保型形式の周期と保型 L 函数の特殊値

古澤 昌秋*
大阪市立大学大学院理学研究科

2010 年 8 月 11 日

Contents

1 導入

1.1 保型形式の周期

まず、保型形式の周期とは何かについて説明する。次のような状況を考える。

- F は代数体、すなわち有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体とする。
- $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F = \prod'_v F_v$ を F の adele 環とする。ここで F_v は F の素点 v における完備化、$\prod'$ は制限直積を表す。

*これは、当日の発表資料をほぼそのまま原稿におこしたものです。そのためにあいまいな点、説明の不十分な点が多々あると思いますが、何卒御寛恕くださいますよう御願い致します。なお、古澤の研究は JSPS Grant 22540029 によって援助されています。

- G は F 上定義された reductive 代数群とする。
- (π, V_π) を $G(\mathbb{A})$ の保型表現とする。ただし、ここで V_π は表現 π を実現する保型形式の空間を表す。
- H は F 上定義された G の代数的部分群とする。

定義 1 (H-period)

$$P_H(\phi) = \int \left(\phi\,|_{H(\mathbb{A})}\right)(h)\;dh$$

によって定義される *linear form* $P_H : V_\pi \to \mathbb{C}$ のことを H*-period* という。ここで積分は状況に応じて、$H(F)\backslash H(\mathbb{A})$ であったり、$H(F)\;Z(\mathbb{A})\backslash H(\mathbb{A})$ であったりする。また、収束に関しても、*regularized integral* を考えなければならないかもしれない。

より一般に次のような定義が考えられる。

定義 2 ((H,σ)-period) (σ, V_σ) を部分群 $H(\mathbb{A})$ の保型表現とするとき,

$$P_{H,\sigma}(\phi,\varphi) = \int \left(\phi\,|_{H(\mathbb{A})}\right)(h)\,\varphi(h)\,dh, \quad \phi \in V_\pi,\ \varphi \in V_\sigma,$$

によって定義される *bilinear form* $P_{H,\sigma} : V_\pi \times V_\sigma \to \mathbb{C}$ を ϕ の (H,σ)*-period* という。

いま、H^Δ で H を diagonal に $G \times H$ に埋め込んだものとすると、

$$P_{H,\sigma}(\phi,\varphi) = P_{H^\Delta}(\phi \otimes \varphi)$$

である。すなわち、$P_{H,\sigma}(\phi,\varphi)$ は $(G \times H)(\mathbb{A})$ の保型形式 $\phi \otimes \varphi$ の H^Δ-period であると解釈できるので、本質的には前者の type の period を考えれば十分である。

1.2 なぜ興味深いのか

これについては下記以外にも様々な理由が考えられると思うが、発表者にとっては次の二つの理由だけでも十分に興味深い。

- period はしばしば、保型 L 函数の特殊値や留数と深い関係がある。(より一般に、保型 L 函数の意義深い点での展開の leading term と何らかの周期を関係づけることを夢想することには意味があると思われる。)
- period が消える、消えない、ということは表現の分岐則 $\pi\,|_{H(\mathbb{A})}$ と密接な関係がある。

上記のように、period は数論、表現論の両面から大変興味深い研究対象である。

1.3　例：Waldspurger の定理

ここでひとつの輝かしい例をあげておきたい。

定理 1 (Waldspurger [18])

- E を F の二次拡大体とする。
- $X(E)$ を F 上の *quaternion algebra* で E を含むもの全体の同型類とする。
- π を $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F)$ の既約 *cuspidal representation* とする。
- π_E を π の $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_E)$ への *base change lift* とする。
- $X(E,\pi)$ を、π の *Jacquet-Langlands correspondent* とよばれる $PD^\times(\mathbb{A}_F)$ の表現 π^D の存在するような $D \in X(E)$ の全体とする。

このとき、

$$L(1/2,\pi_E) \neq 0 \Longleftrightarrow \exists D \in X(E,\pi) \quad \textit{such that}$$
$$P^D\left(\phi^D\right) = \int_{\mathbb{A}_F^\times E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times} \phi^D(t)\,dt \neq 0 \quad \textit{for some } \phi^D \in \textit{the space of } \pi^D.$$

これまでに数々の重要な応用をもたらしているこの定理に関して、以下のことに注意しておく。

- χ_E を E/F に対応する quadratic character とすると、
$$L(s,\pi_E) = L(s,\pi)\,L(s,\pi\otimes\chi_E)$$
である。
- 大まかに言うと、実は $|P^D\left(\phi^D\right)|^2$ が $L(s,\pi_E)$ の函数等式の中心における特殊値 $L(1/2,\pi_E)$ を与えている。
  - 応用：(Guo [9]) $L(1/2,\pi)\,L(1/2,\pi\otimes\chi_E) \geq 0$
    これは GRH （一般化されたリーマン予想）と consistent である。
  - Classical version: Kohnen-Zagier [14], Katok-Sarnak [13]
- Gross-Prasad 予想 [7, 8] は、これを一般化して、$\mathrm{SO}(V) \subset \mathrm{SO}(W)$、ただし $\dim W - \dim V$ は奇数、という状況を考えている。(Recall: $\mathrm{PGL}_2 \simeq \mathrm{SO}(2,1)$)
- 市野-池田 [10] は、Gross-Prasad 予想の精密化を simple かつ elegant に与えている。この論文はそれに留まらず、今後のこの方面の研究に大きな影響と指針を与えるものと思われる。
- local Gross-Prasad 予想に関しては、最近の Waldspurger の一連の preprint が多大なる進展をもたらしている。

2　F-Matin-Shalika による GSp(4) に関する project

2.1　Bessel period とスピノル L 函数の中心における特殊値

ここでは、古澤-Martin-Shalika による最近の研究について触れておく。まず、考える状況は次の通りである。
Set Up

- F, E, $X(E)$ はこれまでの通り。
- $D \in X(E)$ に対して、$D \ni x \mapsto \bar{x} \in D$ で quaternion algebra D の involution を表す。
- G_D で D 上の次数 2 の similitude quaternion unitary group

$$G_D = \left\{ g \in \mathrm{GL}_2(D) \mid g^* \, J \, g = \lambda\,(g)\ J,\, \lambda(g) \in F^\times \right\}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  を表す。ただし、$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ に対して、$g^* = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix}$ である。ここで、$D = \mathrm{M}_2(F)$ のときには、$G_D \simeq \mathrm{GSp}(4)$ であることに注意しておく。

- G_D は GSp(4) の inner form である。
- $R_D := T\, U_D$ ただし

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in E^\times \right\}, \quad U_D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \mathrm{tr}(X) = 0 \right\}.$$

- $\bar{R}_D := T\, \bar{U}_D$, $\bar{U}_D = \{ {}^t u \mid u \in U_D \}$
- Ω: $\mathbb{A}_E^\times / E^\times$ の character　　ψ: $\mathbb{A}_F / F$ の non-trivial character
- $\eta \in E^\times$ で $\eta^\sigma = -\eta$ となる元 η を一つとり固定する。ここで σ は、$\mathrm{Gal}(E/F)$ の唯一の non-trivial な元を表す。
- $\tau_D \left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] := \Omega(a)\, \psi\, [\mathrm{tr}(-\eta X)]$
- $\xi_D \left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix} \right] := \Omega\,(a^\sigma)\ \psi\,[\mathrm{tr}\,(-\eta^{-1} Y)]$
- π は $\mathrm{GSp}_4\,(\mathbb{A}_F)$ の既約 cuspidal 表現で globally generic とする。すなわち、

$$\exists \phi \in V_\pi \quad \text{such that} \quad W\,(\phi) = \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)} \phi(n)\, \theta(n)\, dn \neq 0$$

但し N は GSp(4) の Borel 部分群の unipotent radical を、θ は $N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)$ の non-degenerate character を表す。

- $\mathcal{L}(E,\pi)$ を、$D \in X(E)$ と $G_D(\mathbb{A}_F)$ の既約 cuspidal 表現 π^D で π と同じ L 函数を持つものの pair (D,π^D) の全体とする。ここで次のことに注意しておく。いま π_{hol} を Saito-Kurokawa lifting でないような正則 Siegel 保型形式に対応する cuspidal 表現とする。このとき、

$$\exists \pi_{\mathrm{gen}} \quad \text{which is globally generic and having the same } L\text{-function as } \pi_{\mathrm{hol}}$$

と予想されている。これを認めると、$(\mathrm{M}_2(F),\pi_{\mathrm{hol}}) \in \mathcal{L}(E,\pi_{\mathrm{gen}})$ である。

このような状況の下で、Böcherer の予想 [2] の一般化である次を予想する。

予想 1 ([6])

$$L\left(1/2,\pi_E \otimes \Omega^{-1}\right) \neq 0 \Longleftrightarrow \exists \left(D,\pi^D\right) \in \mathcal{L}(E,\pi) \quad \textit{such that}$$
$$P_D\left(\phi^D\right) := \int_{Z_D(\mathbb{A}_F)\,R_D(F)\backslash R_D(\mathbb{A}_F)} \phi^D(r)\,\tau_D^{-1}(r)\,dr \neq 0 \quad \textit{for some } \phi^D \in V_{\pi^D}$$

さらに、このような組 $\left(D,\pi^D\right)$ が存在するならば、それはただ一つであり、π によって決まる定数 $C\left(\pi,\Omega^{-1},\phi^D\right)$ が存在して、

$$C\left(\pi,\Omega^{-1},\phi^D\right)\cdot L\left(1/2,\pi_E\otimes\Omega^{-1}\right) = \left|P_D\left(\phi^D\right)\right|^2$$

といった形の特殊値の明示公式が成りたつ。ここで π_E は π の $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_E)$ への *base change* を表し、$L(s,\pi)$ は π のスピノル L 函数を表す。

我々は、相対跡公式の手法によって、この予想を証明することを目指している。

2.2 基本補題の Hecke 環全体への拡張

- Waldspurger の定理の別証明を与えた Jacquet の GL(2) に関する二つの相対跡公式 [11, 12] の GSp(4) への一般化が論文 [6] において定式化され、Hecke 環の単位元に関する基本補題が証明されている。第一の相対跡公式は Ω が自明な場合に限られるが、第二の方にはその制限はない。

- Erez Lapid から古澤への示唆に触発されて、論文 [4] において第三の相対跡公式が定式化され、Hecke 環の単位元に関する基本補題が証明されている。この相対跡公式については、Ω についての制限がなく、π の base change を用いないという利点がある。

- この場合の基本補題とは、相対跡公式に現れる local な軌道積分の間の等式である。

基本補題について我々は最近、次を証明した。

定理 2 (F-Martin-Shalika [5]) 第三の相対跡公式に関して、*Hecke* 環の元すべてについて、基本補題が成立する。

証明は軌道積分を explicit に計算することによって得られる。もう少し詳しく言うと、まず、Hecke 環の任意の元に関する軌道積分を単位元に関する退化した軌道積分の一次結合で表す。これには、Plancherel 測度を用いた Fourier inversion が使われる。また、一次結合で表したときの係数が組み合わせ論的に明示されることも肝要である。これらに関しては、Macdonald 多項式の理論が使われる。

我々の証明は具体的な計算に基づくものであり、決して理想的とは言えない。Ngô [15, 16] による Jacquet-Ye の基本補題の証明に見られるような幾何学的議論の可能性を探ることは興味深い問題であると思われる。

3 有限群の場合の跡公式

周期と保型 L 函数の間の関係を調べる有効な方法の一つとして、相対跡公式の理論がある。これは、Jacquet によって体系的な研究が開始されたものであるが、その源流は Selberg 跡公式や Petersson-Kuznetsov 跡公式にある。そこで、代数学シンポジウム午前講演の趣旨に沿うべく、これらの理論の雰囲気を少しでも多くの方々に伝えるために、有限群の場合にこれらがどのような考え方に対応しているかをここで説明したい。

3.1 Selberg 跡公式

(参考文献：Arthur [1], Tamagawa [17]) 次のような状況を考える。

- G を有限群、Γ を G の部分群とする。
- (σ, V_σ) を Γ の表現、

  $$L^2(\Gamma\backslash G, \sigma) := \mathrm{Ind}_\Gamma^G \sigma = \{\phi : G \to V_\sigma \mid \phi(\gamma g) = \sigma(\gamma)\,\phi(g),\, \forall\gamma \in \Gamma,\, \forall g \in G\}$$

  とし、R を G の $L^2(\Gamma\backslash G, \sigma)$ への右正則表現とする。
- $C_c(G)$ を G 上の $\mathbb{C}$ に値をとる函数全体の空間とするとき、$f \in C_c(G)$ に対して、$R(f) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(L^2(\Gamma\backslash G, \sigma))$ を

  $$R(f) := \int_G f(y)\,R(y)\,dy = \sum_{y\in G} f(y)\,R(y)$$

  によって定義する。

このとき、$\mathrm{tr}\,[R(f)]$ を計算してみよう。

補題 1 いま $K_f(x,y)=\sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma y)\,\sigma(\gamma)$ とすると、

$$\mathrm{tr}\,[R(f)]=\int_{\Gamma\backslash G}\mathrm{tr}\,[K_f(x,x)]\;dx. \tag{1}$$

（証明）$\phi\in L^2\left(\Gamma\backslash G,\sigma\right)$ とすると、

$$\begin{aligned}(R(f)\phi)\,(x)&=\int_G f(y)\,\phi(xy)\,dy=\int_G f\left(x^{-1}y\right)\,\phi(y)\,dy\\ &=\int_{\Gamma\backslash G}\sum_{\gamma\in\Gamma} f\left(x^{-1}\gamma y\right)\,\phi(\gamma y)\,dy=\int_{\Gamma\backslash G}K_f(x,y)\,\phi(y)\,dy.\end{aligned}$$

$x\in G$ と $v\in V_\sigma$ に対して、$\phi_{x,v}\in L^2\left(\Gamma\backslash G,\sigma\right)$ を

$$\phi_{x,v}(y)=\begin{cases}\sigma(\gamma)v, & \text{if } y=\gamma x,\ \gamma\in\Gamma,\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

によって定めると、

$$(R(f)\phi_{x,v})\,(x)=K_f(x,x)\phi_{x,v}(x).$$

したがって、(1) が成り立つ。（証明終）

補題 2 (Geometric expansion)

- $\{\Gamma\}$ を Γ の共役類全体の集合、
- $\gamma\in\Gamma$ に対して、Γ_γ を γ の Γ における中心化群、G_γ を γ の G における中心化群、
- χ_σ を σ の指標、

とする。このとき、

$$\mathrm{tr}\,[R(f)]=\sum_{\gamma\in\{\Gamma\}}a_\Gamma^G(\gamma)\,\chi_\sigma(\gamma)\,I_G(\gamma,f) \tag{2}$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned}&a_\Gamma^G(\gamma)=\mathrm{Volume}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)=\#\left(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma\right),\\ &I_G(\gamma,f)=\int_{G_\gamma\backslash G}f\left(x^{-1}\gamma x\right)\,dx\quad \textit{(orbital integral)}.\end{aligned}$$

（証明）

$$\mathrm{tr}\left[K_f(x,x)\right]=\sum_{\gamma\in\Gamma} f\left(x^{-1}\gamma x\right)\,\chi_\sigma(\gamma)=\sum_{\gamma\in\{\Gamma\}}\chi_\sigma(\gamma)\sum_{\delta\in\Gamma_\gamma\backslash\Gamma} f\left(x^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta x\right)$$

より、

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left[R(f)\right]&=\int_{\Gamma\backslash G}\mathrm{tr}\left[K_f(x,x)\right]\,dx=\sum_{\gamma\in\{\Gamma\}}\chi_\sigma(\gamma)\int_{\Gamma_\gamma\backslash G} f\left(x^{-1}\gamma x\right)\,dx\\&=\sum_{\gamma\in\{\Gamma\}}\chi_\sigma(\gamma)\cdot\#\left(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma\right)\int_{G_\gamma\backslash G} f\left(x^{-1}\gamma x\right)\,dx.\end{aligned}$$

よって、(2) が成り立つ。（証明終）

いま、$\Pi(G)$ を G の既約表現の同型類とし、$\pi\in\Pi(G)$ に対して $a^G_{\Gamma,\sigma}(\pi)$ で表現 π の $L^2\left(\Gamma\backslash G,\sigma\right)$ における multiplicity を表すことにする。このとき、$\mathrm{tr}\left[R(f)\right]$ の spectral expansion

$$\mathrm{tr}\left[R(f)\right]=\sum_{\pi\in\Pi(G)} a^G_{\Gamma,\sigma}(\pi)\,I_G(\pi,f),\quad I_G(\pi,f)=\mathrm{tr}\left[\pi(f)\right]$$

が明らかに成り立つ。したがって、geometric expansion と spectral expansion を比較することによって次の跡公式が得られる。

定理 3 (有限群の Selberg 跡公式)

$$\sum_{\gamma\in\{\Gamma\}} a^G_\Gamma(\gamma)\,\chi_\sigma(\gamma)\,I_G(\gamma,f)=\sum_{\pi\in\Pi(G)} a^G_{\Gamma,\sigma}(\pi)\,I_G(\pi,f). \tag{3}$$

系 1 (Frobenius の相互則)

$$\dim_{\mathbb{C}}\,\mathrm{Hom}_\Gamma\left(\pi\mid_\Gamma,\sigma\right)=\dim_{\mathbb{C}}\,\mathrm{Hom}_G\left(\pi,L^2\left(\Gamma\backslash G,\sigma\right)\right). \tag{4}$$

（系の証明）Selberg 跡公式 (3) において試験函数として $f(x)=\chi_\pi\left(x^{-1}\right)$ をとると、(3) の左辺は、

$$\begin{aligned}&\sum_{\gamma\in\{\Gamma\}} a^G_\Gamma(\gamma)\,\chi_\sigma(\gamma)\int_{G_\gamma\backslash G}\chi_\pi\left(x\gamma^{-1}x^{-1}\right)\,dx=\sum_{\gamma\in\{\Gamma\}}\#\left(\Gamma_\gamma\backslash G\right)\,\chi_\sigma(\gamma)\,\chi_\pi\left(\gamma^{-1}\right)\\&=\#(G)\cdot\frac{1}{\#(\Gamma)}\sum_{\gamma\in\Gamma}\chi_\sigma(\gamma)\,\chi_\pi\left(\gamma^{-1}\right).\end{aligned}$$

一方、(3) の右辺は、

$$\sum_{\tau\in\Pi(G)} a^G_{\Gamma,\sigma}\left(\tau\right)\int_G\chi_\tau(x)\,\chi_\pi\left(x^{-1}\right)\,dx=\#(G)\cdot a^G_{\Gamma,\sigma}\left(\pi\right).$$

したがって、(4) が成り立つ。（系の証明終）

3.2 Petersson-Kuznetsov 跡公式

(参考文献：Cogdell [3]) 今度は以下のような状況を考える。

- G は有限群とする。
- N は G の部分群、$\psi : N \to \mathbb{C}^\times$ は N の 1 次元表現で、

  $$\mathcal{W}(\psi) := \operatorname{Ind}_N^G \psi = \{\phi : G \to \mathbb{C} \mid \phi(ng) = \psi(n)\phi(g),\ \forall n \in N,\ \forall g \in G\}$$

  は multliplicity free であるとする。

いま、$\mathcal{W}(\psi)$ に現れる既約表現の全体を $\Pi(G, \psi)$ とすると、

$$\mathcal{W}(\psi) = \bigoplus_{\pi \in \Pi(G,\psi)} V_\pi$$

である。このとき、

$$V_\pi^\psi := \{v \in V_\pi \mid \pi(n)v = \psi(n)v,\ \forall n \in N\}$$

とし、V_π^ψ の元を V_π の Bessel vector とよぶ。Frobenius の相互則により、

$$\operatorname{Hom}_G\left(\mathcal{W}(\psi), V_\pi\right) \simeq V_\pi^\psi$$

だから multiplicity free の仮定により、$\dim_{\mathbb{C}} V_\pi^\psi = 1$ である。次に V_π の G-invariant な non-zero Hermitian form $\langle\ ,\ \rangle$ を一つ取り固定し、$v_0 \in V_\pi^\psi$ で $\langle v_0, v_0\rangle = 1$ となる v_0 を一つとり、$J_\pi : G \to \mathbb{C}$ を

$$J_\pi(g) := \langle \pi(g)v_0, v_0\rangle$$

によって定義する。J_π は明らかに v_0 の取り方によらない。J_π を $\pi \in \Pi(G, \psi)$ の Bessel function とよぶ。このとき、

$$J_\pi(n_1 g n_2) = \left\langle \pi(gn_2)v_0, \pi(n_1)^{-1}v_0\right\rangle = \psi(n_1 n_2)\, J_\pi(g), \quad \forall n_1, n_2 \in N$$

が成り立つ。また、J_π は右正則表現によって π の multliple を生成する。したがって、$V_\pi^\psi = \mathbb{C}\, J_\pi$ が成り立っている。

$\phi \in \mathcal{W}(\psi)$ に対して、$K(\phi, \bullet) : G \to \mathbb{C}$ を

$$K(\phi, x) := \frac{1}{\#(N)} \int_N \phi(xn)\, \psi(n)^{-1}\, dn$$

によって定義し、Kloosterman distribution とよぶ。

補題 3 $\phi \in \mathcal{W}(\psi)$ を $\phi = \sum_{\pi\in\Pi(G,\psi)} \phi_\pi \quad (\phi_\pi \in V_\pi)$ と分解したとき、

$$K(\phi, \bullet) = \sum_{\pi\in\Pi(G,\psi)} \phi_\pi(1) \cdot J_\pi \tag{5}$$

が成り立つ。

(証明) $K(\phi, \bullet) = \sum_\pi K(\phi_\pi, \bullet)$ かつ $K(\phi_\pi, \bullet) \in V_\pi^\psi$ は明らか。$K(\phi_\pi, \bullet) = c_\pi \cdot J_\pi$ とすると $J_\pi(1) = 1$ より、

$$c_\pi = K(\phi_\pi, 1) = \frac{1}{\#(N)} \int_N \phi_\pi(n)\, \psi(n)^{-1}\, dn = \phi_\pi(1).$$

したがって、(5) が成り立つ。(証明終)

では、$\phi_\pi(1)$ はどのように求められるだろうか。

補題 4 $\pi, \pi' \in \Pi(G, \psi)$ とする。このとき、$\phi_{\pi'} \in V_{\pi'}$ に対して

$$J_\pi * \phi_{\pi'} = \frac{\delta_{\pi,\pi'} \cdot \#(G)}{\dim_{\mathbb{C}} V_\pi} \cdot \phi_{\pi'} \tag{6}$$

が成り立つ。但しここで、$(\Phi_1 * \Phi_2)(x) = \int_G \Phi_1(xy)\, \Phi_2(y^{-1})\, dy$ かつ $\delta_{\pi,\pi'}$ は *Kronecker's delta* を表す。

(証明) $\phi_{\pi'} \mapsto J_\pi * \phi_{\pi'}$ は、$V_{\pi'}$ から V_π への intertwining map であるから、$\pi \simeq \pi'$ の場合以外は $J_\pi * \phi_{\pi'} = 0$ である。一方、$\pi = \pi'$ の場合、

$$\exists C \in \mathbb{C} \quad \text{such that} \quad J_\pi * \phi_\pi = C\phi_\pi, \quad \forall \phi_\pi \in V_\pi.$$

よって、特に $\phi_\pi = J_\pi$ とすると、

$$C = (J_\pi * J_\pi)(1) = \int_G |\langle \pi(g)v_0, v_0\rangle|^2\, dg = \frac{\#(G)}{\dim V_\pi}.$$

したがって、(6) が成り立つ。(証明終)

以上より、次の命題が成り立つ。

命題 1 (Kloosterman spectral formula) $\phi \in \mathcal{W}(\psi)$ に対して、

$$K(\phi, x) = \sum_{\pi\in\Pi(G,\psi)} J_\pi(x) \cdot \frac{\dim V_\pi}{\#(G)} \int_G \phi(y)\, J_\pi\left(y^{-1}\right)\, dy \tag{7}$$

が成り立つ。

いま、$f \in C_c(G)$ すなわち f を G 上の $\mathbb{C}$ に値を持つ函数とする。このとき、

$$G \ni x \mapsto \frac{1}{\#(N)} \int_N f(nx)\, \psi(n)^{-1}\, dn \in \mathbb{C}$$

は $\mathcal{W}(\psi)$ の元である。したがって、$\Gamma = \{1\}$ とすると、kernel function

$$K_f(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(x^{-1}\gamma y) = f(x^{-1}y)$$

に対して、次の Petersson-Kuznetsov 跡公式が成り立つ。

定理 4 (有限群の Petersson-Kuznetsov 跡公式) $f \in C_c(G)$ に対して、

$$\frac{1}{\#(N)^2} \int_N \int_N K_f(n_1, n_2)\, \psi(n_1)\, \psi(n_2)^{-1}\, dn_1\, dn_2 \\ = \sum_{\pi \in \Pi(G,\psi)} \frac{\dim V_\pi}{\#(G) \cdot \#(N)} \int_G \int_N f(ny)\, \psi(n)^{-1}\, J_\pi\left(y^{-1}\right)\, dn\, dy$$

が成り立つ。

最後に J_π が下記の様に π の指標 χ_π によって表されることに注意しておく。

補題 5 $\pi \in \Pi(G, \psi)$ に対して、

$$J_\pi(x) = \frac{1}{\#(N)} \int_N \chi_\pi(xn)\, \psi(n)^{-1}\, dn \tag{8}$$

が成り立つ。

（証明）右辺を $J'(x)$ と表す。このとき、

$$J'(n_1 x n_2) = \frac{1}{\#(N)} \int_N \chi_\pi\left(n_1(xn_2nn_1)n_1^{-1}\right)\, \psi(n)^{-1}\, dn = \psi(n_1 n_2)\, J'(x)$$

かつ J' は右正則表現によって π の multiple を生成する。よって、$J' \in V_\pi^\psi$ かつ $J' = J'(1) \cdot J_\pi$ である。ここで、

$$J'(1) = \frac{1}{\#(N)} \int_N \chi_\pi(n)\, \psi(n)^{-1}\, dn = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_N\left(\pi\,|_N, \psi\right) = 1$$

である。したがって、(8) が成り立つ。（証明終）

References

[1] J. Arthur, *The trace formula and Hecke operators*, Number Theory, trace formulas and discrete subgroups (Oslo, 1987), 11–27, Academic Press, Boston, MA, 1989.

[2] S. Böcherer, *Bemerkungen über die Dirichletreihen von Koecher und Maaß*, Preprint Math. Bottingensis Hefr 68, 1986.

[3] J. Cogdell, *Bessel functions for* GL(2), available from: `http://www.math.ohio-state.edu/~cogdell/`

[4] M. Furusawa and K. Martin, *On central critical values of the degree four L-functions for* GSp (4)*: the fundamental lemma.II*, Amer. J. Math., to appear.

[5] M. Furusawa, K. Martin and J. A. Shalika, *On central critical values of the degree four L-functions for* GSp (4)*: the fundamental lemma. III*, in preparation.

[6] M. Furusawa and J. A. Shalika, *On central critical values of the degree four L-functions for* GSp (4)*: the fundamental lemma*, Mem. Amer. Math. Soc. **164** (2003), no. 782, x+139 pp.

[7] B. H. Gross and D. Prasad, *On the decomposition of a representation of* SO_n *when restricted to* SO_{n-1}, Canad. J. Math. **44** (1992), 974–1002.

[8] B. H. Gross and D. Prasad, *On irreducible representations of* $\mathrm{SO}_{2n+1} \times \mathrm{SO}_{2m}$, Canad. J. Math. **46** (1994), 930–950.

[9] J. Guo, *On the positivity of the central critical values of automorphic L-functions for* GL(2) , Duke Math. J. **83** (1996), 157–190.

[10] A. Ichino and T. Ikeda, *On the periods of automorphic forms on special orthogonal groups and the Gross-Prasad conjecture*, Geom. Funct. Anal. **19** (2010), 1378–1425.

[11] H. Jacquet, *Sur un résultat de Waldspurger* , Ann. Sci. École Norm. Sup. **19** (1986), 185–229.

[12] H. Jacquet, *Sur un résultat de Waldspurger. II* , Compositio Math. **63** (1987), 315–389.

[13] S. Katok and P. Sarnak, *Heegner points, cycles and Maass forms*, Israel J. Math. **84** (1993), 193–227.

[14] W. Kohnen and D. Zagier, *Values of L-series of modular forms at the center of the critical strip* , Invent. Math. **64** (1981), 175–198.

[15] B. C. Ngô, *Le lemme fondamental de Jacquet et Ye en caractéristique positive,* Duke Math. J. **96** (1999), 473–520.

[16] B. C. Ngô, *Faisceaux pervers, homomorphisme de changement de base et lemme fondamental de Jacquet et Ye* , Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **32** (1999), 619–679.

[17] T. Tamagawa, *On Selberg's trace formula*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **8** (1960), 363–386.

[18] J.-L. Waldspurger, *Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symétrie* , Compositio Math. **54** (1985), 173–242.