，この研究では Grassmann 多様体に対して Apery 定数がガンマ類からくることを示した．

Calabi-Yau に付随する GKZ 系は扇の三角形分割の取り方によらず大域的な D 加群を与えるが，GKZ 系の底空間は X および Y に対応する極限点を持っており，それらの近傍では GKZ 系は X または Y の量子 D 加群に同型になる．従って上の予想はトーリック Calabi-Yau に対しては Borisov-Horja の計算から正しいことが分かる．

またこの予想から $\mathcal{M}$ の基本群と $\mathrm{Auteq}(D\,\mathrm{Coh}(X))$ の間に関係があることが予想される．例えば X が A_n 特異点のクレパント解消である場合，通常の Hori-Vafa ミラーにより与えられる $\mathcal{M}$ の基本群は $\tilde{A}_{n-1} \rtimes \mathbb{Z}_n$ でありこれは $\mathrm{Auteq}(D\,\mathrm{Coh}(X))$ の部分群になっている [7, 14]. ($\tilde{A}_{n-1}$ は affine braid 群)

6. 高種数理論における保型性

上の予想は高種数の Gromov-Witten 理論に対しても拡張することができる．ここでは Givental による量子化の形式 [11] を用いて，高種数の理論を種数 0 の理論 (量子コホモロジー) の幾何学的量子化と見なすことにする．一言で言えば，種数 0 の理論 (量子 D 加群) における対称性やモノドロミーが高種数の理論に対して量子化された形で持ち上がると予想される．それから Gromov-Witten ポテンシャルのある種の保型性が従うと考えられる．

予想 5.1 によれば X と Y の量子 D 加群は互いに同型になるが，ある付加的な情報が異なっている．その情報とは opposite subspace と呼ばれる Hodge 構造の分解を与えるデータであり，その変化は K 群の間の写像 Φ_c から読み取ることができる．この opposite subspace は幾何学的量子化において偏極 (polarization) と呼ばれるデータに対応し，それは Heisenberg 代数の既約表現である Fock 空間を定義する．Von-Neumann–Stone の定理により異なる偏極に対応する Fock 空間は射影的に同一視される．大域的量子 D 加群のモノドロミーは opposite subspace すなわち偏極を一般には保たないため，高種数の Gromov-Witten ポテンシャルは関数としてはモノドロミー不変とは言えない．そこで偏極の変化を考えに入れ，異なる偏極に対応する Fock 空間同士を張り合わせたとき，Gromov-Witten ポテンシャルはモノドロミー不変となり Fock 空間を張り合わせた「Fock 層」の一価な切断と見なせると予想される．一方で，整構造の誘導する実構造を考えると，偏極 (opposite subspace) として Hodge 構造の複素共役をとることができる．複素共役から定まる偏極 (holomorphic polarization) は明らかにモノドロミー不変であるため，Gromov-Witten ポテンシャルをこの偏極の下でのポテンシャルに変換したものは関数としてモノドロミー不変になるであろう．ただしこの場合ポテンシャルは正則ではなくなる．以上は物理学者たちのアイデアである [2, 18, 1].

最近筆者は Tom Coates 氏との共同研究においてこのアイデアを数学的に正確にし，局所射影平面 ($K_{\mathbb{P}^2}$ の全空間：非コンパクト Calabi-Yau 多様体) の Gromov-Witten ポテンシャルが quasi-modular function になることを Givental の量子化の形式から導いた．これは Aganagic-Bouchard-Klemm[1] によって予言されていたことである．ここでの保型性は $K_{\mathbb{P}^2}$ のミラーが 3 レベル構造を持つ楕円曲線の族であることから来ている．また modular ではなく quasi-modular になる理由は先ほど述べたように通常の偏極はモノドロミー不変ではないが，複素共役で定まる偏極がモノドロミー不変になるということからきている．

参考文献

1. M. Aganagic, V. Bouchard, A. Klemm, *Topological Strings and (almost) modular forms.* Comm. Math. Phys., 237 (2003), pp.533–556.

2. M. Bershadsky S. Cecotti, H. Ooguri, C. Vafa *Kodaira-Spence theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes.* Commun. Math. Phys., 165 (1994) pp.311–427.
3. Aaron Bertram, Ionut Ciocan-Fontatnin, Bumsig Kim, *Gromov-Witten invariants for abelian and nonabelian quotients.* J. Algebraic Geom. 17 (2008), no. 2, pp.275–294.
4. L. A. Borisov, R. P. Horja, *Mellin-Barnes integrals as Fourier-Mukai transforms.* Adv. Math. 207 (2006), pp.876–927.
5. Tom Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories* Ann. of Maths. (2), 166 (2007), pp.317–345.
6. Tom Coates, A. B. Givental, *Quantum Riemann-Roch, Lefschetz and Serre.* Ann. of Math. (2), 165 (2007), pp.15–53.
7. Tom Coates, Alessio Corti, Hiroshi Iritani, Hsian-Hua Tseng, *Computing genus zero twisted Gromov-Witten invariants.* Duke Math. J. 147 (2009), no. 3, pp.377–438.
8. Tom Coates, Hiroshi Iritani, Hsian-Hua Tseng, *Wall-Crossings in Toric Gromov-Witten Theory I: crepant examples.* Geom. Topol. 13, 2009, pp.2675–2744.
9. A. B. Givental, *Homological geometry I. Projective hypersurfaces.* Selecta Math. (N.S.) 1 (1995), no. 2, pp.325–345.
10. Givental, Alexander B. *A mirror theorem for toric complete intersections.* Topological field theory, primitive forms and related topics (Kyoto, 1996), pp.141–175, Progr. Math., 160, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998.
11. A. B. Givental, *Gromov-Witten invariants and quantization of quadratic hamiltonians.* Dedicated to the memory of I. G. Petrovskii on the occasion of his 100 anniversary. Mosc. Math. J. 1 (2001), no.4, pp.551–568, 645.
12. Kentaro Hori, Cumrum Vafa *Mirror Symmetry.* arXiv:hep-th/0002222.
13. Shinobu Hosono, *Central charges, symplectic forms, and hypergeometric series in local mirror symmetry.* In: Mirror Symmetry V, AMS/IP Stud. Adv. Math. Phys., 13 (2009), pp.463–495.
14. Akira Ishii, Kazushi Ueda, Hokuto Uehara, *Stability conditions on A_n singularities*, J. Differential Geom. 84 (2010), no. 1, pp.87–126.
15. Hiroshi Iritani, *An integral structure in quantum cohomology and mirror symmetry for toric orbifolds.* Adv. Math., 222 (2009), pp.1016–1079.
16. Hiroshi Iritani, *Ruan's conjecture and integral sturctures in quantum cohomology.* New Developments in Algebraic Geometry, Integrable Systems and Mirror Symmetry (Kyoto 2008), Adv. Stud. Pure. Math. 59, 2010.
17. Ludmil Katzarkov, Maxim Kontsevich, Tony Pantev *Hodge theoretic aspects of mirror symmetry.* From Hodge theory to integrability and TQFT tt^*-geometry, pp. 87–174, Proc. Sympos. Pure Math., 78, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
18. E. Witten, *Quantum background independence in string theory.* Nucl. Phys. B 373, 187 (1992) hep-th.9306122.

〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町
E-mail address: iritani@math.kyoto-u.ac.jp